

**Abgabetermin:** Mittwoch, 09.02.2005, vor Beginn der Vorlesung

53. (a) Sei  $C([-\pi, \pi])$  die Menge aller stetigen Funktionen von  $[-\pi, \pi]$  nach  $\mathbb{R}$  und  $C^2([-\pi, \pi])$  die Menge aller zweimal differenzierbaren Funktionen von  $[-\pi, \pi]$  nach  $\mathbb{R}$ . Begründen Sie kurz, warum  $C([-\pi, \pi])$  und  $C^2([-\pi, \pi])$  Vektorräume sind. Zeigen Sie, dass

$$V := \{f \in C^2([-\pi, \pi]) : f'' + f = 0\}$$

ein Untervektorraum von  $C^2([-\pi, \pi])$  ist. Zeigen Sie  $f_1 := \sin \in V$  und  $f_2 := \cos \in V$ . Begründen Sie

$$V = \langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle .$$

**Tip:** Aufgabe 33(a).

- (b) Sei

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Zeigen Sie  $\mathbb{R}^3 = \langle M \rangle$ . Geben Sie eine Teilmenge  $\overline{M} \subset M$  an mit  $\mathbb{R}^3 = \langle \overline{M} \rangle$ .

54. (a) Gegeben seien die Vektoren  $v_1 = (4, 2, 1), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 2, 4)$  in  $\mathbb{R}_3$ . Sind die Vektoren  $v_1, v_2, v_3$  linear unabhängig? Geben Sie einen Vektor  $w \in \mathbb{R}_3$  an, so dass  $v_1, v_2, w$  linear unabhängig sind. Lässt sich  $v_3$  als Linearkombination von  $v_1, v_2, w$  darstellen?

- (b) Untersuchen Sie für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Vektoren  $(0, 1, x), (1, x, 1), (x, 1, 0) \in \mathbb{R}_3$  auf lineare Unabhängigkeit über dem Körper  $\mathbb{R}$ .

55. (a) Es sei

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (v, w) &\mapsto v_1 w_1 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + 4v_2 w_2. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass durch  $A$  auf  $\mathbb{R}_2$  ein Skalarprodukt definiert wird. Ist die Standardbasis eine ONB bezüglich dieses Skalarproduktes? Ergänzen Sie  $v = (0, 1/2)$  zu einer ONB bezüglich  $A$ .

- (b) Sei  $V$  der in Aufgabe 53 (a) definierte Untervektorraum von  $C([-\pi, \pi])$ . Sei

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt, \quad f, g \in C([-\pi, \pi])$$

das in der Vorlesung definierte Skalarprodukt auf  $C([-\pi, \pi])$ . Zeigen Sie, dass

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x) \right\}$$

eine ONB-Basis von  $V$  bezüglich  $(\cdot, \cdot)$  ist.

56. (a) Ergänzen Sie die Basis  $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$  zu einer ONB des  $\mathbb{R}_3$  bezüglich des Standardskalarproduktes.

- (b) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement von  $V := \langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle$  in  $\mathbb{R}_3$  bezüglich des Standardskalarproduktes.

- (c) In  $\mathbb{R}_3$  spannen die Vektoren  $(2, 2, 1)$  und  $(1, 0, 2)$  einen Untervektorraum  $U$  auf. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Verfahrens eine ONB von  $U$ .