

Appendice à “Sur une question de compatibilité local-global modulo p ” par Christophe Breuil

Lassina Dembélé*

November 6, 2009

Soit F un corps totalement réel et $p \geq 3$ un premier inerte dans F . Soit D un corps de quaternion sur F totalement défini et ramifié en un ensemble de places finies Σ telles que $(p) \notin \Sigma$ et $v \in \Sigma$ n'est pas congru à 1 modulo p . Soit \mathfrak{n} un idéal entier tel que $v \nmid \mathfrak{n}$, $v \in \Sigma \cup \{(p)\}$. Soit $g \in S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}}_p)$ une forme nouvelle telle que la représentation galoisienne associée

$$\bar{\rho}_g : \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

est globalement irréductible et générique en p . (On réfère à l'article et au reste de l'appendice pour les diverses définitions et notations.) Alors l'ensemble des poids de Diamond $\mathcal{D}(\bar{\rho}_g)$ a comme cardinal 2^d avec $0 \leq d \leq f$, où f désigne le degré d'inertie en (p) . De plus, on a $d = f$ si et seulement si $\bar{\rho}_g$ est semi-simple en p .

La conjecture suivante est mentionnée dans l'introduction de l'article.

Conjecture 1. *Soient F , D , \mathfrak{n} et g comme ci-dessus, et soit \mathfrak{m}_g l'idéal de l'algèbre de Hecke \mathbf{T}^D engendré par tous les opérateurs $T(\mathfrak{p}) - a_{\mathfrak{p}}(g)$ tels que $g|T(\mathfrak{p}) = a_{\mathfrak{p}}(g)g$ avec $\mathfrak{p} \notin (\Sigma \cup \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}\mathfrak{p}\})$. On pose*

$$S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}}_p)[g] := \{h \in S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}}_p) \mid Th = 0, \forall T \in \mathfrak{m}_g\}$$

(que nous allons aussi abréger par $S^D[g]$). Alors on a

(i) Si $d < f$, $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}}_p)[g] = 2^{f-d}3^d$.

(ii) Si $d = f$, $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}}_p)[g] = 3^f \pm 1$, avec $+$ si $\bar{\rho}_g$ est scindée en p et $-$ si elle est irréductible en p .

Dans cet appendice, nous vérifions quelques cas de cette conjecture par ordinateur. Pour ce faire, nous avons calculé des systèmes de valeurs propres de Hecke de formes automorphes algébriques mod 5 sur des corps de quaternions définis sur les corps totalement réels $F = \mathbb{Q}(\zeta_9)^+$, $\mathbb{Q}(\zeta_7)^+$ et $\mathbb{Q}(\zeta_{16})^+$. Signalons que nous n'avons pas cherché à énoncer

*Warwick Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, United Kingdom, e-mail: l.dembelle@warwick.ac.uk. Supported by an SFB/TR 45 grant of the Deutsche Forschungsgemeinschaft.

$$\Sigma = \{\mathfrak{p}_3\}, \mathbf{n} = (1)$$

| $N\mathfrak{p}$ | \mathfrak{p} | $a_{\mathfrak{p}}(g_1)$ | $a_{\mathfrak{p}}(g_2)$ |
|---|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 3 | \mathfrak{p}_3 | 2 | 0 |
| 8 | \mathfrak{p}_2 | α^{63} | α^7 |
| 17 | $\mathfrak{p}_{17}^{(1)}$ | α^{67} | α^{35} |
| 17 | $\mathfrak{p}_{17}^{(2)}$ | α^{87} | α^{51} |
| 17 | $\mathfrak{p}_{17}^{(3)}$ | α^{113} | α^{98} |
| 19 | $\mathfrak{p}_{19}^{(1)}$ | α^{69} | α^{118} |
| 19 | $\mathfrak{p}_{19}^{(2)}$ | α^{97} | α^{94} |
| 19 | $\mathfrak{p}_{19}^{(3)}$ | α^{82} | α^{64} |
| $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$ | | 4 | 8 |
| $\mathcal{D}(\bar{\rho}_g)$ | | $\sigma_{(2,3,3),(4,2,2)}$ | $\sigma_{(2,1,1),(0,2,2)}$ |

