# Die Additivität der Kodaira Dimension für projektive Faserräume über Varietäten des allgemeinen Typs

Von *Eckart Viehweg* in Mannheim*)

---

Wir betrachten in dieser Arbeit reguläre irreduzible projektive Varietäten über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und surjektive Morphismen zwischen solchen Varietäten mit zusammenhängenden Fasern. Letzteres bezeichnen wir kurz als Faserraum. Für weitere Bezeichnungen und Definitionen verweisen wir auf [7] oder [8]. Wie wir in [8] erläutert haben, ist das wichtigste offene Problem in der groben Klassifikationstheorie algebraischer Varietäten mit Irregularität $q \geqq 1$ die Beantwortung der folgenden Vermutung von S. Iitaka:

**Vermutung $C_{n,m}$.** *Es sei $f: V \to W$ ein Faserraum, $n = \dim(V)$ und $m = \dim(W)$ und $V_w$ die allgemeine Faser. Dann erfüllen die Kodaira Dimensionen (hoffentlich) die Ungleichung*

$$\kappa(V) \geqq \kappa(V_w) + \kappa(W).$$

In [8] hatten wir diese Vermutung mit dem folgenden Zusatz versehen:

**$C_{n,m}^+$.** *Ist $\kappa(V_w) \geqq 0$ und $\kappa(W) \geqq 0$, so ist (hoffentlich) $\kappa(V) \geqq \mathrm{Var}(f)$.*

Soweit mir bekannt ist, kann man zur Zeit die folgenden Fälle behandeln:

**Satz I** (siehe [8]). *$C_{3,1}$, $C_{3,1}^+$, $C_{n,n-1}$ und $C_{n,n-1}^+$ sind richtig.*

**Satz II** (Y. Kawamata [5]). *$C_{n,1}$ ist richtig für $n \leqq 4$. Darüber hinaus gilt $C_{n,1}$ falls $\kappa(W) = 1$ ist.*

Tatsächlich ergeben die Methoden von [5] mehr als Satz II, reichen jedoch nicht aus um $C_{n,1}$ für beliebiges $n$ und $W$ zu beweisen. In dieser Arbeit wollen wir die zweite Aussage von Satz II verallgemeinern:

**Satz III.** *$C_{n,m}$ ist richtig, falls $\kappa(W) = \dim(W) = m$ ist.*

---

*) Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft, z. Zt. Paris Sud, Orsay.

0075-4102/82/0330-0007$02.00

Dieser Satz wurde von Y. Kawamata in [4] unter der zusätzlichen Voraussetzung bewiesen, daß $\kappa(V) \geqq 0$ ist. Die von ihm entwickelten Methoden sind auch für den hier gegebenen Beweis von Satz III das wichtigste Hilfsmittel. Satz III ist nicht ausreichend, um die in [8] angegebene Klassifikationstabelle für dreidimensionale Varietäten auch im höherdimensionalen Fall zu erhalten. Dazu benötigte man $C_{n,m}$ auch in dem Fall, daß die Basis eine abelsche Varietät ist (alle anderen Faserräume, die durch die Albanese Abbildung gegeben werden, kann man auf Satz III und diesen Fall zurückführen). Vielleicht ist dabei die folgende Formulierung des Ergebnisses dieser Arbeit hilfreich:

**Satz IV.** *Es sei $f\colon V \to W$ ein Faserraum, $\mathscr{H}$ eine ample invertierbare Garbe auf $W$ und $\kappa(W) \geqq 0$. Dann ist*

$$\kappa(V, \omega_V^\beta \otimes f^*\mathscr{H}) \geqq \dim(W) + \kappa(V_w)$$

*für alle $\beta > 0$.*

Ich danke Y. Kawamata für seine konstruktive Kritik an der ersten Fassung des Manuskriptes.

**Bemerkung.** Einen Überblick über Methoden und Ergebnisse der Klassifikationstheorie findet man in: *Hélène Esnault*, Classification des variétés de dimension 3 et plus, Séminaire Bourbaki Exp. 568, Février 1981.

## § 1. Vorbereitungen

Wir wollen für einen Faserraum $f\colon V \to W$ die Differenz der dualisierenden Garben $\omega_{V/W} = \omega_V \otimes f^*\omega_W^{-1}$ untersuchen, bzw. $f_*\omega_{V/W}^k$ für genügend großes $k$. Da diese Garbe nicht notwendigerweise lokal frei ist, definieren wir:

**Definition 1. 1.** Es sei $W$ eine reguläre projektive Varietät und $\mathscr{F}$ eine torsionsfreie kohärente Garbe auf $W$. Es sei $\hat{W}$ die offene Untervarietät, über der $\mathscr{F}$ lokal frei ist und $i\colon \hat{W} \to W$ die Inklusion. Für jede positive Zahl $\nu$ sei $\hat{S}^\nu(\mathscr{F}) = i_* S^\nu(i^*\mathscr{F})$, wobei $S^\nu$ das symmetrische Produkt bezeichnet.

**Definition 1. 2.** Es sei $W$ eine reguläre projektive Varietät und $\mathscr{F}$ eine torsionfreie kohärente Garbe auf $W$. Wir nennen $\mathscr{F}$ *schwach positiv*, wenn eine offene Untervarietät $U$ von $W$ existiert, so daß für jede ample invertierbare Garbe $\mathscr{H}$ auf $W$ und jede positive ganze Zahl $\mu$ eine positive ganze Zahl $\nu$ existiert, so daß $\hat{S}^{\nu\cdot\mu}(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{H}^\nu$ über $U$ von globalen Schnitten erzeugt wird. Das heißt, daß die natürliche Abbildung

$$H^0(\hat{S}^{\nu\cdot\mu}(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{H}^\nu) \otimes_{\mathbb{C}} O_W \to \hat{S}^{\nu\cdot\mu}(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{H}^\nu$$

