

Fortsetzung eines formellen Zusammenhangs auf \mathbb{G}_m
nach O. Gabber und N. Katz

Diplomarbeit von
Kay Rülling

Universität Essen

Vorab möchte ich mich bei Frau Prof. Dr. Esnault bedanken, unter deren Anleitung diese Diplomarbeit entstanden ist. Sie hat nicht nur mein gesamtes Studium als Dozentin begleitet, sondern mir auch in vielen Besprechungen das nötige Wissen zur Erstellung dieser Arbeit vermittelt.

Hiermit versichere ich, daß ich diese Diplomarbeit selbständig und nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Quellen erstellt habe.
Essen, im April 2002

Kay Rülling

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	8
1	Zusammenhänge	10
2	Formelle Zusammenhänge	11
3	Irreduzible Zusammenhänge und Körpererweiterungen	17
4	Die Gabber-Katz-Fortsetzung	25
4.1	Konstruktion einer Fortsetzung der U_{ji}	27
4.2	Konstruktion einer Fortsetzung von Rang 1 Zusammenhängen.	30
4.3	Konstruktion einer Fortsetzung eines irreduziblen Zusammenhangs	32
4.4	Zusammenfassung	35
A	Anhang	36

0 Einleitung

Dies ist eine Diplomarbeit von Kay Rülling, erstellt unter der Anleitung und Betreuung von Frau Prof. Dr. Esnault, die auch das Thema ausgewählt hat. Es werden zunächst ein paar Worte zum Zweck, zur Vorgehensweise und zum Aufbau dieser Arbeit gesagt.

In der gesamten Arbeit sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Das Ziel ist es nun einen Satz von O. Gabber und N. Katz (siehe ([K-1], (2.4.10) Theorem) oder auch ([K-2], Main Theorem 1.4.1.)) zu beweisen, der folgendes besagt: Jeder formelle Zusammenhang, das heißt jeder Zusammenhang über dem Körper der formellen Laurentreihen mit endlicher Pol-Ordnung, läßt sich in kanonischer Weise zu einem Zusammenhang auf $\mathbb{G}_m = \text{Spec } k[t, \frac{1}{t}]$ fortsetzen, der regulär singular in ∞ ist. Doch während der Beweis von Gabber und Katz eher abstrakter Natur ist, wird in dieser Arbeit ein konkretes Verfahren zur Konstruktion einer solchen Fortsetzung angegeben. Hierzu zerlegen wir einen formellen Zusammenhang E in eine direkte Summe von Zusammenhängen der Gestalt $M \otimes U$ mit einem irreduziblen Zusammenhang M und einem regulär singularen Zusammenhang U , der eine Matrixdarstellung $A = (\text{nilpotenter Jordanblock})dt/t$ besitzt und setzen U und M einzeln fort. Die Fortsetzung von U ist einfach ein freier $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$ -Modul vom Rang = Rang U , dabei wird die Zusammenhangsabbildung in einer gewissen Basis gegeben durch die Matrix A . Um M fortzusetzen benötigen wir ein Lemma von Beilinson (siehe [B]), das besagt, daß jeder irreduzible Zusammenhang von einem Rang 1 Zusammenhang über einem größeren Laurentkörper herkommt. Ist genauer n der Rang von M und $k((z)) \supset k((t))$ eine Körpererweiterung mit $z^n = t$ und ist $\psi : k((t)) \ni t \mapsto z^n \in k((z))$ der entsprechende Körperhomomorphismus, so gibt es einen Rang 1 Zusammenhang L über $k((z))$ mit $M = \psi_* L$. Wir zeigen, daß L eine Matrixdarstellung $\omega \in k[\frac{1}{t}] \frac{dt}{t}$ besitzt und definieren dann die Fortsetzung von L als ein freier Rang 1 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$ -Modul \mathcal{L} zusammen mit einer Zusammenhangsabbildung, die in einer gewissen Basis durch die Matrix ω gegeben ist. Bezeichnen wir mit $\pi : \mathbb{G}_{m,z} \rightarrow \mathbb{G}_{m,t}$ den von der Inklusion $k[t, \frac{1}{t}] \hookrightarrow k[z, \frac{1}{z}]$ induzierten Morphismus, so ist dann $\pi_* \mathcal{L}$ eine Fortsetzung von M . Zusätzlich sind diese Fortsetzungen von U und M mit folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt:

- (a) Die Fortsetzung von U ist eine sukzessive Extension des trivialen Zusammenhangs (\mathcal{O}, d) , die U als sukzessive Extension des trivialen Zusammenhangs $(k((t)), d)$ fortsetzt.
- (b) Die Fortsetzung von M ist regulär singular in ∞ und zerfällt auf $\mathbb{G}_{m,z}$ in Rang 1 Zusammenhänge, die ebenfalls regulär singular in ∞ sind.

Insgesamt erhalten wir eine Fortsetzung von E , die die Zerlegung von E in isotypische Komponenten respektiert (das heißt die isotypischen Komponenten werden einzeln fortgesetzt) und mit den obigen Eigenschaften eindeutig bestimmt ist. Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Im ersten Abschnitt werden ein paar grundlegende Definitionen zum Thema “Zusammenhänge auf einer zusammenhängenden glatten Kurve” wiederholt.

Der zweite Abschnitt gehört den formellen Zusammenhängen. Auch hier werden einige Definitionen und wohl bekannte Aussagen zusammengestellt. Wesentlich für die späteren Konstruktionen sind folgende Ergebnisse:

- Jeder formelle Rang 1 Zusammenhang besitzt einen Basisvektor, so daß die Matrix des Zusammenhangs bezüglich dieses Vektors ein Element aus $k[\frac{1}{t}] \frac{dt}{t}$ ist.

- Jeder formelle Zusammenhang läßt sich in eine direkte Summe isotypischer Komponenten zerlegen.
- Jede isotypische Komponente läßt sich in der Form $M \otimes \bigoplus_i U_i$ schreiben mit einem irreduziblen Zusammenhang M und regulär singulären Zusammenhängen U_i , die eine Matrixdarstellung (nilpotenter Jordanblock) $\frac{dt}{t}$ besitzen.

Der dritte Abschnitt widmet sich im wesentlichen dem Beweis eines Lemmas von Beilinson (siehe [B]) (das hier jedoch als Satz erstrahlt). Das Lemma besagt, wie schon weiter oben erwähnt, daß jeder irreduzible Zusammenhang von einem Rang 1 Zusammenhang über einem großer Laurentkörper herkommt.

Im vierten Abschnitt schließlich beweisen wir den oben erwähnten Hauptsatz von Gabber und Katz: Jeder formelle Zusammenhang läßt sich zu einem in ∞ regulär singulären Zusammenhang auf \mathbb{G}_m fortsetzen. Die Fortsetzung respektiert die Zerlegung in isotypische Komponenten und ist mit gewissen Eigenschaften eindeutig. Der Beweis gliedert sich in folgende drei Abschnitte:

- Konstruktion einer Fortsetzung eines regulär singulären Zusammenhangs U , der eine Matrixdarstellung (nilpotenter Jordanblock) $\frac{dt}{t}$ besitzt.
- Konstruktion einer Fortsetzung von Rang 1 Zusammenhängen
- Konstruktion einer Fortsetzung von irreduziblen Zusammenhängen.

Den Schluß bildet ein Anhang, in dem ein paar Definitionen und Fakten zu der 0-ten und 1-ten de Rham Kohomologiegruppe sowie zu Ext^1 aufgelistet sind.

Generelle Voraussetzungen. In der gesamten Arbeit sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Wir bezeichnen mit $k((t))$ den Körper der formalen Laurentreihen mit Koeffizienten in k und endlicher Pol-Ordnung. (Elemente aus $k((t))$ sind also formale Summen $\sum_{i=-m}^{\infty} a_i t^i$ mit $a_i \in k$ und $m \in \mathbb{N}$.) Wir nennen $k((t))$ auch Laurentkörper. Desweiteren sei $\mathbb{G}_{m,t} := \mathbb{G}_m := \text{Spec } k[t, \frac{1}{t}]$. Ist X eine algebraische Varietät, so bezeichnen wir mit \mathcal{O}_X oder auch \mathcal{O} die Garbe der regulären Funktionen auf X und mit Ω_X^1 oder Ω^1 die Garbe der Differentialformen 1. Ordnung auf X . $d : \mathcal{O} \rightarrow \Omega^1$ sei die Differentialabbildung (entsprechend auch $d : k((t)) \rightarrow k((t))dt$).

1 Zusammenhänge

In diesem Abschnitt sei X eine zusammenhängende, nicht singuläre algebraische Kurve.

1.1 Definition Ein *Zusammenhang auf X* ist ein Paar (\mathcal{E}, ∇) bestehend aus einem lokal freien \mathcal{O}_X -Modul endlichen Ranges \mathcal{E} und einem Morphismus von k -Vektorraumgarben $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$, der zusätzlich die Leibnizregel $\nabla(\alpha e) = \alpha \nabla(e) + e \otimes d\alpha$ für $\alpha \in \mathcal{O}_X$ und $e \in \mathcal{E}$ erfüllt. (\mathcal{E}, ∇) ist vom Rang n , falls n der Rang von \mathcal{E} als lokal freie Garbe ist. (Wir bemerken, daß \mathcal{E} als lokal freie Garbe einen wohl definierten Rang hat, schließlich ist X zusammenhängend.)

