Universität Duisburg-Essen, Campus Duisburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H.-B. Knoop

Lösungen zur Klausur zur Mathematik 1 für Studierende der Informatik vom 26.8.2010

Aufgabe 1

a) Gegeben seien die negativen reellen Zahlen $a,\ b,\ c,\ d$ mit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Beweisen Sie:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

b) Zeigen Sie (nach Möglichkeit ohne vollständige Induktion), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n}(2n-k)(n+2k) = \frac{1}{6}n(n+1)(17n-2).$$

Lösung:

a) (i) Wegen $b < 0$ und $b+d < 0$ ist $b(b+d) > 0$ und damit

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow\ a(b+d) < b(a+c) \Leftrightarrow ab+ad < ab+bc \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}\ .$$

(ii) Wegen $d < 0$ und $b+d < 0$ ist $d(b+d) > 0$ und damit

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow d(a+c) < c(b+d) \Leftrightarrow ad+cd < bc+cd \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}\ .$$

b) Es ist unter Berücksichtigung von Satz 1.13:

$$\sum_{k=0}^{n}(2n-k)(n+2k) = \sum_{k=0}^{n}(2n^2-kn+4kn-2k^2)$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n} n^2 + 3n\sum_{k=1}^{n} k - 2\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= 2n^2 \cdot (n+1) + 3n \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{2}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(12n+9n-2(2n+1)) = \frac{1}{6}n(n+1)(17n-2)\ .$$

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 7i,\ z_2 = 1 - 3i$, und $z_3 = 3 + 4i$ den Real- sowie den Imaginärteil und den Absolutbetrag von

$$\frac{z_1 - 3\overline{z_2}}{z_3}.$$

Verwenden Sie dabei bitte nicht Ihren Taschenrechner!

b) Bestimmen Sie das geometrische Objekt, das durch die Ungleichungen

$$4 \leq |z + 1 - i|^2 \leq 16$$

beschrieben wird!

Lösung:

a) Es ist

$$\begin{aligned} z := \frac{z_1 - 3\overline{z_2}}{z_3} &= \frac{4 + 7i - 3(1 + 3i)}{3 + 4i} = \frac{4 + 7i - 3 - 9i}{3 + 4i} = \frac{1 - 2i}{3 + 4i} \\ &= \frac{(1 - 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{3 - 4i - 6i + 8i^2}{9 + 16} = \frac{-5 - 10i}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\ , \end{aligned}$$

also Re $z = -\dfrac{1}{5}$, Im $z = -\dfrac{2}{5}i$.

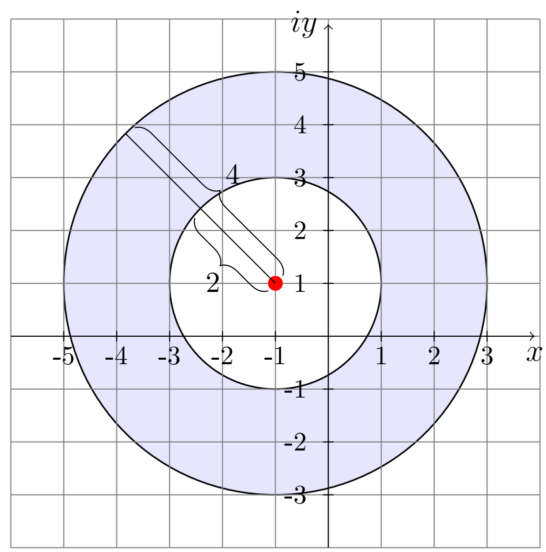
Berechnung des Betrags:

$$|z| = \left|-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

b) Mit $z = x + iy$ ist

$$\begin{aligned} |z + 1 - i|^2 &= |x + iy + 1 - i|^2 \\ &= |(x + 1) + i(y - 1)|^2 \\ &= \left(\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}\right)^2 \\ &= (x + 1)^2 + (y - 1)^2, \end{aligned}$$

d.h. man hat den rechts abgebildeten Kreisring.