über $U$ surjektiv ist. Legt man Wert auf die explizite Angabe einer solchen Untervarietät $U$, so sagt man: $F$ ist *schwach positiv über $U$.*

**Satz V.** *Es sei $f\colon V \to W$ ein Faserraum. Dann ist für alle $k > 0$ die Garbe $f_*\omega_{V/W}^k$ schwach positiv.*

**Bemerkung.** Als offene Menge $U$, über der die Garbe $f_* \omega^k_{V/W}$ schwach positiv ist, kann man die Untervarietät von $W$ wählen, über der $f$ glatt ist. Verfolgt man die nötigen Konstruktionen sorgfältig genug, so sieht man, daß man sogar ein $U$ wählen kann, welches außerhalb einer abgeschlossenen Untervarietät der Codimension 2 übereinstimmt mit

$$\{x \in W;\ \dim(f^{-1}(x)) = n - m \quad \textit{und} \quad f^{-1}(x) \ \textit{semistabil}\}.$$

Da wir jedoch keine Anwendung dafür sehen, gehen wir darauf nicht näher ein.

Bevor wir mit dem Beweis des Satzes beginnen, zeigen wir:

**(1. 3).** *Aus Satz V folgen die Sätze III und IV.*

Es sei $f\colon V \to W$ der gegebene Faserraum.

**Behauptung 1. 4.** Es existiert eine Sequenz von Aufblasungen mit nicht singulären Zentren (oder wie wir kurz sagen: eine Aufblasung) $\tau\colon W' \to W$ und eine Aufblasung $\tau'\colon V' \to V$ und ein Faserraum $f'\colon V' \to W'$, so daß jeder positive Divisor $B$ von $V'$ mit $\operatorname{codim}(f'(B)) \geqq 2$ im exzeptionellen Ort von $\tau'$ liegt.

*Beweis.* Nach [6] existiert eine Aufblasung $W'$ und eine Komponente $Z$ von $V \times_W W'$, die birational zu $V$ und equidimensional über $W'$ ist. Wählt man für $V'$ eine Desingularisierung von $Z$, so daß $V' \to V$ eine Aufblasung ist, sind die geforderten Bedingungen erfüllt.

**Behauptung 1. 5.** Zum Beweis von Satz III (bzw. Satz IV) genügt es zu zeigen, daß für einen positiven Divisor $B$ mit $\operatorname{codim}(f'(B)) \geqq 2$ gilt:

$$\kappa(V', \omega_{V'} \otimes \mathcal{O}_{V'}(B)) \geqq \kappa(V'_w) + \kappa(W')$$

(bzw.

$$\kappa(V', \omega^{\beta'}_{V'} \otimes \mathcal{O}_{V'}(B) \otimes f'^* \mathscr{H}') \geqq \dim(W') + \kappa(V'_w)$$

für jede ample Garbe $\mathscr{H}'$ auf $W'$, jedes $\beta' > 0$ und einen von $\beta'$ abhängenden Divisor $B$).

*Beweis.* Sind $E_1, \ldots, E_\varrho$ die exzeptionellen Divisoren von $\tau$ und $\mathscr{H}$ eine ample invertierbare Garbe auf $W$, so existieren positive Zahlen $\eta$ und $n_1, \ldots, n_\varrho$, so daß

$$\mathscr{H}' = \tau^* \mathscr{H}^\eta \otimes \mathcal{O}_{W'}\left(-\sum_{i=1}^{\varrho} n_i E_i\right)$$

ampel ist (siehe [3], II 7. 10). Wählen wir im ersten Fall $\beta' = 1$ und $\mathscr{H}'' = \mathcal{O}_V$ und im zweiten Fall $\beta' = \eta \cdot \beta$ und $\mathscr{H}'' = f^* \mathscr{H}^\eta$, so genügt es zu zeigen, daß

$$\kappa(V', \omega^{\beta'}_{V'} \otimes \mathcal{O}_{V'}(B) \otimes \tau^* \mathscr{H}'') = \kappa(V, \omega^{\beta}_V \otimes \mathscr{H}'')$$

ist. Dies folgt aber aus [8], Folgerung A 3, iii).

Betrachten wir wieder einen beliebigen Faserraum $f\colon V \to W$ und benutzen wir die Bezeichnungen aus (1. 1). Im allgemeinen ist $\hat{S}^1(f_* \omega^k_{V/W}) = i_* i^* f_* \omega^k_{V/W}$ größer als $f_* \omega^k_{V/W}$. Jedoch kann man für jedes $k$ einen Divisor $B_k$ finden mit $f(B_k) \cap \hat{W} = \emptyset$, so daß $\hat{S}^1(f_* \omega^k_{V/W}) = f_*(\omega^k_{V/W} \otimes \mathcal{O}_V(B_k))$ ist. Bezeichnen wir $\bar{\omega}^k_{V/W} = \omega^k_{V/W} \otimes \mathcal{O}_V(B_k)$. Es sei $l > 0$ so gewählt, daß $f_* \omega^{2l}_{V/W} \neq 0$ ist, und $H$ ein ampler Divisor auf $W$. Wegen Satz V existiert ein $\nu > 0$, so daß $\hat{S}^\nu(f_* \omega^{2l}_{V/W}) \otimes \mathcal{O}_W(H)^\nu$ über einer offenen Menge von globalen Schnitten erzeugt wird. Die natürliche Abbildung in $f_* \bar{\omega}^{2l\nu}_{V/W} \otimes \mathcal{O}_W(H)^\nu$ ist nicht null, und damit hat letztere Garbe einen Schnitt. Man erhält eine Inklusion

$$f^* \mathcal{O}_W(H)^\nu \to \bar{\omega}^{2l\nu}_{V/W} \otimes f^* \mathcal{O}_W(H)^{2\nu}.$$