Wir schreiben auch kurz \mathcal{E} statt (\mathcal{E}, ∇) , wenn klar ist, daß wir uns auf den Zusammenhang beziehen.

1.2 Definition Seien $(\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}})$ und $(\mathcal{G}, \nabla_{\mathcal{G}})$ zwei Zusammenhänge auf X

- (i) Ein *flacher Morphismus* von \mathcal{E} nach \mathcal{G} ist ein Morphismus von \mathcal{O}_X -Moduln $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$, der zusätzlich $(\varphi \otimes id) \circ \nabla_{\mathcal{E}} = \nabla_{\mathcal{G}} \circ \varphi$ erfüllt. Wir bezeichnen mit $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ die Menge der flachen Morphismen von \mathcal{E} nach \mathcal{G} .
- (ii) Wir definieren das *Tensorprodukt von Zusammenhängen* $(\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}}) \otimes (\mathcal{G}, \nabla_{\mathcal{G}})$ als das Paar $(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}, \nabla_{\mathcal{E}} \otimes \nabla_{\mathcal{G}})$ mit $(\nabla_{\mathcal{E}} \otimes \nabla_{\mathcal{G}})(e \otimes g) := \nabla_{\mathcal{E}}(e) \otimes g + e \otimes \nabla_{\mathcal{G}}(g)$ für $e \in \mathcal{E}$ und $g \in \mathcal{G}$. (Offenbar ist $\nabla_{\mathcal{E}} \otimes \nabla_{\mathcal{G}}$ wohl definiert und erfüllt die Leibnizregel.)
- (iii) Die *direkte Summe von Zusammenhängen* ist definiert durch $(\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}}) \oplus (\mathcal{G}, \nabla_{\mathcal{G}}) = (\mathcal{E} \oplus \mathcal{G}, \nabla_{\mathcal{E}} \oplus \nabla_{\mathcal{G}})$ mit $(\nabla_{\mathcal{E}} \oplus \nabla_{\mathcal{G}})(e \oplus g) := \nabla_{\mathcal{E}}(e) + \nabla_{\mathcal{G}}(g)$ für $e \in \mathcal{E}$ und $g \in \mathcal{G}$.
- (iv) Sei $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ die Garbe von \mathcal{O}_X -Modul Morphismen von \mathcal{E} nach \mathcal{G} . Dann ist $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine lokal freie Garbe von \mathcal{O}_X -Moduln und wir können einen Zusammenhang $(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{G}), \nabla)$ definieren, indem wir $(\nabla\varphi)(e) = \nabla_{\mathcal{G}}\varphi(e) - \varphi(\nabla_{\mathcal{E}}e)$ setzen für $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ und $e \in \mathcal{E}$. (Offenbar definiert das einen Zusammenhang.)

Im folgenden sei (\mathcal{E}, ∇) immer ein Zusammenhang des Ranges n .

1.3 Lokale Matrixdarstellung eines Zusammenhanges Ist $U \subset X$ eine offene Menge und sind $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{E}(U)$ mit $\mathcal{E}|_U = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}|_U e_i$, so ist der Zusammenhang auf U gegeben durch $\nabla|_U : \bigoplus \mathcal{O}|_U e_i \rightarrow \bigoplus \Omega_{|U}^1 e_i$. Es existieren daher $\omega_{ij} \in \Omega^1(U)$, $i, j = 1, \dots, n$, so daß $\nabla e_i = \sum_j \omega_{ji} e_j$. Dann definieren wir die Matrix von $\nabla|_U$ bezüglich der Basis $\{e_i\}$ in der althergebrachten Weise:

$$M(\nabla|_U, \{e_i\}) = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \cdots & \omega_{nn} \end{pmatrix}$$

Ist nun $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \mathcal{E}|_U = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}|_U e_i$, so liefert die Additivität von ∇ zusammen mit der Leibnizregel

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla e_i + \sum_{i=1}^n d\lambda_i e_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_{ji} \right) e_j + \sum_{i=1}^n d\lambda_i e_i$$

Denken wir uns f also als Spaltenvektor, so erhalten wir eine Darstellung von ∇f mit der Matrix $M(\nabla|_U, \{e_i\})$:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{n1} & \cdots & \omega_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d\lambda_1 \\ \vdots \\ d\lambda_n \end{pmatrix} = M(\nabla|_U, \{e_i\})f + df$$

Basiswechsel (Siehe auch ([L], 1. a).) Sind $\{e_1, \dots, e_n\}$ und $\{f_1, \dots, f_n\}$ zwei Basen von $\mathcal{E}|_U$ als freier $\mathcal{O}|_U$ -Modul, so existiert eine Matrix $T \in GL(n, \mathcal{O}|_U)$ mit $f_i = Te_i$. (T und f_i in der Basis $\{e_i\}$ geschrieben.) Dann gilt, wie wir leicht nachrechnen könnten:

$$M(\nabla|_U, \{f_i\}) = T^{-1}M(\nabla|_U, \{e_i\})T + T^{-1}dT$$

1.4 Definition Sei $\mathbb{A}_\infty^1 := \text{Spec } k[1/t] = \text{Spec } k[u]$ mit $u = 1/t$. \mathbb{A}_∞^1 ist also nichts anderes, als $\mathbb{G}_m \cup \infty$, wobei ∞ hier dem Primideal $(u) \subset k[u]$ entspricht. Desweiteren sei $\Omega_{\mathbb{A}_\infty^1}^1(\log \infty)$ die Garbe der 1-Formen auf \mathbb{A}_∞^1 , die höchstens Pole der Ordnung eins in ∞ haben. Also $\Omega_{\mathbb{A}_\infty^1}^1(\log \infty) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_\infty^1} \frac{du}{u}$. Sei nun (\mathcal{E}, ∇) ein Zusammenhang auf \mathbb{G}_m . Dann sagen wir (\mathcal{E}, ∇) ist *regulär singular in ∞* (oder auch *im Unendlichen*), falls es einen Zusammenhang $(\bar{\mathcal{E}}, \bar{\nabla})$ auf \mathbb{A}_∞^1 mit einem Pol erster Ordnung in ∞ gibt, der (\mathcal{E}, ∇) fortsetzt, das heißt

$$\bar{\nabla} : \bar{\mathcal{E}} \longrightarrow \bar{\mathcal{E}} \otimes \Omega_{\mathbb{A}_\infty^1}^1(\log \infty) \quad \text{und} \quad (\bar{\mathcal{E}}, \bar{\nabla})|_{\mathbb{G}_m} = (\mathcal{E}, \nabla)$$

Eine allgemeinere Definition von regulären singularen Punkten findet sich in ([K-3], Deligne's definition of regular singular points in the general case, Seite 546.)

1.5 Definition Seien \mathcal{G} und \mathcal{E} zwei Zusammenhänge auf X . Dann sagen wir \mathcal{G} ist ein *Untersammenhang von \mathcal{E}* , falls es einen flachen injektiven Morphismus $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{E}$ gibt. Ein Zusammenhang \mathcal{E} heißt *irreduzibel*, wenn jeder von Null verschiedene Untersammenhang isomorph zu \mathcal{E} ist.

2 Formelle Zusammenhänge

In diesem Abschnitt schreiben wir auch Ω^1 statt $k((t))dt$.

2.1 Definition Ein *formeller Zusammenhang vom Rang n über $k((t))$* ist ein Paar (E, ∇) bestehend aus einem n -dimensionalen $k((t))$ -Vektorraum E und einem k -Vektorraum Homomorphismus $\nabla : E \longrightarrow E \otimes_{k((t))} \Omega^1$, der die Leibnizregel erfüllt, das heißt $\nabla(\lambda e) = \lambda \nabla e + e \otimes d\lambda$ für $e \in E$ und $\lambda \in k((t))$.

Offensichtlich können wir das Tensorprodukt und die direkte Summe von formellen Zusammenhängen sowie flache Homomorphismen zwischen formellen Zusammenhängen analog zum ersten Abschnitt definieren. (Wir könnten formelle Zusammenhänge auch mit Zusammenhängen auf dem Schema $\text{Spec } k((t))$ identifizieren und dann alle Definitionen einfach übernehmen.) Genauso können wir auch hier jedem formellen Zusammenhang eine Matrix bezüglich einer gewählten $k((t))$ -Vektorraumbasis zuweisen; der Basiswechsel funktioniert in der selben Weise wie im ersten Abschnitt. Wir sagen ein formeller Zusammenhang (E, ∇) besitzt die Matrixdarstellung A , falls A die Matrix von ∇ in einer gewissen Basis ist.