Table 1: Exemples de systèmes de valeurs propres de Hecke sur $\mathbb{Q}(\zeta_9)^+$ à coefficients dans \mathbb{F}_{5^3} (ici α est un générateur de $\mathbb{F}_{5^3}^\times$).

une conjecture générale puisque nous ne nous limitons qu'à la vérifier avec les conditions restreintes ci-dessus (p inerte, $v \in \Sigma$ non-congru à 1 modulo p , \mathbf{n} premier à Σ et niveau $U_0(\mathbf{n})$), mais un énoncé plus général devrait être vrai. Précisons aussi que le cas $d = 0$ de la conjecture 1 peut se déduire de la Remarque 9.7 de l'article et de la Conjecture 8.1 sur les poids de Diamond.

1 Exemples

Pour chacun des corps F ci-dessus et pour quelques corps de quaternions D sur F , nous avons calculé tous les systèmes de valeurs propres de Hecke à coefficients dans \mathbb{F}_{5^f} , pour divers niveaux \mathbf{n} . Nous avons effectué ces calculs en utilisant la même méthode que dans [2] auquel nous référons pour plus de détails.

Pour chaque système de valeurs propres g nous avons, par la même occasion, calculé l'ensemble des poids de Diamond $\mathcal{D}(\bar{\rho}_g)$ ainsi que la dimension $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$. Les poids de Diamond $\mathcal{D}(\bar{\rho}_g)$ sont obtenus en déterminant l'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentations irréductibles (σ, V) de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F/(p))$ pour lesquels le système g apparaît dans $S^D(U_0(\mathbf{n}); V)$ (voir Section 2 pour les notations). De façon analogue, on obtient $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_5} S^D[g]$ en énumérant tous les caractères de l'Iwahori χ en p pour lesquels le système g apparaît dans $S^D(U(\mathbf{n}, p), \chi; \overline{\mathbb{F}}_p)$. (À titre illustratif, nous avons donné deux exemples de tels systèmes dans la Table 1; le lecteur s'apercevra en regardant les poids que le premier n'est pas générique.)

Dans les Tables 2, 3 et 4, nous avons réparti selon le cardinal de $\mathcal{D}(\bar{\rho}_g)$ tous les systèmes

| $\Sigma = \{\mathfrak{p}_3\}, \mathbf{n} = (1)$ | | |
|---|-------------------------------|------------------------------|
| #Systèmes propres de Hecke | $ \mathcal{D}(\bar{\rho}_g) $ | $\dim_{\mathbb{F}_5} S^D[g]$ |
| 48 | 1 | 8 |
| 12 | 2 | 12 |

| $\Sigma = \{\mathfrak{p}_3\}, \mathbf{n} = (2)$ | | |
|---|-------------------------------|------------------------------|
| #Systèmes propres de Hecke | $ \mathcal{D}(\bar{\rho}_g) $ | $\dim_{\mathbb{F}_5} S^D[g]$ |
| 300 | 1 | 8 |
| 96 | 2 | 12 |

Table 2: $\dim_{\mathbb{F}_5} S^D[g]$ pour systèmes de valeurs propres de Hecke sur $\mathbb{Q}(\zeta_9)^+$ à coefficients dans \mathbb{F}_{5^3} .

| $\Sigma = \{\mathfrak{p}_7\}, \mathbf{n} = (2)$ | | |
|---|-------------------------------|------------------------------|
| #Systèmes propres de Hecke | $ \mathcal{D}(\bar{\rho}_g) $ | $\dim_{\mathbb{F}_5} S^D[g]$ |
| 292 | 1 | 8 |
| 48 | 2 | 12 |
| 12 | 4 | 18 |