Ist $\nu$ genügend groß, so definieren die Schnitte von $\bar{\omega}^{2l\nu}_{V/W} \otimes f^* O_W(H)^{2\nu}$ bzw. $f^* O_W(H)^\nu$ und $O_W(H)^\nu$ rationale Abbildungen $\Phi_1$ bzw. $\Phi_2$ und eine Inklusion $\Phi_3$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\Phi_2"] & \mathbb{P}_1 \arrow[d, "p"] \\ W \arrow[r, "\Phi_3"'] & \mathbb{P}_2 \end{tikzcd}$$

für geeignete projektive Räume $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$. Es sei $a$ ein allgemeiner Punkt von $\Phi_1(V)$. Wegen des Satzes von Iitaka (siehe [7], S. 58) können wir annehmen, daß $\kappa(\Phi_1^{-1}(a))=0$ ist. Also ist

$$\kappa(V_w) \leqq \dim(\Phi_1(V_w)) = \dim(\Phi_1(V)) - \dim(W) = \kappa(\bar{\omega}^{2l\nu}_{V/W} \otimes f^* O_W(H)^{2\nu}) - \dim(W).$$

Ist nun $\kappa(W) \geqq 0$ und $\kappa(V_w) \geqq 0$ und $\beta$ eine positive ganze Zahl, so wählen wir $l$, so daß $\beta | l$ und $H^0(W, \omega_W^l) \neq 0$ ist. Damit folgt Satz IV.

Ist $\kappa(W) = \dim(W) = m$, so benutzen wir das folgende Argument, welches auf Kodaira zurückgeht (siehe [4]). Für genügend großes $l$ und eine positive Zahl $a$ ist $\dim_C(H^0(W, \omega_W^l)) \geqq a \cdot l^m$. Andererseits ist für den amplen Divisor $H$

$$\dim_C(H^0(H, \omega_W^l|_H)) \leqq b \cdot l^{m-1}$$

für ein geeignetes $b$. Also gibt uns die exakte Sequenz

$$0 \to H^0(W, \omega_W^l \otimes O_W(-H)) \to H^0(W, \omega_W^l) \to H^0(H, \omega_W^l|_H)$$

für genügend großes $l$ die Inklusion $O_W(H) \to \omega_W^l$ und damit Satz III.

**Lemma 1.6.** *Es sei $\tau\colon W' \to W$ eine Aufblasung, $U$ eine offene Untervarietät, über der $\tau$ ein Isomorphismus ist, $E'$ ein Divisor mit Träger im exzeptionellen Ort von $\tau$ und $\mathscr{F}'' \to \mathscr{F}' \otimes O_{W'}(E')$ eine Inklusion torsionsfreier Garben, isomorph über $U$. Ist $\mathscr{F}''$ schwach positiv über $U$, so ist auch $\tau_*\mathscr{F}'$ schwach positiv über $\tau(U)$.*

*Beweis.* Wie in 1.5 existiert ein $\eta > 0$ und ein positiver Divisor $E$ mit Träger im exzeptionellen Ort von $\tau$, so daß $\mathscr{H}' = \tau^*\mathscr{H}^\eta \otimes O_{W'}(-E)$ ampel ist. Also wird für ein genügend großes $\nu$ die Garbe $\hat{S}^{\nu \cdot \mu \cdot \eta}(\mathscr{F}'') \otimes \mathscr{H}'^\nu$ und damit auch

$$\hat{S}^{\nu \cdot \mu \cdot \eta}(\mathscr{F}' \otimes O_{W'}(E')) \otimes \tau^* \mathscr{H}^{\nu \cdot \eta}$$

über $U$ von globalen Schnitten erzeugt. Da $\tau_* \hat{S}^{\nu \cdot \mu \cdot \eta}(\mathscr{F}' \otimes O_{W'}(E'))$ und $\hat{S}^{\nu \cdot \mu \cdot \eta}(\tau_* \mathscr{F}')$ außerhalb einer Untervarietät von Codimension zwei übereinstimmen, folgt die Behauptung.

**Lemma 1.7.** *Es sei $\tau\colon W' \to W$ eine endliche Überlagerung regulärer projektiver Varietäten und $\mathscr{F}$ eine torsionsfreie kohärente Garbe. Ist $\tau^*\mathscr{F}$ schwach positiv über $\tau^{-1}(U)$, so ist $\mathscr{F}$ schwach positiv über $U$.*

*Beweis.* $\tau$ ist affin und flach. Für jede kohärente Garbe $\mathscr{F}$ auf $W$ ist also $\tau_* \tau^*(\mathscr{F}) = \mathscr{F} \otimes \tau_* O_{W'}$. Um dieses einzusehen, wendet man die exakten Funktoren $\tau_* \tau^*$ und $\otimes \tau_* O_{W'}$ auf eine lokal freie Auflösung von $\mathscr{F}$ an und benutzt die Projektionsformel für lokal freie Garben. Insbesondere erhält man eine surjektive Abbildung $\tau_* \tau^*(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}$. Nun sei $\mathscr{H}$ eine ample Garbe auf $W$. Wähle $\eta$, so daß $\tau_* O_{W'} \otimes \mathscr{H}^\nu$ für $\nu \geqq \eta$ von globalen Schnitten erzeugt wird. Wähle $\nu \geqq \eta$, so daß

$$\bigoplus O_{W'} \to \hat{S}^{2\nu \cdot \mu}(\tau^* \mathscr{F}) \otimes \tau^* \mathscr{H}^\nu$$

surjektiv ist über $\tau^{-1}(U)$. Dann ist

$$\bigoplus \tau_* O_{W'} \otimes \mathscr{H}^\nu \to \tau_* \hat{S}^{2\nu \cdot \mu}(\tau^* \mathscr{F}) \otimes \mathscr{H}^{2\nu} \to \hat{S}^{2\nu \cdot \mu}(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{H}^{2\nu}$$

surjektiv über $U$.