2.2 Definition Seien (E, ∇_E) und (G, ∇_G) zwei formelle Zusammenhänge. Wir bezeichnen mit $\mathcal{H}om(E, G)$ die Menge der $k((t))$ -Vektorraumhomomorphismen. Dann ist $\mathcal{H}om(E, G)$ selber ein $k((t))$ -Vektorraum und wir definieren den Zusammenhang $(\mathcal{H}om(E, G), \nabla)$, indem wir $(\nabla\varphi)(e) = \nabla_G\varphi(e) - \varphi(\nabla_E e)$ setzen für $\varphi \in \mathcal{H}om(E, G)$ und $e \in E$. Desweiteren bezeichnen wir mit $Hom((E, \nabla_E), (G, \nabla_G)) = Hom(E, G)$ die Menge der flachen Homomorphismen von E nach G . Es ist ein k -Vektorraum.

2.3 Bemerkung Seien E und G wie oben. Dann haben wir

$$Hom(E, G) = Ker(\nabla : \mathcal{H}om(E, G) \longrightarrow \mathcal{H}om(E, G) \otimes \Omega^1) =: H_{dR}^0(\mathcal{H}om(E, G))$$

Der Beweis ist klar. (Schließlich gilt für ein $\varphi \in Ker \nabla$ per Definition $\nabla_G \circ \varphi = \varphi \circ \nabla_E$.)

Im folgenden wollen wir ein paar Eigenschaften formeller Zusammenhänge herausarbeiten, die später von Nutzen sein werden.

2.4 Definition Ein formeller Zusammenhang (E, ∇) heißt *regulär singular*, falls eine Basis von E existiert, bezüglich welcher die Matrix von E höchstens einfache Pole hat.

2.5 Lemma Sei (L, ∇) ein formeller Rang 1 Zusammenhang über $k((t))$. Dann besitzt L eine Matrixdarstellung $a \frac{dt}{t}$ für ein a aus $k[\frac{1}{t}]$. a ist eindeutig bestimmt modulo \mathbb{Z} . Sind außerdem e und $e' \in L \setminus \{0\}$ mit $\nabla e \in k[\frac{1}{t}] \frac{dt}{t} e$ und $\nabla e' \in k[\frac{1}{t}] \frac{dt}{t} e'$, so gibt es ein $p \in \mathbb{Z}$ und ein $\lambda \in k^\times$ mit $e' = \lambda t^p e$.

Beweis. Sei $0 \neq f \in L$ und sei $b \in k((t))dt$ die Matrix von ∇ in der Basis f (das heißt $\nabla f = bf$). Ist nun \tilde{e} eine andere Basis von L , so gibt es ein $p \in \mathbb{Z}$ und ein $u \in k[[t]]^\times$ (=Einheiten des Ringes der formalen Potenzreihen) mit $\tilde{e} = t^p u f$, daher ist die Matrix von ∇ in der Basis \tilde{e} gleich $b + p \frac{dt}{t} + \frac{du}{u}$. Schreiben wir nun b in der Form $a \frac{dt}{t} + v dt$ für ein $a \in k[\frac{1}{t}]$ und ein $v \in k[[t]]$ und wählen $u \in k[[t]]^\times$ als Lösung von $\frac{du}{u} = -v dt$ (das ist sicherlich möglich), so ist die Matrix von ∇ in der Basis $e := u f$ gerade das gewünschte $a \frac{dt}{t}$. Außerdem ist $\frac{du}{u}$ für jedes $u \in k[[t]]^\times$ immer ein Element aus $k[[t]]$ und daher ist der Hauptteil der Matrix von L nur durch $p \frac{dt}{t}$ für ein $p \in \mathbb{Z}$ modifizierbar. Das bestimmt unser a eindeutig modulo \mathbb{Z} . Fertig.

2.6 Definition Seien (E, ∇) und (G, ∇) zwei formelle Zusammenhänge. Dann ist G ein *Unterkomplex* von E , falls es einen flachen injektiven Homomorphismus $G \hookrightarrow E$ gibt. E heißt *irreduzibel*, wenn jeder von Null verschiedene Unterkomplex isomorph zu E ist.

Offenbar sind Rang 1 Zusammenhänge irreduzibel.

2.7 Bemerkung Zwei irreduzible Zusammenhänge (M_1, ∇_1) und (M_2, ∇_2) sind nicht isomorph genau dann, wenn $Hom(M_1, M_2) = 0$.

Beweis. Offenbar können M_1 und M_2 nicht isomorph sein, wenn $Hom(M_1, M_2) = 0$. Sei nun $0 \neq \varphi \in Hom(M_1, M_2)$. Dann ist $(Ker \varphi, \nabla_1|_{Ker \varphi})$ ein Unterkomplex von M_1 . (Hier ist zu beachten, daß für ein Element $m \in Ker \varphi$ gilt $0 = \nabla_2 \varphi(m) = \varphi(\nabla_1 m)$ und somit ∇_1 nach $Ker \varphi \otimes \Omega^1$ abbildet.) Da aber M_1 irreduzibel ist und $\varphi \neq 0$, muß $Ker \varphi = 0$ sein. Also ist M_1 ein Unterkomplex von M_2 . Die Irreduzibilität M_2 's liefert nun, daß M_1 isomorph zu M_2 ist. Das beschert uns die Behauptung.

2.8 Lemma Seien E und G zwei formelle Zusammenhänge mit $\text{Hom}(E, G) = 0$. Dann gilt: Jede exakte Sequenz von Zusammenhängen $0 \longrightarrow G \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow 0$ spaltet, das heißt $V \cong G \oplus E$ (als Zusammenhang).

Beweis. Wir verwenden ein paar Definitionen und Aussagen aus dem Anhang. Wir betrachten den Zusammenhang $(\mathcal{H}om(E, G), \nabla)$. Nun ist also wegen 2.3 $H_{dR}^0(\mathcal{H}om(E, G)) = 0$. Der Satz A.5 verrät uns daher, daß $H_{dR}^1(\mathcal{H}om(E, G))$ ebenfalls gleich Null ist und somit liefert uns A.7 $\text{Ext}^1(E, G) = 0$. Die Behauptung folgt direkt aus A.2 .

2.9 Bemerkung Sei (E, ∇) ein formeller Zusammenhang und $G \subset E$ ein Unterzusammenhang. Dann ist E/G in natürlicher Weise wieder ein Zusammenhang und die Restklassenabbildung $E \longrightarrow E/G$ ist ein flacher Homomorphismus.

Das wollen wir kurz sehen. Sei $\bar{e} \in E/G$ und $e \in E$ ein Vertreter. Wir definieren $\overline{\nabla}(\bar{e}) := \overline{\nabla(e)}$ = Restklasse von $\nabla(e)$ in $E/G \otimes \Omega^1$. Dann ist $\overline{\nabla} : E/G \longrightarrow E/G \otimes \Omega^1$ eine wohl definierte Abbildung. Denn ist $e+g$ für $g \in G$ ein anderer Vertreter von \bar{e} , so ist $\overline{\nabla}(e+g) = \overline{\nabla(e+g)} = \overline{\nabla(e)} + \overline{\nabla(g)}$. Aber $\nabla(g) \in G \otimes \Omega^1$ (schließlich ist G ein Unterzusammenhang), also $\overline{\nabla}(e+g) = \overline{\nabla(e)}$.

Offenbar ist $\overline{\nabla}$ additiv und erfüllt die Leibnizregel. Daher ist $(E/G, \overline{\nabla})$ ein Zusammenhang und per Definition ist die standard Restklassenabbildung $E \longrightarrow E/G$ ein flacher Homomorphismus.

2.10 Definition Sei (E, ∇) wie immer ein formeller Zusammenhang und sei $M \subset E$ ein irreduzibler Unterzusammenhang. Dann sagen wir $(V^M, \nabla) \subset E$ ist eine *isotypische Komponente von E mit irreduziblen Faktor M* , falls V^M maximal mit der folgenden Eigenschaft ist: V^M besitzt eine Filtrierung

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_m = V^M$$

mit Zusammenhängen V_i , die

- (i) $V_1 \cong M$ und
- (ii) $V_{i+1}/V_i \cong M$ für $i = 1, \dots, m-1$

erfüllen. Dabei sind die Isomorphismen jeweils flach.

2.11 Satz Sei (E, ∇) ein formeller Zusammenhang. Dann besitzt E eine Zerlegung in isotypische Komponenten

$$(E, \nabla) = \bigoplus_j (V^{M_j}, \nabla_j)$$

Dabei sind die M_j irreduzible Unterzusammenhänge von E , die nicht isomorph zueinander sind. Die Zerlegung ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Bevor wir den Satz beweisen, erst noch ein Lemma.