Table 3: $\dim_{\mathbb{F}_5} S^D[g]$ pour systèmes de valeurs propres de Hecke sur $\mathbb{Q}(\zeta_7)^+$ à coefficients dans \mathbb{F}_{5^3} .

de valeurs propres qui satisfont à la condition

$$\sigma = \theta \otimes (r_0, \dots, r_{f-1}) \in \mathcal{D}(\bar{\rho}_g) \Rightarrow 0 \leq r_i \leq p - 2$$

(nécessaire pour la généralité de $\bar{\rho}_g$ en p). On observe que $\dim_{\mathbb{F}_5} S^D[g]$ est en accord avec la Conjecture 1.

2 Méthode de calcul des formes automorphes mod p sur F

Dans cette section, nous expliquons comment nous avons effectué les calculs pour les systèmes de valeurs propres de Hecke des formes automorphes algébriques mod p .

Nous conservons les mêmes notations que dans l'article. Ainsi D est un corps de quaternions sur F qui est ramifié en toutes les places à l'infini (et éventuellement en un ensemble fini de places finies Σ). Nous choisissons un ordre maximal \mathcal{O}_D dans D . Pour chaque place finie v de F , on désigne par F_v et \mathcal{O}_v les complétés de F et de \mathcal{O}_F en v

| $\Sigma = \emptyset, \mathbf{n} = (1)$ | | |
|--|-------------------------------|------------------------------|
| #Systèmes propres de Hecke | $ \mathcal{D}(\bar{\rho}_g) $ | $\dim_{\mathbb{F}_5} S^D[g]$ |
| 636 | 1 | 16 |
| 64 | 2 | 24 |
| 8 | 4 | 36 |

| $\Sigma = \emptyset, \mathbf{n} = (\mathfrak{p}_2)$ | | |
|---|-------------------------------|------------------------------|
| #Systèmes propres de Hecke | $ \mathcal{D}(\bar{\rho}_g) $ | $\dim_{\mathbb{F}_5} S^D[g]$ |
| 852 | 1 | 16 |
| 208 | 2 | 24 |
| 36 | 4 | 36 |

Table 4: $\dim_{\mathbb{F}_5} S^D[g]$ pour systèmes de valeurs propres de Hecke sur $\mathbb{Q}(\zeta_{16})^+$ à coefficients dans \mathbb{F}_{5^4} , (\mathfrak{p}_2 est le premier au-dessus de 2).

respectivement. On pose $D_v = D \otimes F_v$ et $\mathcal{O}_{D_v} = \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_v$; et pour chaque place finie $v \notin \Sigma$, on fixe un isomorphisme $\mathcal{O}_{D_v} \cong M_2(\mathcal{O}_v)$ que l'on étend à $D_v \cong M_2(F_v)$. Les adèles finis de D et \mathcal{O}_D sont notés par \hat{D} et $\hat{\mathcal{O}}_D$ respectivement; cela détermine un isomorphisme

$$\hat{\mathcal{O}}_D^\times \simeq \prod_{v \in \Sigma} \mathcal{O}_{D_v}^\times \times \prod_{v \notin \Sigma} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_v)$$

par lequel nous allons identifier ces deux groupes par la suite.

Nous fixons un idéal entier \mathbf{n} dans \mathcal{O}_F tel que $v \nmid \mathbf{n}$ pour tout $v \in \Sigma$ et nous définissons les sous groupes compacts ouverts de \hat{D}^\times suivants:

$$\begin{aligned} U_0(\mathbf{n}) &:= \left\{ \gamma \in \hat{\mathcal{O}}_D^\times : \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{\mathbf{n}} \right\} \\ U_1^1(p) &:= \left\{ \gamma \in \hat{\mathcal{O}}_D^\times : \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p} \right\} \\ U(\mathbf{n}, p) &:= U_0(\mathbf{n}) \cap U_1^1(p). \end{aligned}$$