**Lemma 1.8.** *Es sei $f: V \to W$ ein surjektiver Morphismus zwischen regulären Varietäten, $\tau': V' \to V$ und $\tau: W' \to W$ Aufblasungen, so daß $f' = \tau^{-1} \cdot f \cdot \tau'$ ein Morphismus ist. Ist $f'_* \omega^k_{V'/W'}$ schwach positiv, so auch $f_* \omega^k_{V/W}$.*

*Beweis.* Man kann annehmen, daß $V' = V$ ist. Dann ist

$$f'_* \omega^k_{V'/W'} = f'_* \omega^k_{V/W} \otimes \omega^{-k}_{W'/W}$$

eine Untergarbe von $f'_* \omega^k_{V/W}$, und die Behauptung folgt aus 1.6.

**Lemma 1.9.** *Es sei $\tau: W' \to W$ eine endliche Überlagerung und $f: V \to W$ ein surjektiver Morphismus. $W$, $W'$ und $V$ seien regulär, $V'$ eine Desingularisierung von $V \times_W W'$ und $f': V' \to W'$ der induzierte Morphismus.*

i) *Für jedes $k > 0$ ist $f'_* \omega^k_{V'/W'}$ eine Untergarbe von $\tau^* f_* \omega^k_{V/W}$, isomorph über einer offenen Untervarietät.*

ii) *Ist $f'_* \omega^k_{V'/W'}$ schwach positiv, so auch $f_* \omega^k_{V/W}$.*

*Beweis.* Offensichtlich folgt ii) aus i) und 1.7. Zum Beweis von i) genügt es, da die allgemeinen Fasern von $f$ und $f'$ dieselben sind, die Inklusion der beiden Garben zu konstruieren. Dazu betrachten wir

$$\begin{array}{ccccccc}
V' & \xrightarrow{d} & V_1 & \xrightarrow{\sigma} & V_2 & \xrightarrow{\tau_2} & V \\
\downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
W' & \xrightarrow{id} & W' & \xrightarrow{id} & W' & \xrightarrow{\tau} & W
\end{array}$$

wobei $V_2 = V \times_W W'$ ist, $V_1$ die Normalisierung, $\tau_1 = \tau_2 \cdot \sigma$ und $\tau' = \tau_1 \cdot d$. Da die Aussage mit Aufblasen von $V$ und $V'$ verträglich ist, dürfen wir wie in [8], A 10 annehmen, daß $V_1$ nur rationale Singularitäten hat. Insbesondere ist dann für jeden positiven Divisor $E$ mit Träger im exzeptionellen Ort $d_* \omega_{V'/W'} \otimes O_{V'}(E) = \omega_{V_1/W'}$ (siehe [8], A 3, iii). Da $\tau$ flach ist, ist $f_2^* \omega_{W'/W} = \omega_{V_2/V}$, und daher $\omega_{V_2/W'} = \tau_2^* \omega_{V/W}$. Nach [8], A 1, v) ist $\sigma_* \omega_{V_1/W'} = \mathscr{H}om_{V_2}(\sigma_* O_{V_1}, \omega_{V_2/W'})$ und damit eine Untergarbe von $\tau_2^* \omega_{V/W}$. Da $\sigma$ affin ist, hat $\sigma^* \sigma_* \omega_{V_1/W'}$ die Garbe $\omega_{V_1/W'}$ als Quotient, und der Morphismus $\sigma^* \sigma_* \omega_{V_1/W'} \to \tau_1^* \omega_{V/W}$ faktorisiert über die Inklusion

$$d_* \omega_{V'/W'} \otimes O_{V'}(E) = \omega_{V_1/W'} \to \tau_1^* \omega_{V/W}.$$

Die natürliche Abbildung $d^* \omega^{k-1}_{V_1/W'} \to \omega^{k-1}_{V'/W'}$ ist außerhalb des exzeptionellen Ortes von $d$ ein Isomorphismus, und für einen genügend großen Divisor $E$ erhält man die Inklusion invertierbarer Garben $\omega^{k-1}_{V'/W'} \to \tau'^* \omega^{k-1}_{V/W} \otimes O_{V'}(E)$. Da beide Garben invertierbar sind, ergibt die Anwendung von $f'_*(\cdots \otimes \omega_{V'/W'})$ die Inklusionen

$$\begin{aligned} f'_* \omega^k_{V'/W'} &\to f_{1*}(\tau_1^* \omega^{k-1}_{V/W} \otimes d_*(\omega_{V'/W'} \otimes O_{V'}(E))) \to \\ &\to f_{2*}(\tau_2^* \omega^{k-1}_{V/W} \otimes \sigma_* \omega_{V_1/W'}) \to f_{2*} \tau_2^* \omega^k_{V/W}. \end{aligned}$$

Da $\tau$ flach ist, ist letztere Garbe isomorph zu $\tau^* f_* \omega^k_{V/W}$.

Das wichtigste Beispiel für schwach positive Garben sind die pseudo-semipositiven Garben, die von T. Fujita in [2] (siehe auch [4]) eingeführt wurden:

**Definition und Lemma 1. 10.** Es sei $\mathscr{E}$ eine lokalfreie Garbe auf einer regulären Varietät $W$. Man nennt $\mathscr{E}$ *pseudo-semi-positiv*, wenn die folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt sind:

a) *Für jede reguläre Kurve $C$, jeden Morphismus $j: C \to W$ und für jede invertierbare Quotientengarbe $\mathscr{L}$ von $j^*\mathscr{E}$ gilt:* $\mathrm{grad}_C(\mathscr{L}) \geqq 0$.

b) *Es sei $p: \mathbb{P}(\mathscr{E}) = \mathbb{P} \to W$. Dann ist $O_{\mathbb{P}}(\mu) \otimes p^*\mathscr{H}$ ampel für jedes $\mu > 0$ und jede ample Garbe $\mathscr{H}$ auf $W$.*

c) *$\mathscr{E}$ ist schwach positiv über $W$.*

*Beweis.* Ist a) erfüllt, so ist $O_{\mathbb{P}}(1)$ und damit auch $O_{\mathbb{P}}(\mu)$ numerisch positiv. Aus dem Kriterium von Seshadri folgt b).