2.12 Lemma Sind M und P zwei irreduzible, nicht isomorphe Zusammenhänge und V^M sowie V^P isotypische Komponenten mit irreduziblen Faktoren M beziehungsweise P , so gilt:

- (i) $\text{Hom}(M, P) = 0$
- (ii) $\text{Hom}(V^M, P) = 0$
- (iii) $\text{Hom}(V^M, V^P) = 0$

Beweis. (i) haben wir schon gesehen (2.7). Kommen wir zu (ii). Sei also $\varphi : V^M \rightarrow P$ ein flacher Homomorphismus und $M = V_1 \subset \dots \subset V_m = V^M$ eine gemäß 2.10 existierende Filtrierung. Wir zeigen $\varphi|_{V_i} = 0$ für $i = 1, \dots, m$. $\varphi|_{V_1}$ ist Null wegen (i). Sei nun $\varphi|_{V_i} = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Dann induziert φ einen flachen Homomorphismus $\bar{\varphi} : V_{i+1}/V_i \rightarrow P$. Aber per Definition der Filtrierung ist $V_{i+1}/V_i = M$, daher ist (wegen (i)) $\bar{\varphi} = 0$ und somit auch $\varphi|_{V_{i+1}} = 0$. Wenden wir uns (iii) zu. Sei $\varphi \in \text{Hom}(V^M, V^P)$ und $W_1 \subset \dots \subset W_l = V^P$ eine Filtrierung von V^P . Dann ist die Zusammensetzung der standard Restklassenabbildung mit φ , $V^M \xrightarrow{\varphi} V^P \rightarrow W_l/W_{l-1} = P$, ein Element aus $\text{Hom}(V^M, P)$ und ist somit gleich Null (nach (ii)). Das bedeutet aber, daß φ eigentlich ein Element aus $\text{Hom}(V^M, W_{l-1})$ ist. Die Behauptung folgt induktiv.

Beweis des Satzes. Zuerst bemerken wir, daß jeder Zusammenhang natürlich einen irreduziblen Unterzusammenhang besitzt. In der Tat, ist E selbst nicht irreduzibel, so gibt es per Definition einen echten von Null verschiedenen Unterzusammenhang von E . Ist dieser irreduzibel sind wir fertig, ansonsten wiederholen wir das Argument und erreichen so gewiß unser Ziel, da ja schließlich alles endlich dimensional ist und Rang 1 Zusammenhänge irreduzibel sind.

Wenden wir uns nun der Existenz einer Zerlegung, wie in der Behauptung zu. Wir machen Induktion über den Rang von E . Offenbar ist die Aussage erfüllt, falls $\text{Rang } E = 1$. Sei also $\text{Rang } E = n$ und die Behauptung wahr für Zusammenhänge kleineren Ranges. Sei $M \subset E$ ein irreduzibler Unterzusammenhang, dann besitzt E/M nach Induktionsannahme eine Zerlegung in isotypische Komponenten $E/M = \bigoplus (V^{M_j}, \nabla_j)$ mit irreduziblen und paarweise nicht isomorphen Zusammenhängen M_j . Wir unterscheiden zwei Fälle.

Erster Fall: M ist zu keinem M_j isomorph. Dann setzen wir $V^M := M$; offenbar ist das eine isotypische Komponente von E . Es bleibt zu zeigen: $E = V^M \oplus \bigoplus_j V^{M_j} (= M \oplus E/M)$. Das Lemma sagt uns $\text{Hom}(V^{M_j}, M) = 0$ für alle j und somit haben wir auch $\text{Hom}(\bigoplus_j V^{M_j}, M) = 0$. Also sagt uns 2.8, daß die exakte Sequenz von Zusammenhängen

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow E/M \longrightarrow 0$$

spaltet und das beweist die Existenz in diesem Fall.

Zweiter Fall: M ist isomorph zu einem M_j , sagen wir M_1 . Es gibt einen Zusammenhang V^M , der uns folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Reihen und Spalten liefert:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & V^M & \xrightarrow{\pi|_{V^M}} & V^{M_1} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\pi} & E/M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Wobei π die standard Restklassenabbildung ist. Wir können V^M ganz konkret angeben, und zwar $(V^M, \nabla_M) := (\pi^{-1}(V^{M_1}), \nabla|_{\pi^{-1}(V^{M_1})})$. Wir wollen kurz sehen, daß dies in der

Tat ein Zusammenhang ist. Sei $v \in V^M = \pi^{-1}(V^{M_1})$, dann haben wir, da π ein flacher Homomorphismus ist, $\pi(\nabla_M(v)) = \nabla_1(\pi(v)) \in V^{M_1} \otimes \Omega^1$. Also ist ∇_M eine Abbildung von V^M nach $V^M \otimes \Omega^1$ und somit ist (V^M, ∇_M) trivialerweise auch ein Zusammenhang. Offenbar erfüllt V^M das Diagramm. Als nächstes zeigen wir, daß V^M eine isotypische Komponente von E ist. Sei $M \cong M_1 = \overline{V}_1 \subset \dots \subset \overline{V}_m = V^{M_1}$ eine nach Induktionsannahme und gemäß 2.10 existierende Filtrierung von V^{M_1} . Wie oben definieren wir Zusammenhänge $V_i := \pi^{-1}(\overline{V}_i)$ für $i = 1, \dots, m$. Also ist $M =: V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_m = V^M$ eine Filtrierung von V^M mit $V_{i+1}/V_i \cong (V_{i+1}/M)/(V_i/M) \cong \overline{V}_{i+1}/\overline{V}_i = M$ für $i = 0, \dots, m-1$. V^M ist maximal mit dieser Eigenschaft, da V^{M_1} es ist. Das heißt V^M ist eine isotypische Komponente von E . Um endlich Gewißheit über die Existenz unserer Zerlegung zu erlangen, fehlt nur noch, daß die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow V^M \longrightarrow E \longrightarrow E/V^M = \bigoplus_{j \text{ mit } M_j \neq M} V^{M_j} \longrightarrow 0$$

spaltet. Also wollen wir wieder $\text{Hom}(\bigoplus_{M_j \neq M} V^{M_j}, V^M) = 0$; das folgt aber direkt aus 2.12 (iii).

Kommen wir nun zur Eindeutigkeit. Seien $\bigoplus_j V^{M_j} \cong \bigoplus_i V^{P_i}$ zwei isomorphe Zerlegungen in isotypische Komponenten, wobei jeweils die M_j und die P_i paarweise nicht isomorph sind. Wegen

$$P_i \hookrightarrow V^{P_i} \hookrightarrow \bigoplus_l V^{P_l} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_j V^{M_j}$$

und da P_i irreduzibel ist, ist P_i ein Unterzusammenhang eines V^{M_j} für ein j . Sei $M = V_1 \subset \dots \subset V_m = V^{M_j}$ die Filtrierung von V^{M_j} . Dann wird ein flacher Homomorphismus $P_i \hookrightarrow V^{M_j} \longrightarrow V^{M_j}/V_{m-1} = M_j$ induziert. Aber P_i und M_j sind irreduzibel, also ist dieser Homomorphismus entweder ein Isomorphismus, das heißt $P_i \cong M_j$, oder er ist gleich Null, das heißt $P_i \hookrightarrow V_{m-1}$ und dann folgt $P_i \cong M_j$ durch Iteration. Also ist jedes P_i isomorph zu einem M_j und umgekehrt und somit ist jedes V^{P_i} auch eine isotypische Komponente mit einem irreduziblen Faktor M_j und umgekehrt. Insbesondere haben wir genauso viele P_i wie M_j , daher können wir ohne Einschränkung annehmen $P_i \cong M_i$. Dann liefert uns 2.12 (iii) $\text{Hom}(V^{M_j}, V^{P_i}) = 0$ für $i \neq j$. Deswegen erhalten wir aus dem Isomorphismus $\bigoplus_i V^{M_i} \cong \bigoplus_i V^{P_i}$ für alle i einen injektiven Homomorphismus $V^{M_i} \hookrightarrow V^{P_i}$. (Denn für $i \neq j$ ist der Homomorphismus $V^{M_i} \hookrightarrow \bigoplus_s V^{M_s} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_s V^{P_s} \xrightarrow{\text{Projektion}} V^{P_j}$ gleich Null). Es folgt direkt $V^{M_i} \cong V^{P_i}$ und das beendet den Beweis.

2.13 Definition Ein formeller Zusammenhang (E, ∇) heißt *unzerlegbar*, falls er nicht als direkte Summe von Zusammenhängen kleineren Ranges geschrieben werden kann.

2.14 Bemerkung Jeder formelle Zusammenhang läßt sich eindeutig als direkte Summe unzerlegbarer formeller Zusammenhänge schreiben.

Beweis. Die Existenz einer solchen Zerlegung ist offensichtlich. Seien nun $\bigoplus_i V_i = \bigoplus_j W_j$ zwei Zerlegungen in unzerlegbare Zusammenhänge. Da also insbesondere die V_i unzerlegbar sind, gibt es für jedes i_0 ein j_0 , so daß V_{i_0} ein Unterzusammenhang von W_{j_0} ist. Daher erhalten wir $\bigoplus_i V_i/V_{i_0} = \bigoplus_{i \neq i_0} V_i = \bigoplus_{j \neq j_0} W_j \oplus W_{j_0}/V_{i_0}$. Daraus folgt $\bigoplus_j W_j = \bigoplus_i V_i =$

$\bigoplus_{j \neq j_0} W_j \oplus (W_{j_0}/V_{i_0}) \oplus V_{i_0}$ und somit $W_{j_0} = (W_{j_0}/V_{i_0}) \oplus V_{i_0}$. Aber W_{j_0} ist unzerlegbar, also ist $W_{j_0}/V_{i_0} = 0$. Fertig.

