Übungen zu Mathematik I WS 2004/05, Blatt 15

HD Dr. Daniel Hug

Dr. Ursula Ludwig 09.02.2005

---

keine Abgabe

---

57. (a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^3$. Beweisen Sie

$$a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c.$$

Berechnen Sie die Kreuzprodukte $a \times b$ und $a' \times b'$ für die Vektoren $a = (1, 2, 0)^\top, b = (4, 8, 0)^\top$ und $a' = (1, 3, 2)^\top, b' = (2, 1, 1)^\top$. Bilden $\{a, b, a \times b\}$ bzw. $\{a', b', a' \times b'\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(b) Sei $a := (a_1, a_2, a_3)^\top \in \mathbb{R}^3$. Beweisen Sie, dass durch

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto x \times a$$

eine lineare Abbildung definiert wird.

Sei nun $a = (1, 1, 1)^\top$. Geben Sie jeweils eine Basis von $\ker(f)$ und von $f(\mathbb{R}^3)$ an, und bestätigen Sie, dass $\dim(\ker(f)) + \dim(f(\mathbb{R}^3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ gilt.

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A^{B_1,B_2}(f)$ von f bezüglich der Standardbasis B_1 und $B_2 := \{(1, 2, 0)^\top, (0, 1, 1)^\top, (-1, 0, -1)^\top\}$.

58. (a) Seien

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$ und zeigen Sie anhand dieses Beispiels, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

(b) Sei B_1 die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$. Sei B_2 die durch $\{(1, 2, 3)^\top, (1, 2, 0)^\top, (1, 0, 0)^\top\}$ gegebene Basis des $\mathbb{R}^3$ und

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2, x_3)^\top \mapsto (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_3, -x_1 + x_2)^\top.$$

Berechnen Sie $\ker(\varphi)$ und $\varphi(\mathbb{R}^3)$. Bestimmen Sie $A^{B_1,B_1}(\varphi)$, $A^{B_1,B_2}(\varphi)$, $A^{B_2,B_1}(\varphi)$ und $A^{B_2,B_2}(\varphi)$.

59. (a) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bilden die Spaltenvektoren der Matrix A bzw. B eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$?

Berechnen Sie die Inverse von A.

(b) Untersuchen Sie, ob die folgenden linearen Abbildungen Eigenwerte besitzen, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Eigenräume:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x,$$

$$g : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x.$$

60. (a) Bestimmen Sie mittels der Cramerschen Regel alle $x \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{array}{rrrrr} x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4 = & 3 \\ x_1- & x_2+ & & x_4 = & 4 \\ 2x_1+ & & 2x_3- & x_4 = & -3 \\ x_1+ & 2x_2- & x_3+ & x_4 = & 5 \end{array} .$$

(b) Benutzen sie den Gauß-Algorithmus, um den Rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $b := (1, -3, -1, 5)^\top$.