Soit (σ, V) une \mathbb{F}_p -représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F/(p))$. Pour vérifier la Conjecture 1, nous avons besoin de calculer les espaces des formes automorphes algébriques

$$\begin{aligned} S^D(U(\mathbf{n}, p); \mathbb{F}_p) &:= \left\{ f : D^\times \backslash \hat{D}^\times / U(\mathbf{n}, p) \rightarrow \mathbb{F}_p \right\}, \text{ et} \\ S^D(U_0(\mathbf{n}); V) &:= \left\{ f : D^\times \backslash \hat{D}^\times / U_0(\mathbf{n}) \rightarrow V : f|u = f, \forall u \in \mathcal{O}_{D(p)}^\times \right\}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{O}_{D(p)}^\times$ agit par la surjection $\mathcal{O}_{D(p)}^\times \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F/(p))$ et où on pose $f|u(x) = f(xu)u^{-1}$. Pour ce faire nous allons les décomposer en sous-espaces plus facile à calculer.

Soit $\text{Cl}(\mathcal{O}_D)$ un ensemble de représentants de toutes les classes à droite de \mathcal{O}_D ; on rappelle qu'il existe alors une bijection naturelle entre $\text{Cl}(\mathcal{O}_D)$ et le double-quotient $D^\times \backslash \hat{D}^\times / \hat{\mathcal{O}}_D^\times$. Soit S un ensemble fini de premiers dans \mathcal{O}_F disjoint de Σ qui génère le groupe des classes étroites $\text{Cl}^+(F)$ et tel que, pour tout $\mathfrak{q} \in S$, on a $(\mathfrak{q}, \mathfrak{np}) = 1$. Par le théorème de l'approximation forte, on choisit les représentants $\mathfrak{a} \in \text{Cl}(\mathcal{O}_D)$ tels que le support de $\text{nr}(\mathfrak{a})$ est contenu dans S . (On désigne par $\text{nr} : D \rightarrow F$ la norme réduite.) Pour chaque $\mathfrak{a} \in \text{Cl}(\mathcal{O}_D)$, on désigne par $\mathcal{O}_{D,\mathfrak{a}}$ l'ordre (maximal) à gauche de \mathfrak{a} . Il existe alors des surjections $\hat{\mathcal{O}}_{D,\mathfrak{a}}^\times \rightarrow \text{GL}_2(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})$ dont les images dans $\text{GL}_2(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})$ sont conjuguées par lesquelles les $\hat{\mathcal{O}}_{D,\mathfrak{a}}^\times$ agissent de façon transitive et compatible sur $\mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})$.

L'espace des formes automorphes algébriques de niveau $U_0(\mathfrak{n})$ et de poids V sur l'ordre $\mathcal{O}_{D,\mathfrak{a}}$ est défini par

$$S^{D,\mathfrak{a}}(U_0(\mathfrak{n}); V) := \{f : \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}) \rightarrow V \mid f|_\gamma = f, \forall \gamma \in \mathcal{O}_{D,\mathfrak{a}}^\times\}.$$

Pour chaque $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \text{Cl}(\mathcal{O}_D)^2$ et chaque premier \mathfrak{p} dans \mathcal{O}_F , on pose

$$\Theta^{(S)}(\mathfrak{p}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) := \mathcal{O}_{D,\mathfrak{a}}^\times \backslash \left\{ u \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} : \frac{(\text{nr}(u))}{\text{nr}(\mathfrak{a})\text{nr}(\mathfrak{b})^{-1}} = \mathfrak{p} \right\},$$

où on laisse $\mathcal{O}_{D,\mathfrak{a}}^\times$ agir par multiplication à gauche. On définit l'application linéaire

$$\begin{aligned} T_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mathfrak{p}) : S^{D,\mathfrak{b}}(U_0(\mathfrak{n}); V) &\rightarrow S^{D,\mathfrak{a}}(U_0(\mathfrak{n}); V) \\ f &\mapsto \sum_{u \in \Theta^{(S)}(\mathfrak{p}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})} f|u. \end{aligned}$$