2.15 Lemma Jeder unzerlegbare formelle Zusammenhang ist isomorph zu einem formellen Zusammenhang $M \otimes U$, dabei ist M ein irreduzibler Zusammenhang und U ein regulär singulärer, der eine Matrixdarstellung (nilpotenter Jordanblock) dt/t besitzt.

Zum Beweis zitieren wir ([BBE], 5.9.(a)(iii)).

2.16 Korollar Sei (E, ∇) ein formeller Zusammenhang. Sei V^M eine isotypische Komponente von E mit irreduziblen Faktor M . Dann ist V^M isomorph zu einem Zusammenhang $M \otimes \bigoplus_i U_i$, mit regulär singulären Zusammenhängen U_i , die eine Matrixdarstellung (nilpotenter Jordanblock) dt/t besitzen. Diese Darstellung von V^M ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. (Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Matrixdarstellung der U_j nur aus einem Jordanblock besteht und nicht aus mehreren, wie es bei einer Jordanmatrix der Fall wäre.)

Beweis. Wir schreiben $V^M = \bigoplus_{i=1}^s W_i$, mit unzerlegbaren Zusammenhängen W_i . Dann gibt es nach 2.15 für alle i einen irreduziblen Zusammenhang M_i und einen regulär singulären Zusammenhang U_i mit Matrixdarstellung (nilpotenter Jordanblock) dt/t (geschrieben in einer Basis $\{e_{i1}, \dots, e_{in_i}\}$), so daß $W_i = M_i \otimes U_i$. Es bleibt zu zeigen, daß die M_i alle isomorph zu M sind. Wir definieren eine Abbildung $\varphi_i : M_i \rightarrow W_i, m_i \mapsto m_i \otimes e_{i1}$. Das ist offenbar ein injektiver Vektorraumhomomorphismus und es gilt $\nabla_{W_i}(\varphi_i(m_i)) = \nabla_{M_i}(m_i) \otimes e_{i1} + m_i \otimes \nabla_{U_i}(e_{i1})$. Aber per Definition der Basis ist $\nabla_{U_i}(e_{i1}) = 0$ und daher ist $\nabla_{W_i}(\varphi_i(m_i)) = \nabla_{M_i}(m_i) \otimes e_{i1} = \varphi_i(\nabla_{M_i}(m_i))$. Also ist φ_i auch flach. Sei $M = V_1 \subset \dots \subset V_m = V^M$ die Filtrierung von V^M als isotypische Komponente und $i_0 \in \{1, \dots, s\}$. Wir haben eine Sequenz von flachen Homomorphismen:

$$M_{i_0} \xrightarrow{\varphi_{i_0}} W_{i_0} \xrightarrow{\text{Einbettung}} \bigoplus W_i \xrightarrow{\cong} V^M \xrightarrow{\text{Restkl.-Abb.}} V^M/V_{m-1} = M$$

Wir bezeichnen die Inklusion $M_{i_0} \hookrightarrow V^M$ mit ψ_{i_0} und die Restklassenabbildung $V^M \rightarrow V^M/V_{m-1}$ mit π_m . Ist nun $0 \neq \pi_m \circ \psi_{i_0} \in \text{Hom}(M_{i_0}, M)$, so folgt $M_{i_0} \cong M$ (wegen 2.7) und wir sind fertig. Ist $\pi_m \circ \psi_{i_0} = 0$, so ist $\psi_{i_0} \in \text{Hom}(M_{i_0}, V_{m-1})$ und wir erhalten eine Sequenz

$$M_{i_0} \xrightarrow{\psi_{i_0}} V_{m-1} \xrightarrow{\pi_{m-1}} V_{m-1}/V_{m-2} = M$$

Also liefert uns die Wiederholung des Arguments früher oder später $M_{i_0} \cong M$.

Die Eindeutigkeit dieser Darstellung folgt, da die Zerlegung in unzerlegbare Komponenten von V^M nach 2.14 eindeutig ist.

2.17 Definition Sei (E, ∇) ein formeller Zusammenhang.

Wir sagen $E = \bigoplus_j (M_j \otimes \bigoplus_i U_{ji})$ ist die *Prima-Standard-Zerlegung* von E , falls folgendes gilt:

- (i) Die M_j sind paarweise nicht isomorphe, irreduzible formelle Zusammenhänge,
- (ii) die U_{ji} sind regulär singuläre formelle Zusammenhänge, deren Matrix in einer gewissen Basis der Gestalt (nilpotenter Jordanblock) dt/t ist und

(iii) $E = \bigoplus_j (M_j \otimes \bigoplus_i U_{ji})$ ist die Zerlegung in isotypische Komponenten aus 2.11 .

Wir sagen „Matrix von U_{ji} “, wenn wir uns auf die Matrix aus (ii) beziehen.

2.18 Bemerkung Aus 2.11 und 2.16 folgt: Jeder formelle Zusammenhang besitzt eine bis auf Isomorphie eindeutige Prima-Standard-Zerlegung.

3 Irreduzible Zusammenhänge und Körpererweiterungen

Bisher haben wir die Struktur formeller Zusammenhänge untersucht und haben gezeigt, daß wir jeden formellen Zusammenhang in eine direkte Summe von Zusammenhängen der Gestalt $M \otimes U$ mit einem irreduziblen M und einem regulär singulären U zerlegen können. Außerdem wissen wir, daß die Matrix eines solchen U in einer guten Basis einfach (nilpotenter Jordanblock) dt/t ist. Allein über die irreduziblen Zusammenhänge können wir bisher nichts Genaues sagen. In diesem Abschnitt wollen wir das ändern. Und zwar untersuchen wir das Verhalten irreduzibler Zusammenhänge unter Körpererweiterungen: $k((z)) \supset k((t))$ mit $z^n = t$. Wir werden ein Lemma von Beilinson (siehe [B]) beweisen, daß besagt: jeder irreduzible Zusammenhang kommt in gewisser Weise von einem Rang 1 Zusammenhang über einem größeren Laurentkörper her.

In diesem Abschnitt sagen wir auch $k((t))$ -Zusammenhang statt formeller Zusammenhang über $k((t))$.

3.1 Definition Sei $n \in \mathbb{N}$ und z ein Element aus dem Abschluß von $k((t))$ mit $z^n = t$. Sei ψ der Körperhomomorphismus

$$\psi : k((t)) \longrightarrow k((z)) \cong \frac{k((t))[x]}{(x^n - t)}, \quad t \longmapsto z^n$$

Wir identifizieren die Galoisgruppe der Körpererweiterung $k((z)) \supset k((t))$ $\text{Gal}(k((z))/k((t)))$ mit der Gruppe der n -ten Einheitswurzeln μ_n .

- (i) Sei (F, ∇) ein $k((z))$ -Zusammenhang. Dann bezeichnen wir mit $(\psi_*F, \psi_*\nabla) = \psi_*F$ den Zusammenhang F aufgefasst als $k((t))$ -Zusammenhang.
- (ii) Sei F wie oben und $\sigma \in \mu_n$. Wir definieren: $\sigma^*F := (F, \nabla) \otimes_{\sigma} (k((z)), d) = F \otimes_{\sigma} k((z))$. Dabei ist $F \otimes_{\sigma} k((z))$ das übliche Tensorprodukt mit $g(z)f \otimes h(z) = f \otimes g(\sigma(z))h(z)$ für $g, h \in k((z))$ und $f \in F$. Es ist ein $k((z))$ -Vektorraum mit skalarer Multiplikation $g(z) \cdot (f \otimes h(z)) = f \otimes g(z)h(z)$.
- (iii) Sei (E, ∇) ein $k((t))$ -Zusammenhang. Wir definieren den $k((z))$ -Zusammenhang ψ^*E über $\psi^*E := (E, \nabla) \otimes_{k((t))} (k((z)), d) = E \otimes_{k((t))} k((z))$.

3.2 Bemerkung Wir wollen uns kurz anschauen, wie sich (i), (ii) und (iii) auf die Matrixdarstellungen auswirken.

- (i) Wir betrachten nur einen Rang 1 Zusammenhang über $k((z))$. (Das ist erstens einfacher und zweitens auch der einzige Fall den wir benötigen. Allgemein geht

es aber genauso.) Sei also L ein Rang 1 Zusammenhang, $0 \neq e \in L$ und $\nabla(e) = \omega(z)e \in k((z))\frac{dz}{z}e$. Da $\frac{dt}{t} = n\frac{dz}{z}$, haben wir

$$k((z))\frac{dz}{z} = (k((t)) \oplus \dots \oplus k((t))z^{n-1})\frac{dt}{t}.$$

Also gibt es $\omega_i(t) \in k((t))\frac{dt}{t}$ mit $\omega(z) = \omega_0(t) + \omega_1(t)z + \dots + \omega_{n-1}(t)z^{n-1}$. Dann ist die Matrix von ψ_*L in der $k((t))$ -Vektorraumbasis $\{e, ez, \dots, ez^{n-1}\}$ gleich

$$\begin{pmatrix} \omega_0(t) & t\omega_{n-1}(t) & \dots & t\omega_1(t) \\ \omega_1(t) & \omega_0(t) + \frac{1}{n}\frac{dt}{t} & \dots & t\omega_2(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{n-1}(t) & \omega_{n-2}(t) & \dots & \omega_0(t) + \frac{n-1}{n}\frac{dt}{t} \end{pmatrix}.$$

- (ii) Sei $\{f_1, \dots, f_m\}$ eine Basis von F über $k((z))$ und $A(z) = (a_{ij}(z))_{i,j=1}^n$ die Matrix von ∇ in dieser Basis. Dann ist

$$\nabla(f_i \otimes 1) = \left(\sum_{j=1}^m a_{ji}(z)f_j \right) \otimes 1 = \sum_{j=1}^m f_j \otimes a_{ji}(\sigma(z)) = \sum_{j=1}^m a_{ji}(\sigma(z))(f_j \otimes 1)$$

Also ist die Matrix von σ^*F in der Basis $\{f_i \otimes 1\}_i$ gleich $A(\sigma(z)) = \sigma(A(z))$.

