HD Dr. Daniel Hug
Dr. Ursula Ludwig 22.12.2004

Abgabetermin: Mittwoch, 12.01.2005, vor Beginn der Vorlesung

37. (a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$. Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ näherungsweise mit Hilfe der Trapezformel (Formel (4.1.1) aus der Vorlesung). Wählen Sie die Anzahl der Stützstellen so, dass der Fehler des errechneten Wertes für das Intregral $< 5 \cdot 10^{-3}$ ist.

    (b) Man berechne näherungsweise das bestimmte Integral
$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$
mit Hilfe der Trapezregel, indem man eine Zerlegung des Intervalls der Feinheit $h = 0,1$ wählt.

38. (a) Man begründe, dass die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \notin \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
R-integrierbar ist und bestimme das Integral $\int_0^1 f(x)dx$.

    (b) Man begründe, dass die Funktion $g : [0,2] \to \mathbb{R}$
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ e^{5x} & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$
R-integrierbar ist und bestimme das Integral
$$I = \int_0^2 g(x)dx.$$

39. (a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, und seien $a, C \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Bestätigen Sie, dass $F(x) = \arcsin\left(\frac{g(x)}{a}\right) + C$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{a^2 - g^2(x)}}$ ist.

    (b) Seien $a, C \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Zeigen Sie, dass $H(x) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ eine Stammfunktion von $h(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ist.

    (c) Bestimmen Sie auf $(-\infty, \infty)$ alle Extremstellen der Funktion
$$f(x) := \int_0^x (1 + 4t)e^{t^2} dt + xe^{x^2}.$$

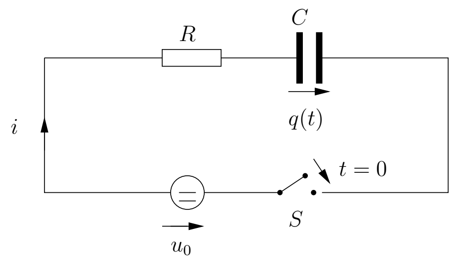
    (c*) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es gelte $f(x) \in (0,1)$ für alle $x \in (0,1)$. Ferner sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Gleichung
$$nx + \int_0^x f(t)^n dt = n - 1 + \int_0^{x^n} f(t)dt$$
genau eine Lösung $\xi \in [0,1]$ besitzt. **Tip:** Die obige Behauptung ist dazu äquivalent, dass die Funktion $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}, \Phi(x) = nx + \int_0^x f(t)^n dt - (n-1) - \int_0^{x^n} f(t)dt$ genau eine Nullstelle hat.

40. (a) Man bestimme mit Hilfe der Substitutionsregel die Werte der Integrale

$$\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}dx, \qquad \int_0^1 \cos(1+3x)dx, \qquad \int_0^1 x^2\sin\left(x^3\right)dx.$$

(b) In der im Bild skizzierten RC-Schaltung fließt nach Schließen des Schalters S zur Zeit $t=0$ der Ladestrom

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \qquad t \geq 0.$$



Ermitteln Sie den zeitlichen Verlauf der Kondensatorladung $q(t)$, wenn der Kondensator zu Beginn ungeladen ist.
Tip: Es gilt $i(t) = q'(t)$.