Par [1], on sait alors qu'il y a un isomorphisme de modules de Hecke

$$S^D(U_0(\mathfrak{n}); V) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{a} \in \text{Cl}(\mathcal{O}_D)} S^{D,\mathfrak{a}}(U_0(\mathfrak{n}); V),$$

où l'action de l'opérateur de Hecke $T(\mathfrak{p})$ à droite est donnée par la famille d'applications linéaires $(T_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mathfrak{p}))$ avec $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ parcourant $\text{Cl}(\mathcal{O}_D)^2$. On désigne par \mathbf{T}^D la $\overline{\mathbb{F}}_p$ -sous-algèbre de $\text{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(S^D(U_0(\mathfrak{n}); V))$ engendrée par les opérateurs $T(\mathfrak{p})$ pour tous les premiers \mathfrak{p} n'appartenant pas à $\Sigma \cup \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \mid \mathfrak{np}\}$. La décomposition ci-dessus et une adaptation de l'algorithme présenté dans [1] permettent de calculer plus facilement l'espace $S^D := S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)$ et son algèbre de Hecke \mathbf{T}^D .

Pour calculer le premier espace, posons $G := (\mathcal{O}_F/(p))^\times \times (\mathcal{O}_F/(p))^\times$, et définissons

$$\mathcal{H}_1(p) := \{(a, b) \in (\mathcal{O}_F/(p))^2 : ad + bc = 1 \text{ avec } c, d \in \mathcal{O}_F/(p)\}.$$

On rappelle que $\mathcal{H}_1(p) \simeq \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/(p)) \times (\mathcal{O}_F/(p))^\times$ et que $U_0(p)/U_1^1(p) \simeq G$. Le groupe $\hat{\mathcal{O}}_D^\times$ agit transitivement sur $\mathcal{H}_1(p) \times (\mathcal{O}_F/(p))^\times$ par

$$\gamma \cdot (x, u) := (\gamma_p x, \det(\gamma_p)u),$$

où γ_p est l'image de γ dans $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F/(p))$. Le stabilisateur de $((1, 0), 1)$ est $U_1^1(p)$. On en déduit les bijections

$$\hat{\mathcal{O}}_D^\times/U(\mathfrak{n}, p) \simeq \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/\mathfrak{np}) \times U_0(p)/U_1^1(p) \simeq \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/\mathfrak{np}) \times G.$$

On définit alors l'espace des formes automorphes algébriques sur l'ordre $\mathcal{O}_{D,\mathfrak{a}}$ de niveau $U(\mathfrak{n}, p)$ par

$$S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}}_p) := \{f : \mathcal{O}_{D,\mathfrak{a}}^\times \backslash \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/\mathfrak{np}) \times G \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p\}.$$

Il est alors facile de voir que

$$S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}}_p) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{a} \in \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_D)} S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}}_p),$$

comme modules de Hecke lorsqu'on définit l'action de $T(\mathfrak{p})$ à droite comme précédemment.

Maintenant, on observe que le groupe G agit sur $\mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/\mathfrak{np}) \times G$ par multiplication sur le second facteur. Cela induit une action sur $S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}}_p)$ que l'on peut donc décomposer suivant les caractères de G . Soit $\chi : G \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un tel caractère, c'est-à-dire un caractère de l'Iwahori en p . (On rappelle que cela équivaut à donner une paire de caractères $\eta, \eta' : (\mathcal{O}_F/(p))^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ dans le langage de l'article). On peut alors définir l'espace $S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p), \chi; \overline{\mathbb{F}}_p)$ des formes automorphes algébriques sur l'ordre $\mathcal{O}_{D,\mathfrak{a}}$ de niveau U et de caractère de l'Iwahori χ en p comme étant l'ensemble des fonctions $f \in S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}}_p)$ telles que

$$f(ux) = \chi(u)f(x), \text{ pour tous } x \in \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}) \times G \text{ et } u \in G.$$

Ainsi, on obtient que

$$S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}}_p) = \bigoplus_{\chi} S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p), \chi; \overline{\mathbb{F}}_p).$$