- (iii) Ist $B(t)$ die Matrix von E in der Basis $\{e_1, \dots, e_m\}$, so können wir wie in (ii) zeigen, daß die Matrix von ψ^*E in der Basis $\{e_i \otimes 1\}_i$ gleich $B(z^n)$ ist.

3.3 Satz (Levelt, ([L], 1. Theorem II, Seite 9)) Sei (P, ∇) eine direkte Summe irreduzibler Zusammenhänge über $k((t))$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, eine Körpererweiterung $k((t)) \subset k((z))$ mit $z^n = t$ und $k((z))$ -Zusammenhänge L_i vom Rang 1, so daß $\psi^*P = \bigoplus_i L_i$. Wir sagen P ist *diagonalisierbar* über einer endlichen Körpererweiterung.

Die Aussage des folgenden Lemmas findet sich auch in ([B], Beweis von Lemma 1. (i)).

3.4 Lemma Seien $k((z))$, $k((t))$, ψ und μ_n wie in 3.1. Sei (L, ∇) ein $k((z))$ -Zusammenhang vom Rang 1. Dann gilt die Formel:

$$\psi^*\psi_*L = \bigoplus_{\sigma \in \mu_n} \sigma^*L$$

Beweis. Der Beweis läuft unter dem Motto: Rechenspaß für Groß und Klein. Wir schreiben Ω_x^1 für $k((x))\frac{dx}{x}$ und identifizieren den Vektorraum L mit $k((z))$. Sei $\omega(z) \in \Omega_z^1$ mit $\nabla(1) = \omega(z)$. Nach Voraussetzung ist $\Omega_z^1 = \Omega_t^1 \oplus \Omega_t^1 z \oplus \dots \oplus \Omega_t^1 z^{n-1}$, also gibt es $\omega_i(t) \in \Omega_t^1$ mit $\nabla(1) = \omega(z) = \omega_0(t) + \omega_1(t)z + \dots + \omega_{n-1}(t)z^{n-1}$. Schließlich stellen wir fest: als Vektorraum ist $\psi^*\psi_*L$ nichts anderes als $(k((t)) \oplus k((t))z \oplus \dots \oplus k((t))z^{n-1}) \otimes_{k((t))} k((z))$. Wir suchen nun eine Basis $\{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n\}$ des n -dimensionalen $k((z))$ -Vektorraumes $\psi^*\psi_*L$, die

$$\nabla(\varepsilon_i) = \omega(\sigma^i(z))\varepsilon_i \quad (\star)$$

erfüllt für ein primitives Element σ aus μ_n . Dann ist nach 3.2 (ii) $k((z))\varepsilon_i$ isomorph zu $\sigma^{i*}L$ und das liefert die Behauptung. Wir definieren

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &:= 1 \otimes 1 + z \otimes \frac{1}{z} + \dots + z^{n-1} \otimes \frac{1}{z^{n-1}} \\ \varepsilon_1 &:= 1 \otimes 1 + z \otimes \sigma\left(\frac{1}{z}\right) + \dots + z^{n-1} \otimes \sigma\left(\frac{1}{z^{n-1}}\right) \\ &\vdots \\ \varepsilon_{n-1} &:= 1 \otimes 1 + z \otimes \sigma^{n-1}\left(\frac{1}{z}\right) + \dots + z^{n-1} \otimes \sigma^{n-1}\left(\frac{1}{z^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

und zeigen: die $\{\varepsilon_i\}$ bilden eine Basis und erfüllen (\star) . Seien also $a_i \in k((z))$, $i = 0, \dots, n-1$, mit $\sum a_i \varepsilon_i = 0$. Schreiben wir $\sigma(z) = \xi z$ für eine n -te primitive Einheitswurzel ξ und beachten, daß $\{1 \otimes 1, \dots, z^{n-1} \otimes 1/z^{n-1}\}$ offenbar eine Basis ist, so folgt

$$\sum a_i = \sum a_i \xi^i = \sum a_i \xi^{2i} = \dots = \sum a_i \xi^{(n-1)i} = 0$$

oder auch

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \xi & \dots & \xi^{n-1} \\ 1 & \xi^2 & \dots & \xi^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi^{n-1} & \dots & \xi^{(n-1)^2} \end{pmatrix}}_{=: \Lambda} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

Aber $\det \Lambda = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (\xi^j - \xi^i) \neq 0$ (Vandermonde-Determinante), also bilden die $\{\varepsilon_i\}$ eine Basis. Nun wollen wir ein bißchen rechnen:

$$\nabla(\varepsilon_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \left((\omega(z)z^j) \otimes \frac{1}{\sigma(z^j)} \right) + \left(dz^j \otimes \frac{1}{\sigma(z^j)} \right) + \left(z^j \otimes d \frac{1}{\sigma(z^j)} \right)$$

Aus $dt/t = ndz/z$ folgt $dz^j = jz^{j-1}dz = \frac{j}{n}z^j dt/t$ und daher

$$dz^j \otimes \frac{1}{\sigma(z^j)} = \frac{j}{n}z^j \otimes \frac{dz^n}{z^n} \frac{1}{\sigma(z^j)} = \frac{j}{n}z^j \otimes n \frac{d\sigma(z)}{\sigma(z)} \frac{1}{\sigma(z^j)} = -z^j \otimes d \frac{1}{\sigma(z^j)}$$

Also

$$\begin{aligned}\nabla(\varepsilon_1) &= \sum_{j=0}^{n-1} \omega(z)z^j \otimes \frac{1}{\sigma(z^j)} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(t)z^{k+j} \otimes \frac{1}{\sigma(z^j)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k-1} \omega_k(t)z^{k+j} \otimes \frac{1}{\sigma(z^j)} + \sum_{j=n-k}^{n-1} \omega_k(t)z^{k+j} \otimes \frac{1}{\sigma(z^j)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k-1} z^{j+k} \otimes \frac{1}{\sigma(z^j)} \frac{\sigma(z^k)}{\sigma(z^k)} \omega_k(z^n) + \sum_{j=0}^{k-1} \omega_k(t)z^{j+n} \otimes \frac{1}{\sigma(z^{j-k+n})} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k-1} \left(z^{j+k} \otimes \frac{1}{\sigma(z^{j+k})} \right) \sigma(z^k) \omega_k(z^n) + \sum_{j=0}^{k-1} z^j \otimes z^n \frac{1}{\sigma(z^{j-k+n})} \frac{\sigma(z^k)}{\sigma(z^k)} \omega_k(z^n) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-k-1} z^{j+k} \otimes \frac{1}{\sigma(z^{j+k})} + \sum_{j=0}^{k-1} z^j \otimes \frac{1}{\sigma(z^j)} \right)}_{=\varepsilon_1} \omega_k(z^n) \sigma(z^k) = \omega(\sigma(z)) \varepsilon_1
\end{aligned}$$

Ersetzen wir σ durch σ^i erhalten wir die entsprechende Aussage für die anderen ε_i und das liefert die Behauptung.

Bevor wir nun den am Anfang dieses Abschnitts versprochenen Satz zeigen, daß jeder irreduzible Zusammenhang von einem Rang 1 Zusammenhang über einem größeren Laurentkörper herkommt, benötigen wir noch etwas technischen Firlefanz.

3.5 Lemma Ein Unterverzweigung einer direkten Summe von formellen irreduziblen Zusammenhängen ist ein direkter Faktor dieser Summe, das heißt er ist selbst eine direkte Summe gewisser formeller irreduzibler Zusammenhänge.

Mehrere solcher Aussagen sind in ([L], 1. e), Seite 6) aufgelistet.

Beweis. Sei $F = \bigoplus_i M_i$ mit irreduziblen M_i 's und sei E ein Unterverzweigung von F . Aus 2.14 wissen wir, daß sich E als direkte Summe unzerlegbarer Unterverzweigungen schreiben läßt. Nun ist so ein unzerlegbarer Unterverzweigung von E aber insbesondere ein Unterverzweigung von $\bigoplus_i M_i$ und daher folgt aus der Unzerlegbarkeit, daß dies ein Unterverzweigung eines der M_i 's sein muß. Da die M_i irreduzibel sind, folgt die Behauptung unmittelbar.

