

Abgabetermin: Mittwoch, 15.12.2004, vor Beginn der Vorlesung

29. (a) Bestimmen Sie für die Umkehrfunktionen arcosh und arsinh der Hyperbelfunktionen cosh und sinh die Bereiche, auf denen sie differenzierbar sind, und berechnen Sie die Ableitung.

- (b) Die Funktion $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und genüge der Funktionalgleichung

$$e^{f(x)} = 1 + xf(x) + \ln(1 - x). \quad (1)$$

Bestimmen Sie $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, indem Sie wiederholt beide Seiten von (1) (mit der Kettenregel) differenzieren. Beachten Sie hierbei, dass Sie auch begründen müssen, warum f zweimal bzw. dreimal differenzierbar ist.

30. (a) Finden Sie die Intervalle, in denen die gegebenen Funktionen streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend sind. Bestimmen Sie alle Extrema. Skizzieren Sie jeweils die Graphen der Funktionen:

$$f(x) = x^2 - x - 6; \quad g(x) = \frac{x}{1+x}; \quad h(x) = \sqrt{3}x - \cos(2x), \quad x \in [0, \pi].$$

- (b) Sei $f(x) = x - \sin x$. Zeigen Sie, dass f auf \mathbb{R} streng monoton steigend ist. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass $x < \sin x$ für $x < 0$ und $x > \sin x$ für $x > 0$ gilt.
- (c) Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$. Untersuchen Sie f in Abhängigkeit von a und b auf lokale Extrema. Skizzieren Sie den Graphen der Funktionen.

31. (a) Einem Tafelwerk entnimmt man $\ln(20) \approx 2,99573$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung den ungefähren Wert von $\ln(20,5)$, indem Sie ein geeignetes Intervall angeben, in dem $\ln(20,5)$ liegt.

- (b) Vergleichen Sie die Werte $f(1,05)$ und $f(1)$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes für die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

- (c) Man bestimme die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital:

$$\lim_{x \downarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos^2(x)}, \quad \lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos^2(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{\cos x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{xe^x - x}$$

und für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x}.$$

32. (a) Berechnen Sie mit Hilfe der Taylorentwicklung die Funktionswerte $\sin(1)$ und $\cos(1)$ auf 4 Stellen hinter dem Komma.

- (b) Berechnen Sie das 3-te Taylorpolynom der Funktion $\arcsin(x)$ bezüglich der Stelle $x = 0$.

- (c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar, und es gelte $f' = f$ und $f(0) = 1$. Zeigen Sie, ohne auf die Eigenschaften der Exponentialfunktion zurückzugreifen, dass dann

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

gilt. Konvergiert die Reihe gleichmäßig auf \mathbb{R} ?

32* Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit

$$h''(x) + h(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h(0) = h'(0) = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann $h \equiv 0$ gilt.

[**Tip:** Multiplizieren Sie die Differentialgleichung mit h' .]