Aufgabe 3
Untersuchen Sie die unten angegebenen Folgen auf Konvergenz, bestimmte Divergenz bzw. Divergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenzwerte an!

a)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\cdot\frac{2n}{n+1},$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} e^{in}.$$

Lösung:

a) Es gilt
$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\to e\quad\text{für } n\to\infty$$
sowie
$$\frac{2n}{n+1}=2\cdot\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})}=\frac{2}{1+\frac{1}{n}}\to 2\quad\text{für } n\to\infty.$$
Nach den Grenzwertsätzen gilt also
$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\cdot\frac{2n}{n+1}\right)=2\cdot e.$$

b) Es ist
$$|e^{i(n+1)}-e^{in}|=|e^{in}(e^i-1)|=|e^{in}|\cdot|e^i-1|=|e^i-1|\neq 0\ ,$$
also die Folge $(e^{in})_{n\geq 1}$ keine Cauchy-Folge und damit nicht konvergent.

Aufgabe 4

a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^3}{e^k}.$$

b) Zeigen Sie, dass die folgende Reihe für alle $|x|<\frac{1}{3}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Wert für beliebiges $|x|<\frac{1}{3}$:
$$\sum_{k=2}^{\infty}(-3x)^k.$$

Lösung:

a) Das Quotientenkriterium liefert:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \cdot \frac{1}{e}\right| \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{128}{135} =: q < 1$$

für $k \geq 3$. Daraus folgt die Konvergenz der Reihe.

b) Für $|x| < \frac{1}{3}$ ist $|-3x| < 1$, woraus die Konvergenz folgt. Es ergibt sich durch Betrachtung der geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-3x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-3x)^k - (1-3x) = \frac{1}{1+3x} - (1-3x)$$

$$= \frac{1-(1-3x)(1+3x)}{1+3x} = \frac{1-(1-9x^2)}{1+3x} = \frac{9x^2}{1+3x} \; .$$

Aufgabe 5
Wir betrachten die Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln x \; .$$

a) Berechnen Sie die beiden ersten Ableitungen von f.

b) Bestimmen Sie alle Extremwerte von f im offenen Intervall $]0, \infty[$.

Lösung:

a) Nach der Produktregel ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$$

und

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}(1-\ln x) + \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^3} \cdot (3 - \ln x) \; .$$

b) Es ist $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$. Durch Einsetzen in die zweite Ableitung ergibt sich $f''(e) = -\frac{2}{e^3} < 0$. Also liegt an der Stelle $x = e$ ein relatives Maximum vor mit dem Funktionswert $f(e) = \frac{1}{e}$.

Aufgabe 6:

a) Berechnen Sie für beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^2}{t^k} \ .$$

b) Bestimmen Sie

$$\int \frac{x^2+x}{x^2+2} dx.$$

Lösung:

a) Wegen

$$\lim_{t\to\infty} (\ln t)^2 = \lim_{t\to\infty} t^k = \infty$$

untersuchen wir mit der Regel von de L'Hospital, ob der Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{t} \cdot \ln t}{k \cdot t^{k-1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2 \cdot \ln t}{k \cdot t^k}$$

existiert. Da wieder die Voraussetzungen zur Regel von de L'Hospital erfüllt sind, betrachten wir

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{t}}{k^2 \cdot t^{k-1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{k^2 \cdot t^k} = 0 \ .$$

Also ist

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^2}{t^k} = 0 \ .$$

b) Es ist

$$\int \frac{x^2+x}{x^2+2} dx = \int \left(1 + \frac{x-2}{x^2+2}\right) dx = x + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+2} dx - 2 \int \frac{dx}{x^2+2}$$

$$= x + \frac{1}{2} \ln(x^2+2) - 2 \int \frac{dx}{2\left((\frac{x}{\sqrt{2}})^2 + 1\right)}$$

Die Substitution $t = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ liefert wegen $dx = \sqrt{2}\, dt$ weiter

$$= x + \frac{1}{2} \ln(x^2+2) - \sqrt{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = x + \frac{1}{2} \ln(x^2+2) - \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \ .$$