3.6 Lemma Seien $k((t)) \subset k((z))$ und ψ wie in 3.1. Sei (E, ∇) ein $k((t))$ -Zusammenhang. Wir bezeichnen mit L_j den Zusammenhang $(k((t)), \nabla_j)$ mit $\nabla_j(1) = \frac{j}{n} \frac{dt}{t}$. Dann gilt:

$$\psi_* \psi^* E \cong \bigoplus_{j=0}^{n-1} E \otimes L_j$$

Beweis. Sei $\{e_1, \dots, e_m\}$ eine Basis von E und $A(t)$ sei die Matrixdarstellung von E in dieser Basis. Dann ist $\{e_1 \otimes 1, \dots, e_m \otimes 1, \dots, e_1 \otimes z^{n-1}, \dots, e_m \otimes z^{n-1}\}$ eine $k((t))$ -Vektorraumbasis von $\psi_* \psi^* E = (\bigoplus_i k((t)) e_i) \otimes_{k((t))} (\bigoplus_{j=0}^{n-1} k((t)) z^j)$, auf die die Zusammenhangsabbildung folgendermaßen wirkt (wir identifizieren die e_i mit den entsprechenden Spaltenvektoren):

$$\psi_* \psi^* \nabla(e_i \otimes z^j) = (A(t) e_i) \otimes z^j + e_i \otimes j z^{j-1} dz$$

Schreiben wir $dz = \frac{z}{n} \frac{dt}{t}$ und nennen E_j den von $\{e_1 \otimes z^j, \dots, e_m \otimes z^j\}$ aufgespannten $k((t))$ -Untervektorraum von $\psi_* \psi^* E$, so erhalten wir

$$\psi_* \psi^* \nabla(e_i \otimes z^j) = (A(t) + id \frac{j}{n} \frac{dt}{t}) e_i \otimes z^j \in E_j \otimes \Omega^1$$

Also ist E_j ein Unterverzweigung von $\psi_* \psi^* E$, der offenbar isomorph zu $E \otimes L_j$ ist und das liefert die Behauptung.

3.7 Lemma Seien $k((t)) \subset k((z))$ und ψ wie in 3.1. Wir bezeichnen mit L_j wieder den Zusammenhang $(k((t)), \nabla_j)$ mit $\nabla_j(1) = \frac{j}{n} \frac{dt}{t}$. Desweiteren sei E ein $k((t))$ -Zusammenhang und M ein irreduzibler $k((t))$ -Zusammenhang, so daß ψ^*E ein Unterzusammenhang von ψ^*M ist. Dann gibt es einen flachen Isomorphismus

$$E \cong M \otimes L_j \quad \text{für ein } j \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Das j ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir haben also $\psi^*E \subset \psi^*M$ und somit nach 3.6 auch

$$(*) \quad \psi_*\psi^*E \cong \bigoplus_{j=0}^{n-1} E \otimes L_j \subset \psi_*\psi^* \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} M \otimes L_i.$$

Wir bemerken, daß mit M auch die $M \otimes L_i$ irreduzibel sind. (Denn: Wir definieren L_i^{-1} durch $(k((t)), \nabla_{-i})$ mit $\nabla_{-i}(1) = -\nabla_i(1)$. Ist dann P ein von Null verschiedener Unterzusammenhang von $M \otimes L_i$, so ist $P \otimes L_i^{-1}$ ein Unterzusammenhang von $M \otimes L_i \otimes L_i^{-1} \cong M$, also isomorph zu M und somit ist P auch isomorph zu $M \otimes L_i$.) Wegen $(*)$ gibt es insbesondere einen von Null verschiedenen flachen Homomorphismus $\phi : E \rightarrow M \otimes L_j$ für ein j . Jedoch ist das Bild von ϕ dann ein von Null verschiedener Unterzusammenhang von $M \otimes L_j$, also muß ϕ surjektiv sein. Aber nach Voraussetzung ist der Rang von M mindestens so groß, wie der von E und daher ist $\text{Rang } E = \text{Rang } M$ und ϕ somit ein Isomorphismus. Ist $M \otimes L_i \cong E \cong M \otimes L_j$ für $i \neq j$, so muß $L_i \otimes L_j^{-1}$ isomorph zu dem trivialen Zusammenhang $(k((t)), d)$ sein. Aber die Matrix von $L_i \otimes L_j^{-1}$ in der Basis $1 \otimes 1$ ist $\frac{i-j}{n} \frac{dt}{t}$. Also ist nach 2.5 Null keine Matrixdarstellung von $L_i \otimes L_j^{-1}$, ein Widerspruch! Daher ist j eindeutig bestimmt. Das war's.

3.8 Definition Sei $k((t)) \subset k((z))$ und μ_n wie in 3.1. Dann sagen wir ein $k((z))$ -Zusammenhang E ist μ_n -äquivariant, falls eine Matrixdarstellung A von E existiert mit $\sigma(A) = A$ für alle σ aus μ_n . Ein $k((z))$ -Zusammenhang M heißt μ_n -irreduzibel, falls er selbst μ_n -äquivariant ist und jeder μ_n -äquivariante Unterzusammenhang entweder isomorph zu M oder gleich 0 ist.

3.9 Lemma Seien $k((t)) \subset k((z))$, ψ und μ_n wie in 3.1. Dann gilt:

- (i) Ist F ein μ_n -äquivarianter $k((z))$ -Zusammenhang, so ist $\sigma^*F \cong F$ für alle $\sigma \in \mu_n$.
- (ii) Für jeden μ_n -äquivarianten $k((z))$ -Zusammenhang F gibt es einen $k((t))$ -Zusammenhang E mit $\psi^*E = F$.
- (iii) Ist E ein $k((t))$ -Zusammenhang, so ist ψ^*E μ_n -äquivariant.
- (iv) M ist ein irreduzibler $k((t))$ -Zusammenhang genau dann, wenn ψ^*M ein μ_n -irreduzibler $k((z))$ -Zusammenhang ist.
- (v) Ein Rang 1 Zusammenhang L über $k((z))$ ist μ_n -äquivariant genau dann, wenn σ^*L isomorph zu L ist für alle $\sigma \in \mu_n$.

Beweis. (i) und (ii) Per Definition besitzt ein μ_n -äquivarianter Zusammenhang F eine Basis $\{e_1, \dots, e_m\}$, so daß die Matrix $A(z)$ von F in dieser Basis $\sigma(A(z)) = A(z)$ für alle $\sigma \in \mu_n$ erfüllt. Dann definiert $e_i \mapsto e_i \otimes 1$ einen Isomorphismus von F nach σ^*F (wegen 3.2 (ii)). Außerdem sagt uns die Galoistheorie, daß wir $A(z)$ auch als $B(z^n)$ schreiben können. Wir definieren einen Zusammenhang $E = \bigoplus_{i=1}^m k((t))e_i$ mit Matrix $B(t)$ (in der Basis $\{e_i\}$). Dann ist offenbar $\psi^*E = F$ (wegen 3.2 (iii)).

(iii) Folgt direkt aus 3.2 (iii).

(iv) Sei M ein irreduzibler $k((t))$ -Zusammenhang. Ist F nun ein von Null verschiedener μ_n -äquivarianter Unterzusammenhang von ψ^*M , so folgt aus (ii) die Existenz eines $k((t))$ -Zusammenhangs E mit $F = \psi^*E$. Dann liefert uns 3.7, daß der Rang von M gleich dem von E ist, also $F \cong \psi^*M$.

Sei nun ψ^*M μ_n -irreduzibel. Ist E ein von Null verschiedener Unterzusammenhang von M , so ist nach (iii) ψ^*E ein von Null verschiedener μ_n -äquivarianter Unterzusammenhang von ψ^*M und somit isomorph zu ψ^*M . Also ist E isomorph zu M .

(v) Die eine Richtung folgt aus (i). Sei nun σ^*L isomorph zu L für ein $\sigma \in \mu_n$. Nach 2.5 existiert ein $e \in L$ und ein $\omega \in k[\frac{1}{z}]\frac{dz}{z}$ mit $\nabla e = \omega e$. Dann ist die Matrix von σ^*L in der Basis $e \otimes 1$ gleich $\sigma(\omega) \in k[\frac{1}{z}]\frac{dz}{z}$. Schickt nun der Isomorphismus von σ^*L nach L den Basisvektor $e \otimes 1$ auf ein $f \in L$, so muß gelten $\nabla f = \sigma(\omega)f$. Aus 2.5 folgt, daß es ein $p \in \mathbb{Z}$ geben muß mit $\omega = \sigma(\omega) + p\frac{dz}{z}$. Aber wir haben $\sigma(\frac{dz}{z}) = \frac{dz}{z}$ und daher muß p gleich 0 sein, also $\omega = \sigma(\omega)$. Das liefert die Behauptung.

