

Abgabetermin: Mittwoch, 02.02.2005, vor Beginn der Vorlesung

49. (a) Berechnen Sie das Volumen des von der Funktion

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x^2}, \quad x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

durch Rotation um die x -Achse erzeugten Rotationskörpers.

Berechnen Sie ferner das Volumen einer Kugel vom Radius r , indem Sie diese als Rotationskörper auffassen.

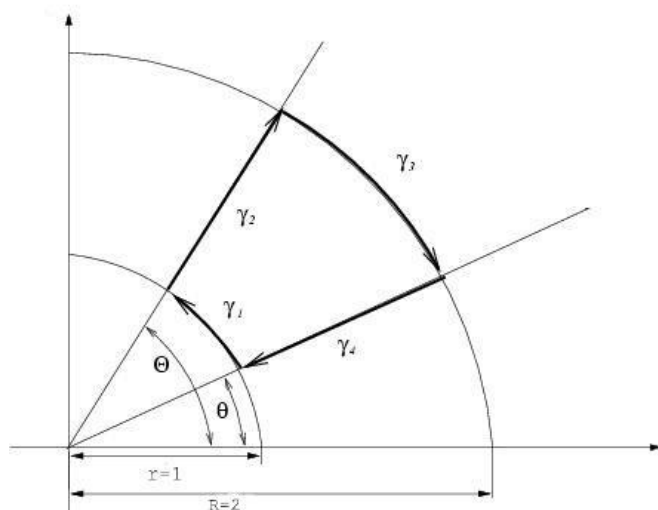
- (b) Berechnen Sie die Oberflächen der von f und g erzeugten Rotationskörper, wobei

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [0, 1]; \quad g(x) = \sinh(x), \quad x \in [0, 1].$$

50. Ein Punktteilchen bewege sich in dem Kraftfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

entlang des in der Abbildung ($r = 1$, $R = 2$, $\theta = \pi/6$, $\Theta = \pi/3$) skizzierten geschlossenen Weges. Welche Arbeit wird an dem Teilchen verrichtet?



(Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Beispiel aus der Vorlesung.)

51. (a) Berechnen Sie die Fläche, die durch die überschneidungsfreie (kein Nachweis erforderlich) Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ t - t \cos(t) \end{pmatrix}$$

eingeschlossen wird.

- (b) Der Radiusvektor, der vom Ursprung zur logarithmischen Spirale zeigt, ist durch $r(\varphi) = k^\varphi$ mit einem festen $k > 0$ gegeben. Berechnen Sie die Fläche, die vom Radiusvektor zwischen den Winkeln $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 1$ überstrichen wird.
- (c) Bestimmen Sie die Flächen, die vom Radiusvektor r_1 bzw. r_2 im Winkelintervall $[\varphi_0, \varphi_1]$ überstrichen werden:

$$r_1(\varphi) = \tan^2(\varphi), \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}; \quad r_2(\varphi) = \tanh(\varphi), \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 2\pi.$$

Tip: Leiten Sie her oder prüfen Sie durch Differentiation, dass

$$\int \tan^4(\varphi) d\varphi = \frac{1}{3} \tan^3(\varphi) - \tan(\varphi) + \varphi.$$

Anmerkung zu Aufgabe 51: Überlegen Sie sich, dass die in der Vorlesung hergeleitete Formel zur Berechnung der Fläche, die von einer geschlossenen Kurve berandet wird, auch in dieser Aufgabe benutzt werden kann.

52. (a) Sei $C(\mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Weisen Sie nach, dass $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ein Untervektorraum von $(V(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ist!
- (b) Welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ sind Untervektorräume?
- (α) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$,
 - (β) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 1\}$,
 - (γ) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z^2\}$,
 - (δ) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq z\}$.