En définissant l'espace $S^D(U(\mathfrak{n}), \chi; \overline{\mathbb{F}}_p)$ des formes automorphes algébriques sur \hat{D}^\times de niveau $U(\mathfrak{n}, p)$ et de caractère de l'Iwahori χ en p par

$$S^D(U(\mathfrak{n}, p), \chi; \overline{\mathbb{F}}_p) := \bigoplus_{\mathfrak{a} \in \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_D)} S^{D,\mathfrak{a}}(U(\mathfrak{n}, p), \chi; \overline{\mathbb{F}}_p),$$

on obtient alors la décomposition

$$S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}}_p) = \bigoplus_{\chi} S^D(U(\mathfrak{n}, p), \chi; \overline{\mathbb{F}}_p).$$

Comme précédemment, cette décomposition permet de calculer plus facilement $S^D := S^D(U(\mathfrak{n}, p); \overline{\mathbb{F}}_p)$ et l'algèbre de Hecke \mathbf{T}^D correspondante (définie comme ci-dessus).

3 Espaces des formes anciennes et des formes nouvelles

Pour vérifier la Conjecture 1, nous avons besoin de calculer les espaces de formes nouvelles. Dans cette section, nous expliquons comment cela est effectué.

Soit $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{n}$ un idéal premier, et posons $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}\mathfrak{q}^{-1}$. Par le théorème de l'approximation faible, on choisit $u \in F$ tel que $v_{\mathfrak{q}}(u) = -1$ et $v_{\mathfrak{p}}(u) = 0$ pour $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Pour définir les applications de dégénérescence en \mathfrak{q} , l'on a besoin d'une traduction en termes globaux de leur description adélique (donnée par exemple dans [4]). Pour cela, rappelons que

$$\begin{aligned} X_0^D(\mathfrak{n}) &= D^\times \backslash \hat{D}^\times / U_0(\mathfrak{n}) \simeq \coprod_{\mathfrak{a} \in \text{Cl}(\mathcal{O}_D)} \mathcal{O}_{D,\mathfrak{a}}^\times \backslash \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}) \\ X_0^D(\mathfrak{m}) &= D^\times \backslash \hat{D}^\times / U_0(\mathfrak{m}) \simeq \coprod_{\mathfrak{a} \in \text{Cl}(\mathcal{O}_D)} \mathcal{O}_{D,\mathfrak{a}}^\times \backslash \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}). \end{aligned}$$

La surjection naturelle $\pi_1 : \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/\mathfrak{m})$ induit, de façon évidente, une application

$$\begin{aligned} X_0^D(\mathfrak{n}) &\rightarrow X_0^D(\mathfrak{m}) \\ x &\mapsto \pi_1(x). \end{aligned}$$

La première application de dégénérescence est tout simplement le pullback par π_1 ,

$$\alpha_1(\mathfrak{q}) : S^D(U_0(\mathfrak{m}); V) \rightarrow S^D(U_0(\mathfrak{n}); V).$$

Pour définir la seconde, soient $x \in \mathcal{O}_{D,\mathfrak{a}}^\times \backslash \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})$, et $(a, b) \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})^2$ un représentant de x . Une interprétation de la définition adélique de la seconde application de dégénérescence en termes globaux implique qu'il existe un unique $\mathfrak{b} \in \text{Cl}(\mathcal{O}_D)$ et un unique $\gamma \in \Theta^{(S)}(\mathfrak{p}; \mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ tels qu'en posant $(c, d) = \gamma \cdot (a, b)$ on a $\min\{v_{\mathfrak{q}}(c), v_{\mathfrak{q}}(d)\} = 1$. On désigne alors par y la classe de (cu, du) dans $\mathcal{O}_{D,\mathfrak{b}}^\times \backslash \mathbf{P}^1(\mathcal{O}_F/\mathfrak{m})$. Cela donne une autre application

$$\begin{aligned} \pi_2 : X_0^D(\mathfrak{n}) &\rightarrow X_0^D(\mathfrak{m}) \\ x &\mapsto y. \end{aligned}$$

