

**Abgabetermin:** Mittwoch, 19.01.2005, vor Beginn der Vorlesung

41. (a) Mit Hilfe der Methode der partiellen Integration bestimme man Stammfunktionen zu

$$f_1(x) = \cosh^2(x), \quad f_2(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^2}, \quad f_3(x) = x^2 \cos(x).$$

**Tip:** Sie dürfen benutzen, dass  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$  gilt.

- (b\*) Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x > 0$  bestimme man eine Rekursionsformel für die Integrale

$$I_n = \int \ln^n(x) dx, \quad J_n = \int x^n \cos(x) dx, \quad K_n = \int \cosh^n(x) dx.$$

- (b) Man beweise mittels vollständiger Induktion für  $n \in \mathbb{N}$

$$\int x^n e^x dx = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!} x^{n-i} e^x.$$

42. (a) Man berechne die Integrale

$$\int \frac{7x+8}{x^2+x-2} dx, \quad \int \frac{2x^3-2x^2-4x-5}{x^2-x-2} dx, \quad \int \frac{6-x}{x^2+4x+4} dx$$

und

$$\int \frac{x+4}{x^2-4x+13} dx.$$

43. (a) Untersuchen Sie die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^2 \frac{6x}{3x^2-12} dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(x) dx$$

auf Konvergenz.

- (b) Untersuchen Sie die Konvergenz der uneigentlichen Integrale

$$\int_0^1 \ln(1-x) dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2},$$

und geben Sie gegebenenfalls deren Wert an.

44. (a) Leiten Sie die Taylorentwicklung zur Entwicklungsstelle  $x_0 = 0$  für  $\arctan(x)$  mittels der Methode der Integration von Potenzreihen her.

**Tip:** Es gilt

$$\arctan(x) = \int_0^x \arctan'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Entwickeln Sie den Integranden auf einem geeigneten Intervall in eine geometrische Reihe.

(b) (α) Zeigen Sie die Konvergenz von

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

(β) Warum konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^n e^{-kx} =: s(x)$$

gleichmäßig? Geben Sie  $s(x)$  in möglichst einfacher Weise an.

**Tip:** Zeigen Sie  $x^n e^{-kx} \leq \left(\frac{n}{k}\right)^n e^{-n}$  für  $x \geq 0$ .

(γ) Folgern Sie für  $b > 0$ :

$$\int_0^b \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^b x^n e^{-kx} dx.$$