

Abgabetermin: Mittwoch, 22.12.2004, vor Beginn der Vorlesung

33. (a) Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar und erfülle

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = 0 \text{ für alle } x \in [a, b],$$

wobei $\omega \neq 0$ eine Konstante sei. Zeigen Sie zunächst, dass

$$f(x) = \varphi(x) \cos(\omega x) + \psi(x) \sin(\omega x)$$

für $x \in [a, b]$ gilt, wobei

$$\varphi(x) := f(x) \cos(\omega x) - \frac{1}{\omega} f'(x) \sin(\omega x),$$

$$\psi(x) := f(x) \sin(\omega x) + \frac{1}{\omega} f'(x) \cos(\omega x).$$

Zeigen Sie dann $\varphi' \equiv 0 \equiv \psi'$, d.h. $\varphi \equiv \alpha$ und $\psi \equiv \beta$ für Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Folgern Sie daraus

$$f(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x).$$

- (b*) Betrachten Sie die Funktionen

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1, \quad g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$$

für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass kein $\xi \in (0, 1)$ existiert mit

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Warum ist dies kein Widerspruch zu Satz 3.2.3 der Vorlesung?

34. (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = e^x + \ln x - x, \quad x > 0.$$

Wählen Sie $x_0 = 1$ und $x_0 = 2$ als Startwerte der Iteration.

- (b) Wenden Sie das Newtonverfahren auf die Funktion

$$f(x) = x^3 - 20x, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit den Startwerten $x_0 = 4$, $x_0 = 2$ und $x_0 = 2, 2$ an. Was stellen Sie jeweils fest?

35. (a) Bestimmen Sie eine Lösung der Differenzialgleichung

$$y''(t) + 2\mu y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei $\mu^2 < \omega_0^2$ sei.

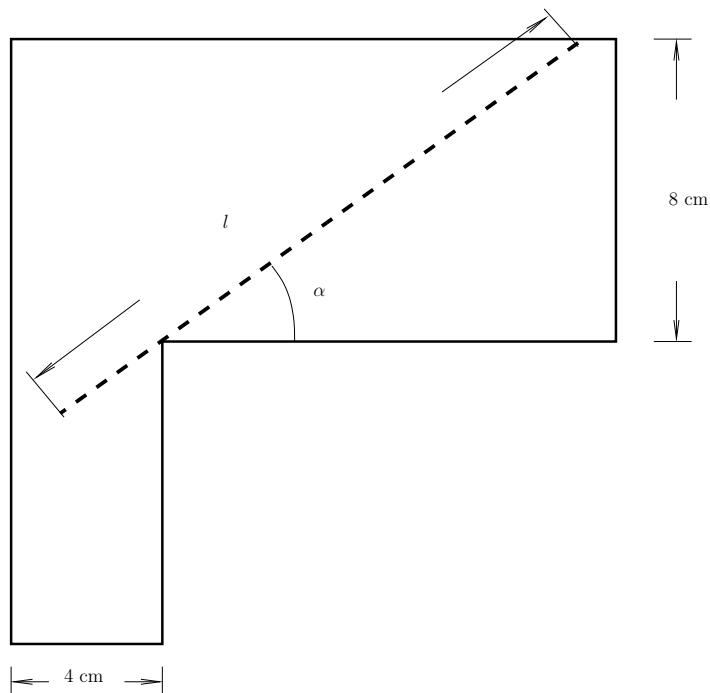
Tip: Machen Sie den Ansatz $y(t) = f(t)e^{-\mu t}$. Sie erhalten dabei eine DGL für f .

- (b) Mit einem Potenzreihenansatz leite man zwei Lösungen der DGL

$$(1 + x^2)u''(x) + 3xu'(x) + u(x) = 0, \quad x \in D(u)$$

her, die den Anfangsbedingungen $u(0) = 1, u'(0) = 0$ bzw. $u(0) = 0, u'(0) = 1$ genügen. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihen.

36. (a*) Der Flur eines Studentenwohnheims habe den unten skizzierten Grundriss:



Sie wollen eine Gardinenstange der Länge l durch diesen Flur (um die Ecke herum) transportieren, wobei die Stange immer in horizontaler Lage gehalten werden soll. Welche Länge l darf die Stange maximal haben, so dass Ihnen dieses Unterfangen gelingt? (Sie dürfen dabei die Dicke der Stange vernachlässigen)!

- (b) Bei einem Wechselspannungsteiler mit Widerstand R und Kondensator mit Kapazität C hänge das Verhältnis der Spannungen $\frac{U_1}{U_2}$ von der Kreisfrequenz ω gemäß

$$\frac{U_1}{U_2} =: v(\omega) = \frac{RC\omega}{\sqrt{9R^2C^2\omega^2 + (1 - R^2C^2\omega^2)^2}}$$

ab. Für welche Kreisfrequenz ω wird das Verhältnis v extremal? Erhält man ein Maximum oder ein Minimum?