Ist b) richtig, so wird $O_{\mathbb{P}}(\mu\nu) \otimes p^*\mathscr{H}^\nu$ für ein $\nu > 0$ von globalen Schnitten erzeugt und daher auch $S^{\mu\nu}(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{H}^\nu$.

Nehmen wir an, daß c) gegeben ist und a) falsch ist. Dann existiert eine Kurve $C$ und $j$ und $\mathscr{L}$ mit $\mathrm{grad}_C(\mathscr{L}) \leqq -1$. Dann hat $j^* S^{\mu\cdot\nu}(\mathscr{E})$ die Quotientengarbe $\mathscr{L}^{\mu\cdot\nu}$. Ist $\mathscr{H}$ auf $W$ vorgegeben, so können wir $\mu$ so groß wählen, daß $\mathrm{grad}_C(j^*\mathscr{H}^{-\nu}) > \mathrm{grad}_C(\mathscr{L}^{\mu\cdot\nu})$ ist. Dann kann aber $j^* S^{\mu\cdot\nu}(\mathscr{E}) \otimes j^*\mathscr{H}^\nu$ nicht von globalen Schnitten erzeugt sein.

## § 2. Der Fall $k=1$

In diesem § 2 fassen wir im wesentlichen die Ergebnisse aus [4] zusammen und interpretieren sie in der in § 1 entwickelten Sprache.

**Lemma 2. 1** (Kawamata, [4]). *Es sei $W$ eine reguläre projektive Varietät, $D$ ein reduzierter Divisor mit regulären Komponenten $D_i$, $i=1,\dots,r$, die sich transversal schneiden und $m_i$ für $i=1,\dots,r$ positive ganze Zahlen. Dann existiert eine endliche Überlagerung regulärer Varietäten $\tau: W' \to W$, so daß:*

a) *$D'_i = \tau^*(D_i)_{\mathrm{red}}$ sind für $i=1,\dots,r$ reguläre und irreduzible Divisoren, die sich transversal schneiden.*

b) *$\tau^* D_i = m_i \cdot D'_i$, das heißt: $D_i$ verzweigt mit der Ordnung $m_i$.*

c) *Ist $Y$ eine reguläre Untervarietät der Dimension größer oder gleich* 1, *so daß $Y$ alle Durchschnitte $D_{i_1} \cap D_{i_2} \cap \cdots \cap D_{i_s}$ transversal schneidet, so ist $\tau^{-1}(Y)$ regulär und irreduzibel und schneidet alle Durchschnitte $D'_{i_1} \cap \cdots \cap D'_{i_s}$ transversal.*

**Bemerkung.** Mit Hilfe dieses Lemmas kann man den Schwierigkeiten, die man in [8], §2 und Anhang, mit Singularitäten in der Basis der betrachteten Faserräume hat, aus dem Wege gehen. In der hier gegebenen Form besagt das Lemma mehr als in [4], die Konstruktion, die wir skizzieren werden, ist jedoch dieselbe. Einen anderen Beweis erhält man mit den Argumenten aus [1], Lemma 2. 1.

**(2. 2). Wurzelziehen aus Schnitten einer Garbe** (siehe [8], A.8). Es sei $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe auf $W$ und $s \in H^0(W, \mathscr{L}^\mu)$ ein Schnitt mit Nullstellenmenge $D$. Der Schnitt $s$ gibt dem Modul $\mathscr{A} = \bigoplus_{j=0}^{\mu-1} \mathscr{L}^{-j}$ eine Struktur als $O_W$-Algebra.

Es sei $X = \mathbf{Spec}(\mathscr{A})$ und $p: X \to W$ die induzierte Abbildung. $X$ ist regulär über allen regulären Punkten von $D$ und normal über den reduzierten Komponenten von $D$. $p$ ist étale außerhalb von $D$. Ist $p': X' \to W$ die Normalisierung von $X$, so ist $p'_* \omega_{X'}$ enthalten in

$$p_* \omega_X = \omega_W \otimes \left( \bigoplus_{j=1}^{\mu-1} \mathscr{L}^j \right).$$

Wir sagen kurz: *$X'$ entsteht durch Ziehen der $\mu$-ten Wurzel aus $D$.*

*Beweis von* 2. 1. Da $W'$ und $D'_i$ wieder dieselben Voraussetzungen erfüllt wie $W$ und $D_i$, dürfen wir annehmen, daß $m_1 = m$ und $m_i = 1$ ist für $i = 2, \ldots, r$.

Nun sei $\mathscr{H}$ eine ample Garbe, so daß $\mathscr{H}^m \otimes O_W(-D_1)$ sehr ampel ist und $H_l$ für $l = 1, \ldots, \dim(W)$ zugehörige Divisoren in allgemeiner Lage. Es sei $p_1: X_1 \to W$ die Varietät, die durch Ziehen der $m$-ten Wurzel aus $H_1 + D_1$ entsteht, $p_2: X_2 \to X_1$ die Varietät, die durch Ziehen der $m$-ten Wurzel aus $p_1^*(H_2 + D_1)$ entsteht, etc.

Es sei $W' = X_{\dim(W)}$ und $\tau = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{\dim(W)}$.

Ist $x \in W'$, so daß $\tau(x) \in D_1$ ist, so können wir in $\tau(x)$ ein Parametersystem

$$\langle T_1, \ldots, T_{d_1}, U_1, \ldots, U_{d_2}, X_1, \ldots, X_{d_3}, Z_1, \ldots, Z_{d_4} \rangle$$

wählen mit der Eigenschaft, daß (nach Umnumerieren) $H_l$ durch $T_l = 0$ $(l = 1, \ldots, d_1)$, $D_i$ durch $U_i = 0$ $(i = 1, \ldots, d_2)$ und $Y$ durch $X_1 = X_2 = \cdots = X_{d_3} = 0$ definiert wird. Es ist $d_1 < \dim(W)$.

