

Lösungsskizze zur Klausur Mathematik I: Ingenieure

1. Es ist $p(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 0$ und damit ist 1 eine Nullstelle des Polynoms. Es wird eine Polynomdivision durchgeführt:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 + 4x - 2) : (x - 1) = x^2 - 2x + 2. \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline -2x^2 + 4x - 2 \\ -(-2x^2 + 2x) \\ \hline 2x - 2 \end{array}$$

Die restlichen beiden Nullstellen $x_{2/3}$ von p erhält man aus:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm i.$$

2. Das Quotientenkriterium ergibt für den Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum a_k x^k$, $a_k \neq 0$, falls der folgende Grenzwert existiert,

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

Für die gegebene Reihe erhält man also

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k+1}{2^k} \cdot \frac{2^{k+1}}{k+2} \right| = 2 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k+2} = 2.$$

Bei der gegebenen Potenzreihe sind im Intervall $[0, 1]$ somit Integration und Summation vertauschbar, d.h.

$$\int_0^1 s(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

3. Man wendet die Regel von de l'Hopital zweimal an (denn der Grenzwert ist vom Typ $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2 e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{2x e^x + x^2 e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(-\sin^2(x) + \cos^2(x))}{2e^x + 2x e^x + 2x e^x + x^2 e^x} = 1.$$

4. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x + \pi/4)} - 1 = \frac{1 - \cos^2(x + \pi/4)}{\cos^2(x + \pi/4)} = \frac{\sin^2(x + \pi/4)}{\cos^2(x + \pi/4)} = \tan^2(x + \pi/4) \\ &= (f(x) + x)^2 \end{aligned}$$

und $f(0) = \tan(\pi/4) = 1$.

5. Man wendet partielle Integration an ($u(x) = x - 1, v'(x) = \sin(x - 1)$):

$$\begin{aligned}\int (x - 1) \sin(x - 1) dx &= [-(x - 1) \cos(x - 1)] - \int (-\cos(x - 1)) dx \\ &= -(x - 1) \cos(x - 1) + \sin(x - 1) + C.\end{aligned}$$

Man substituiert $u = 2x^3, du = 6x^2 dx$:

$$\int x^2 \cos(2x^3) dx = \frac{1}{6} \int \cos(u) du + C = \frac{1}{6} \sin(u) = \frac{1}{6} \sin(2x^3) + C.$$

6. Man erhält

$$\begin{aligned}L(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{(6t)^2 + (3t^2 - 3)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{3^2(4t^2 + (t^2 - 1)^2)} dt = 3 \int_0^1 \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} dt \\ &= 3 \int_0^1 (t^2 + 1) dt = 3 \left(\frac{1}{3} t^3 + t \right) \Big|_0^1 = 3 \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = 4.\end{aligned}$$

7. Die Vektoren sind linear unabhängig wegen:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

8. Man erhält

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 4 & 1 + 2 \\ 5 + 2 & 1 - 1 \\ -5 - 6 & -1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 - 1 = -3.$$