



1. Beweisen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen des Polynoms

$$p(x) := x^3 - 3x^2 + 4x - 2, \quad x \in \mathbb{C}$$

in  $\mathbb{C}$ . **Hinweis:** Testen Sie  $x = 1$ .

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} x^k.$$

Berechnen Sie ferner das Integral

$$\int_0^1 s(x) dx.$$

4. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{xe^{2x}}.$$

5. Bestätigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

die Differentialgleichung

$$f'(x) = (x + f(x))^2 \quad \text{und} \quad f(0) = 1$$

erfüllt.

6. Berechnen Sie Stammfunktionen zu den Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := (x-1) \sin(x-1) \quad \text{und} \quad g(x) := x^2 \cos(2x^3).$$

7. Zeigen Sie, dass

$$V := \{f \in C^1(\mathbb{R}) : f'(x) = -x^2 f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

ein Untervektorraum von  $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$  ist.

8. Berechnen Sie das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$