Nach eventueller Multiplikation der Parameter mit Einheiten aus $O_{\tau(x),W}$ ist $O_{x,W'}$ die Normalisierung von

$$O_{\tau(x),W}[\sqrt[m]{T_l \cdot U_1},\ l = 1, \ldots, d_1,\ \sqrt[m]{U_1},\ \sqrt[m]{e_j \cdot U_1},\ j = 2, \ldots, (\dim(W) - d_1)]$$

für Einheiten $e_j$ aus $O_{x,W'}$. Also bildet

$$\langle \sqrt[m]{T_1}, \ldots, \sqrt[m]{T_{d_1}}, \sqrt[m]{U_1}, U_2, \ldots, U_{d_2}, X_1, \ldots, X_{d_3}, Z_1, \ldots, Z_{d_4} \rangle$$

ein lokales Parametersystem von $x$ in $W'$. Aus dieser Beschreibung kann man die Behauptungen direkt ablesen (entsprechend für $\tau(x) \notin D_1$), bis auf die Irreduzibilität von $\tau^{-1}(Y)$ und $D'_i$.

Es ist $W'$ eine abelsche galoissche Überlagerung von $W$ mit der Galoisgruppe $G = \bigoplus_{l=1}^{\dim(W)} I(H_l)$. Dabei ist $I(H_l)$ die Verzweigungsgruppe der Komponenten von $\tau^{-1}(H_l)$.

Nun sei $Y'$ eine Komponente von $\tau^{-1}(Y)$. Da $Y \cap H_l \neq \emptyset$ ist, schneidet $Y'$ eine Komponente von $\tau^{-1}(H_l)$ und $I(H_l)$ hat Fixpunkte auf $Y'$. Da aber $\tau^{-1}(Y)$ regulär ist, muß $I(H_l)$ die Komponente $Y'$ in sich überführen für $l = 1, \ldots, \dim(W)$. Da $G$ transitiv auf den Komponenten von $\tau^{-1}(Y)$ operiert, ist dies nur möglich, falls $Y' = \tau^{-1}(Y)$ ist. Dasselbe Argument zeigt die Irreduzibilität der $D_i'$.

Das Hauptergebnis aus [4] (Theorem 5) ist die folgende Verallgemeinerung der Ergebnisse von T. Fujita ([2]):

**(2. 3) Kawamatas Hauptsatz.** *Es sei $f: V \to W$ ein Faserraum mit folgenden Eigenschaften:*

i) *Es existiert eine offene Untervarietät $W_0$ in $W$, so daß $D = W - W_0$ ein Divisor mit regulären Komponenten und transversalen Schnitten ist.*

ii) *Es sei $V_0 = f^{-1}(W_0)$ und $f_0 = f|_{V_0}$. Dann ist $f_0$ glatt.*

iii) *Die lokalen Monodromien von $R^{n-m} f_{0*} \mathbb{C}_{V_0}$ um die Komponenten von $D$ sind unipotent.*

*Dann ist $f_* \omega_{V/W}$ lokal frei und pseudo-semi-positiv.*

Wie in [4] kann man durch Aufblasen der Basis immer erreichen, daß die Bedingungen i) und ii) erfüllt sind. Danach kann man mit Hilfe von 2. 1 eine reguläre Überlagerung konstruieren, so daß auch iii) erfüllt ist. Wegen 1. 8 und 1. 9 sind diese Konstruktionen zulässig und aus 1. 10 folgt:

**Folgerung 2. 4.** *Satz V ist richtig für $k = 1$.*

## § 3. Der Fall $k > 1$

**Lemma 3. 1.** *Es sei $f: V \to W$ ein Faserraum, $\nu > 0$ und $\mathscr{H}$ eine invertierbare Garbe auf $W$, so daß $\hat{S}^\nu(f_* \omega_{V/W}^k \otimes \mathscr{H}^k)$ über einer offenen Untervarietät $U$ von globalen Schnitten erzeugt wird. Dann ist $f_* \omega_{V/W}^k \otimes \mathscr{H}^{k-1}$ schwach positiv.*

Bevor wir 3. 1 beweisen, zeigen wir:

(3. 2). *Beweis von Satz V.* Es sei $\mathscr{H}$ eine beliebige ample invertierbare Garbe auf $W$ und

$$r = \mathrm{Min}\,\{s \in \mathbb{N};\ f_* \omega_{V/W}^k \otimes \mathscr{H}^{sk-1} \text{ schwach positiv}\}.$$

Für genügend großes $\nu$ wird $\hat{S}^\nu(f_* \omega_{V/W}^k) \otimes \mathscr{H}^{rk\nu-\nu} \otimes \mathscr{H}^\nu$ über einer offenen Menge $U$ von globalen Schnitten erzeugt. Also ist nach 3. 1 die Garbe $f_* \omega_{V/W}^k \otimes \mathscr{H}^{rk-r}$ schwach positiv. Nach Wahl von $r$ ist $f_* \omega_{V/W}^k \otimes \mathscr{H}^{(r-1)k-1}$ nicht schwach positiv. Dies ist nur möglich, falls $(r-1)k - 1 < rk - r$ ist oder $r \leq k$. Also ist für jeden Faserraum $f$ und jede ample invertierbare Garbe $\mathscr{H}$ die Garbe $f_* \omega_{V/W}^k \otimes \mathscr{H}^{k^2-k}$ schwach positiv. Wir behaupten, daß dies nur möglich ist, falls $f_* \omega_{V/W}^k$ bereits schwach positiv ist.