La seconde application de dégénérescence est le pullback par π_2 ,

$$\alpha_2(\mathfrak{q}) : S^D(U_0(\mathfrak{m}); V) \rightarrow S^D(U_0(\mathfrak{n}); V).$$

La combinaison de ces deux applications donne

$$\begin{aligned} \iota_{\mathfrak{q}} : S^D(U_0(\mathfrak{m}); V)^2 &\rightarrow S^D(U_0(\mathfrak{n}); V) \\ (f_1, f_2) &\mapsto \alpha_1(\mathfrak{q})f_1 + \alpha_2(\mathfrak{q})f_2. \end{aligned}$$

On définit alors l'espace des formes anciennes par

$$S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\text{old}} := \sum_{\mathfrak{q}|\mathfrak{n}} \text{im}(\iota_{\mathfrak{q}}).$$

Pour des raisons pratiques, et comme nous ne disposons pas d'un produit scalaire en général, nous travaillons plutôt avec le dual de $S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)$ pour le calcul de l'espace des formes nouvelles. Soit

$$S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp} := \text{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(S^D(U_0(\mathfrak{n}); V), \overline{\mathbb{F}}_p),$$

muni de l'action naturelle à droite de \mathbf{T}^D définie par

$$(\varphi T)(f) = \varphi(f|T), \quad \varphi \in S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp}, \quad f \in S^D(U_0(\mathfrak{n}); V).$$

L'accouplement naturel

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp} \times S^D(U_0(\mathfrak{n}); V) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$$

défini par $\langle \varphi, f \rangle = \varphi(f)$ satisfait alors à l'identité $\langle \varphi T, f \rangle = \langle \varphi, f|T \rangle$. En se rappelant que $\mathbf{T}^D \subset \text{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(S^D(U_0(\mathfrak{n}); V))$, l'application transposée $T \mapsto T^t$ nous permet alors de voir $S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp}$ comme un \mathbf{T}^D -module à gauche. On obtient ainsi la transposée

$$\iota_{\mathfrak{q}}^t : S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp} \rightarrow S^D(U_0(\mathfrak{m}); V)^{\perp 2},$$

qui nous permet de définir

$$S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp \text{new}} := \bigcap_{\mathfrak{q}|\mathfrak{n}} \ker(\iota_{\mathfrak{q}}^t).$$

Comme nous nous intéressons seulement à la partie semi-simple de \mathbf{T}^D , le résultat suivant de Stein [3, Proposition 3.14] est encore valable.

Proposition 2. *Soit $M \subset S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\text{new}}$ un sous- \mathbf{T}^D -module irréductible et $I = \text{Ann}_{\mathbf{T}^D}(M)$. Alors, pour chaque \mathfrak{p} , le polynôme caractéristique de $T(\mathfrak{p})$ agissant sur $S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\perp}[I]$ est le même que celui de $T(\mathfrak{p})$ agissant sur M .*

Cette proposition nous permet de ramener le calcul de l'action de Hecke sur $S^D(U_0(\mathfrak{n}); V)^{\text{new}}$ à celle sur son dual, ce qui est plus facile en pratique.

References

- [1] L. Dembélé et S. Donnelly, Computing Hilbert modular forms over fields with non-trivial class group. Algorithmic number theory, 371–386, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, **5011**, Springer, Berlin, 2008.

- [2] L. Dembélé, F. Diamond and D. Roberts, Numerical evidences and examples for the Serre conjecture over totally real number fields, in preparation.
- [3] W. A. Stein, Explicit approaches to modular abelian varieties (UC Berkeley Ph.D. thesis), 2000. Available at:
<http://modular.math.washington.edu/papers/thesis>.
- [4] R. Taylor, On Galois representations associated to Hilbert modular forms. *Invent. Math.* **98** (1989), no. 2, 265–280.