HD Dr. Daniel Hug
Dr. Ursula Ludwig

Mathematisches Institut
Universität Freiburg
11.03.2005

Lösungsskizze zur Klausur Mathematik I: Informatiker

1. Induktionsanfang $n = 1$:
$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}.$$
Induktionsschritt (die zweite Gleichung verwendet die Induktionsannahme):
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) \\ &= (n+1)^2 \frac{n^2+4n+4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

2. Es ist $p(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 0$ und damit ist 1 eine Nullstelle des Polynoms. Es wird eine Polynomdivision durchgeführt:
$$\begin{array}{rrrrl} (x^3 & -3x^2 & +4x & -2) & : (x-1) = x^2 - 2x + 2\,. \\ -(x^3 & -x^2) & & & \\ & -2x^2 & +4x & -2 & \\ & -(-2x^2 & +2x) & & \\ & & 2x-2 & & \end{array}$$
Die restlichen beiden Nullstellen $x_{2/3}$ von p erhält man aus:
$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i.$$

3. Das Quotientenkriterium ergibt für den Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum a_k x^k, a_k \neq 0$, falls der folgende Grenzwert existiert,
$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$
Für die gegebene Reihe erhält man also
$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{2^k} \cdot \frac{2^{k+1}}{k+2} \right| = 2 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+2} = 2.$$
Bei der gegebenen Potenzreihe sind im Intervall $[0,1]$ somit Integration und Summation vertauschbar, d.h.
$$\int_0^1 s(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

4. Man wendet die Regel von de l'Hopital an (denn der Grenzwert ist vom Typ $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{xe^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{e^{2x} + 2xe^{2x}} = \frac{2}{1} = 2.$$

5. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x+\pi/4)} - 1 = \frac{1-\cos^2(x+\pi/4)}{\cos^2(x+\pi/4)} = \frac{\sin^2(x+\pi/4)}{\cos^2(x+\pi/4)} = \tan^2(x+\pi/4) \\ &= (f(x)+x)^2 \end{aligned}$$

und $f(0) = \tan(\pi/4) = 1$.

6. Man wendet partielle Integration an ($u(x) = x - 1, v'(x) = \sin(x-1)$):

$$\begin{aligned} \int (x-1)\sin(x-1)\,dx &= [-(x-1)\cos(x-1)] - \int (-\cos(x-1))dx \\ &= -(x-1)\cos(x-1) + \sin(x-1) + C. \end{aligned}$$

Man substituiert $u = 2x^3, du = 6x^2dx$:

$$\int x^2\cos(2x^3)\,dx = \frac{1}{6}\int \cos(u)du + C = \frac{1}{6}\sin(u) = \frac{1}{6}\sin(2x^3) + C.$$

7. Seien $f, g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $f + \lambda g \in C^1(\mathbb{R})$, und es gilt:

$$\begin{aligned} (f+\lambda g)'(x) &= f'(x) + \lambda g'(x) = -x^2 f(x) + \lambda(-x^2 g(x)) = -x^2(f(x) + \lambda g(x)) \\ &= -x^2(f+\lambda g)(x), \end{aligned}$$

also $f + \lambda g \in V$.

8. Man erhält

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4 & 1+2 \\ 5+2 & 1-1 \\ -5-6 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 - 1 = -3.$$