Sei also $\mathscr{H}$ eine ample invertierbare Garbe und $\mu>0$. Nach [1], § 2 oder mit 2.1 kann man eine Überlagerung $\tau\colon W'\to W$ konstruieren, so daß $\tau^*\mathscr{H}=\mathscr{H}'^d$ ist für $d=(k^2-k)\cdot 2\mu+1$. Es sei $V'$ eine Desingularisierung von $V\times_W W'$ und $f'\colon V'\to W'$ der induzierte Faserraum. Nach 1.9 ist $f'_*\omega^k_{V'/W'}$ eine Untergarbe von $\tau^*f_*\omega^k_{V/W}$, und nach obiger Überlegung ist $\tau^*f_*\omega^k_{V/W}\otimes\mathscr{H}'^{k^2-k}$ ebenfalls schwach positiv. Für genügend großes $\nu$ ist also

$$\hat{S}^{2\nu\mu}(\tau^*f_*\omega^k_{V/W}\otimes\mathscr{H}'^{k^2-k})\otimes\mathscr{H}'^{\nu}=\tau^*\hat{S}^{2\nu\mu}(f_*\omega^k_{V/W})\otimes\tau^*\mathscr{H}^{\nu}$$

über einer offenen Untervarietät von globalen Schnitten erzeugt. Wählt man $\nu$ so groß, daß $\tau_*O_{W'}\otimes\mathscr{H}^{\nu}$ von globalen Schnitten erzeugt wird, so erhält man wie in 1.7, daß $\hat{S}^{2\nu\mu}(f_*\omega^k_{V/W})\otimes\mathscr{H}^{2\nu}$ von globalen Schnitten über einer offenen Menge erzeugt wird.

*Beweis von* 3.1. Voraussetzung und Aussage von 3.1 sind mit Aufblasen von $V$ verträglich. Wir dürfen daher annehmen, daß gilt:

(3.3). Über einer offenen Untervarietät $U'$ von $U$ ist

$$\mathscr{M}^{(k)}=\text{Bild}\;(\;)\;(f^*f_*\omega^k_{V/W}\to\omega^k_{V/W})$$

invertierbar und $\omega^k_{V/W}\otimes\mathscr{M}^{(k)-1}=O_V(E)$ für einen Divisor $E$ mit regulären Komponenten und transversalen Schnitten.

Nun sei $B$ ein positiver Divisor in $V$, so gewählt, daß $\operatorname{codim}(f(B))\geqq 2$ ist und für $\bar{\omega}=\omega_{V/W}\otimes O_V(B)$ die Abbildung $\hat{S}^{\nu}(f_*\omega^k_{V/W}\otimes\mathscr{H}^k)\to f_*\bar{\omega}^{k\cdot\nu}\otimes\mathscr{H}^{k\cdot\nu}$ definiert ist. Es sei $\mathscr{M}^{(k\cdot\nu)}\otimes f^*\mathscr{H}^{k\cdot\nu}$ die Untergarbe von $\bar{\omega}^{k\cdot\nu}\otimes f^*\mathscr{H}^{k\cdot\nu}$, die von globalen Schnitten von $\hat{S}^{\nu}(f_*\omega^k_{V/W}\otimes\mathscr{H}^k)$ erzeugt wird. Nach Aufblasen von $V$ dürfen wir annehmen, daß $\mathscr{M}^{(k\cdot\nu)}$ invertierbar ist, und daß für einen Divisor $\sum_{i=1}^r\mu_iF_i$ mit regulären Komponenten und transversalen Schnitten $\mathscr{M}^{(k\cdot\nu)}\otimes O_V\left(\sum_{i=1}^r\mu_iF_i\right)=\bar{\omega}^{k\cdot\nu}$ ist.

Es sei $m_i=k\cdot\nu\cdot\operatorname{ggT}(\mu_i,k\cdot\nu)^{-1}$ für $i=1,\dots,r$. Wendet man 2.1 auf $V$ und den Divisor $\sum_{i=1}^r F_i$ an, so erhält man eine Überlagerung $\varrho\colon S\to V$. Es ist

$$\varrho^*O_V\left(\sum_{i=1}^r\mu_iF_i\right)=O_S\left(\sum_{i=1}^r\eta_i\cdot\nu\cdot kF'_i\right)$$

für geeignete $\eta_i$. Wendet man 2.1c) auf eine Faser $Y$ von $f$ in allgemeiner Lage an, so sieht man, daß $h=f\cdot\varrho\colon S\to W$ ein Faserraum ist. Setzen wir

$$\mathscr{L}=\varrho^*\bar{\omega}\otimes O_S\left(-\sum_{i=1}^r\eta_iF'_i\right)\otimes h^*\mathscr{H},$$

so ist $\varrho^*\mathscr{M}^{(k\cdot\nu)}\otimes h^*\mathscr{H}^{k\cdot\nu}=\mathscr{L}^{k\cdot\nu}$, und diese Garbe wird von globalen Schnitten erzeugt.

Ein genügend allgemeiner Schnitt $s$ von $\mathscr{L}^{k\cdot\nu}$ definiert einen regulären Divisor $D$ ([3], III, 10.9). Es sei $T$ die Varietät, die man durch Ziehen der $k\cdot\nu$-ten Wurzel aus $D$ erhält und

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "g"'] & S \arrow[r, "\varrho"] \arrow[d, "h"] & V \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "id"] & W \arrow[r, "id"] & W \end{tikzcd}$$

die zugehörigen Morphismen. Es ist $\delta_*\omega_{T/W}=\omega_{S/W}\otimes\left(\bigoplus_{i=1}^{k\cdot\nu-1}\mathscr{L}^i\right)$. Betrachtet man den durch $i=k-1$ gegebenen Summanden, so erhält man:

$$j_1\colon \delta_*\omega_{T/W}\to\omega_{S/W}\otimes h^*\mathscr{H}^{k-1}\otimes\varrho^*\bar{\omega}^{k-1}$$

und eine Inklusion

$$j_1'\colon h^*\mathscr{H}^{k-1}\otimes\omega_{S/W}\otimes\varrho^*(\mathscr{M}^{(k)}\otimes\omega_{V/W}^{-1})\to\delta_*\omega_{T/W}.$$

Nach [8], A.1 v) ist $\varrho_*\omega_{S/W}=\mathscr{H}om_V(\varrho_*O_S,\omega_{V/W})$ und damit $\omega_{V/W}$ ein direkter Summand von $\varrho_*\omega_{S/W}$. Wendet man $\varrho_*$ auf $j_1$ an, so erhält man damit

$$j_2\colon \varrho_*\delta_*\omega_{T/W}\to f^*\mathscr{H}^{k-1}\otimes\bar{\omega}^k.$$

Ist $U'$ wie in (3.3), so ist $\mathscr{M}^{(k)}$ invertierbar über $f^{-1}(U')$ und die Anwendung von $\varrho_*$ gibt über $f^{-1}(U')$

$$j_2'\colon f^*\mathscr{H}^{k-1}\otimes\mathscr{M}^{(k)}\to\varrho_*\delta_*\omega_{T/W}.$$

Dabei sind $j_1\cdot j_1'$ und $j_2\cdot j_2'$ die natürlichen Inklusionen. Wendet man $f_*$ an, so erhält man für $\mathscr{E}=\hat{S}^1(g_*\omega_{T/W})$

$$j\colon \mathscr{E}\to\hat{S}^1(f_*\bar{\omega}^k)\otimes\mathscr{H}^{k-1}=\hat{S}^1(f_*\omega_{V/W}^k)\otimes\mathscr{H}^{k-1}$$

und über $U'$

$$j'\colon \hat{S}^1(f_*\mathscr{M}^{(k)})\otimes\mathscr{H}^{k-1}=\hat{S}^1(f_*\omega_{V/W}^k)\otimes\mathscr{H}^{k-1}\to\mathscr{E}.$$

Dabei ist $j\cdot j'$ über $U'$ die Identität.

Ist $g\colon T\to W$ ein Faserraum, so ist $\mathscr{E}$ nach 2.4 schwach positiv und damit auch $\hat{S}^1(f_*\omega_{V/W}^k)\otimes\mathscr{H}^{k-1}$.

Ist $g\colon T\to W$ kein Faserraum, so hat für ein $i\in\{1,\ldots,k\cdot\nu-1\}$ die Garbe $\mathscr{L}^{-i}$ Schnitte auf der allgemeinen Faser. Das ist nur möglich, falls $\mathscr{L}^{k\cdot\nu}$ und $\mathscr{M}^{(k\cdot\nu)}$ entlang der allgemeinen Faser mit der Strukturgarbe übereinstimmen. Nach Konstruktion ist $f_*\omega_{V/W}^k$ vom Rang 1 und wir könnten diesen Fall ausschließen, indem wir von Anfang an $W$ „genügend groß" wählen.

Wir behaupten jedoch, daß für einen beliebigen surjektiven Morphismus zwischen regulären Varietäten $g\colon T\to W$ die Garbe $g_*\omega_{T/W}$ schwach positiv ist.

Sei $L$ die galoissche Hülle des algebraischen Abschlusses von $\mathbb{C}(W)$ in $\mathbb{C}(T)$. Durch Anwenden von (1.8) dürfen wir annehmen, daß der Verzweigungsort von $L$ über $\mathbb{C}(W)$ in $W$ ein Divisor mit regulären Komponenten und transversalen Schnitten ist.

Nach 2.1 existiert eine reguläre Überlagerung $W_1$ von $W$, in der jede Komponente des Verzweigungsortes von $L$ über $\mathbb{C}(W)$ mit derselben Ordnung verzweigt wie in $L$. Es sei $W'$ die Normalisierung von $W_1$ im Produkt der Körper $L$ und $\mathbb{C}(W_1)$. Nach Abhyankars Lemma ist $W'$ étale über $W_1$. Es sei $\tau$: $W' \to W$ der natürliche Morphismus. Die Desingularisierung $T'$ von $T \times_W W'$ zerfällt in eine disjunkte Vereinigung von $T_i$, $i=1,\ldots,r$. Die induzierten Morphismen $g_i$: $T_i \to W'$ sind Faserräume und nach 2.4 ist für $g$: $T' \to W'$ die Garbe $g'_* \omega_{T'/W'} = \bigoplus_{i=1}^{r} g_{i*} \omega_{T_i/W'}$ schwach positiv. Wegen 1.9 folgt die Behauptung.

Wendet man 1.9 auf dieselbe Weise für $k>1$ an und benutzt Satz V, so erhält man:

**Folgerung 3.4.** *Es sei $f$: $V \to W$ ein surjektiver Morphismus zwischen regulären Varietäten. Dann ist für alle $k>0$ die Garbe $f_* \omega_{V/W}^k$ schwach positiv.*

## Literatur

[1] *S. Bloch* und *D. Gieseker*, The positivity of the Chern classes of an ample vector bundle, Inventiones math. **12** (1971), 112—117.
[2] *T. Fujita*, On Kähler fibre spaces over curves, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), 779—794.
[3] *R. Hartshorne*, Algebraic Geometry, Berlin-Heidelberg-New York 1977.
[4] *Y. Kawamata*, Characterisation of abelian varieties, noch nicht veröffentlichtes Manuskript.
[5] *Y. Kawamata*, Kodaira dimension of algebraic fibre spaces over curves, noch nicht veröffentlichtes Manuskript.
[6] *M. Raynaud*, Flat modules in algebraic geometry, Comp. Math. **24** (1972), 11—31.
[7] *K. Ueno*, Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces, Lecture Notes in Math. **439**, Berlin-Heidelberg-New York.
[8] *E. Viehweg*, Klassifikationstheorie algebraischer Varietäten der Dimension drei, Comp. Math. **41** (1980), 361—400.

Institut für Mathematik und Informatik, Universität Mannheim, D-6800 Mannheim

Eingegangen 27. April 1981