3.10 Lemma Seien n und $m \in \mathbb{N}$ und $N := mn$. Wir bezeichnen mit ψ_n^N den Körperhomomorphismus $\psi_n^N : k((t^{1/n})) \longrightarrow k((t^{1/N}))$, $t^{1/n} \mapsto (t^{1/N})^m$. Desweiteren sei L ein μ_m -äquivarianter $k((t^{1/N}))$ -Zusammenhang vom Rang 1. Dann ist für ein $\bar{\sigma} \in \mu_N/\mu_m$ und einen Vertreter $\sigma \in \mu_N$ der Ausdruck $\bar{\sigma}^*L := \sigma^*L$ wohl definiert (nach 3.9 (i)). Außerdem sagt uns 3.9 (ii), daß es einen $k((t^{1/n}))$ -Zusammenhang L_0 gibt mit $\psi_n^{N*}L_0 = L$. Dann gilt:

$$\bigoplus_{\sigma \in \mu_N/\mu_m} \sigma^*L \cong \psi_n^{N*} \bigoplus_{\tau \in \mu_n} \tau^*L_0$$

Beweis. Sei $\omega(t^{1/n})$ die Matrix von L_0 bezüglich eines Basisvektors e . Dann ist die Matrix von L in der Basis $e \otimes 1$ gleich $\omega((t^{1/N})^m)$. Sei σ ein primitives Element von μ_N , dann können wir für jedes Element aus μ_N/μ_m genau einen Vertreter aus $\{id, \sigma, \dots, \sigma^{n-1}\}$ wählen und wir haben $\mu_n = \{id, \sigma^m, \dots, \sigma^{m(n-1)}\}$. Wir müssen also nur noch sehen, daß die Matrix von $\sigma^j L$ in der Basis $e \otimes 1$ gleich der Matrix von $\psi_n^{N*} \sigma^{mj*} L_0$ in derselben Basis ist für $j = 0, \dots, n-1$. Das folgt aber direkt aus 3.2, denn betrachten wir σ als N -te Einheitswurzel, so ist die Matrix von $\sigma^{mj*} L_0$ gleich $\omega(\sigma^{mj} t^{1/n})$ und somit ist die von $\psi_n^{N*} \sigma^{mj*} L_0$ gleich $\omega(\sigma^{mj} (t^{1/N})^m) = \omega((\sigma^j t^{1/N})^m)$ und das ist auch die Matrix von $\sigma^j L$. Fertig.

Der folgende Satz ist ein Lemma von Beilinson (siehe ([B], Lemma 1.))

3.11 Satz Sei $k((z)) \supset k((t))$ eine Körpererweiterung mit $z^n = t$, $\mu_n = \text{Gal}(k((z))/k((t)))$ und sei ψ der Körperhomomorphismus $\psi : k((t)) \longrightarrow k((z))$, $t \mapsto z^n$. Wir bezeichnen mit

$\mathcal{M}^{irr,n}(t)$ die Kategorie der irreduziblen formellen Rang n Zusammenhänge über $k((t))$ und mit $\mathcal{P}(z)$ die Kategorie der formellen Rang 1 Zusammenhänge L über $k((z))$, die zusätzlich $\sigma^*L \not\cong \tau^*L$ für $\sigma \neq \tau \in \mu_n$ erfüllen. (Ein Morphismus zwischen zwei Objekten aus $\mathcal{M}^{irr,n}(t)$ oder $\mathcal{P}(z)$ ist ein flacher Homomorphismus und somit nach 2.7 entweder die Nullabbildung oder ein Isomorphismus.) Seien $|\mathcal{P}(z)|$ und $|\mathcal{M}^{irr,n}(t)|$ die entsprechenden Mengen von Isomorphieklassen. Dann ist die Abbildung

$$\psi_* : |\mathcal{P}(z)| \longrightarrow |\mathcal{M}^{irr,n}(t)|, \quad L \mapsto \psi_*L$$

eine Bijektion.

Beweis (nach Beilinson). Zuerst müssen wir sehen, daß unsere Abbildung auch wirklich da landet, wo sie landen soll. Das heißt wir zeigen: Ist $L \in \mathcal{P}(z)$, so ist $\psi_*L \in \mathcal{M}^{irr,n}(t)$. Nach 3.4 ist $\psi^*\psi_*L = \bigoplus_{\sigma \in \mu_n} \sigma^*L$, daher ist $\psi^*\psi_*L$ μ_n -irreduzibel. Denn jeder Unterzusammenhang von $\psi^*\psi_*L$ ist nach 3.5 isomorph zu einer direkten Summe von Rang 1 Zusammenhängen σ^*L für gewisse $\sigma \in \mu_n$. Da aber die σ^*L paarweise nicht isomorph sind, muß jeder von Null verschiedene μ_n -äquivariante Unterzusammenhang E eine direkte Summe von allen σ^*L , also gleich $\psi^*\psi_*L$ sein. (Ansonsten gäbe es ein $\tau \in \mu_n$ mit $\tau^*E \not\cong E$, was 3.9 (i) widerspräche.) Also ist $\psi^*\psi_*L$ μ_n -irreduzibel und somit ist (wegen 3.9 (iv)) ψ_*L irreduzibel. Wir haben also gezeigt: $\psi_*L \in \mathcal{M}^{irr,n}(t)$. Offenbar ist ψ_* injektiv auf den Isomorphieklassen (ψ_*L ist ja der selbe Zusammenhang wie L , nur aufgefasst als Zusammenhang über $k((t))$). Wir müssen also nur noch zeigen: Jeder irreduzible $k((t))$ -Zusammenhang M vom Rang n ist isomorph zu einem ψ_*L für ein $L \in \mathcal{P}(z)$. Es reicht, wenn wir zeigen, daß es für jedes $M \in \mathcal{M}^{irr,n}(t)$ ein $L \in \mathcal{P}(z)$ gibt, das folgendes erfüllt:

$$\psi^*M \cong \psi^*\psi_*L \cong \bigoplus_{\sigma \in \mu_n} \sigma^*L$$

(Denn dann liefert 3.7 einen Isomorphismus $M \cong \psi_*L \otimes L_j$, dabei ist L_j der Zusammenhang $(k((t)), \nabla_j)$ mit $\nabla_j(1) = \frac{j}{n} \frac{dt}{t}$. Definieren wir $L_{j,z}$ als den Zusammenhang $(k((z)), \nabla_{j,z})$ mit $\nabla_{j,z}(1) = j \frac{dz}{z}$, so erhalten wir $M \cong \psi_*(L \otimes L_{j,z})$ und das ist die Behauptung.)

Sei also $M \in \mathcal{M}^{irr,n}(t)$. Sind m und N zwei natürliche Zahlen und m teilt N , so bezeichnen wir mit ψ_m^N die standard Inklusion $\psi_m^N : k((t^{1/m})) \hookrightarrow k((t^{1/N}))$ und setzen $\psi^N := \psi_1^N$. Der Satz von Levelt (3.3) besagt, daß für ein genügend großes $N \in \mathbb{N}$ $\psi^{N*}M$ diagonalisierbar ist. Vergrößern wir N ist dies sicherlich immer noch richtig, daher setzen wir ohne Einschränkung $N := nm$ ($m \in \mathbb{N}$ groß genug). Es gibt also Rang 1 Zusammenhänge L_α über $k((t^{1/N}))$, $\alpha = 1, \dots, n$, mit $\psi^{N*}M = \bigoplus_{\alpha=1}^n L_\alpha$. Möglicherweise sind einige L_α isomorph zu anderen L_β , wir schreiben daher

$$\psi^{N*}M = \bigoplus_{j=1}^p P_j$$

mit $P_j \cong \bigoplus_1^{n_j} L_j$ und $L_j \not\cong L_i$ für $i \neq j$. Wir setzen $L := L_1$ und $P := P_1$. Die Elemente σ aus μ_N , die $\sigma^*L \cong L$ erfüllen, bilden eine Untergruppe, die wir mit $\mu_{m'}$ identifizieren können. Wir schreiben $N = m's$ für ein $s \in \mathbb{N}$. Nun ist L also nach 3.9 (v) $\mu_{m'}$ -äquivariant

und somit auch P . Insbesondere ist für ein $\bar{\sigma} \in \mu_N/\mu_{m'}$ und einen Vertreter $\sigma \in \mu_N$ der Ausdruck $\bar{\sigma}^*P := \sigma^*P$ wohl definiert. Wir wollen nun zeigen:

$$\bigoplus_{\sigma \in \mu_N/\mu_{m'}} \sigma^*P \cong \psi^{N^*}M \quad (\star)$$

Sei $id \neq \sigma \in \mu_N/\mu_{m'}$. Die μ_N -Äquivarianz von $\psi^{N^*}M$ liefert, daß σ^*P ein Unterzusammenhang von $\psi^{N^*}M$ ist. Aber wir haben $\sigma^*L \not\cong L$ (per Definition von $\mu_{m'}$), daher ist $\sigma^*P \subset P_{j_\sigma}$ für ein $j_\sigma \neq 1$. Offenbar ist $j_\sigma \neq j_\tau$ für $\tau \neq \sigma \in \mu_N/\mu_{m'}$. Also ist $\bigoplus_{\sigma \in \mu_N/\mu_{m'}} \sigma^*P$ ein Unterzusammenhang von $\psi^{N^*}M$. Nach 3.9 (ii) und 3.10 gibt es einen $k((t^{1/s}))$ -Zusammenhang L_0 mit

$$\bigoplus_{\sigma \in \mu_N/\mu_{m'}} \sigma^*P \cong \bigoplus_1^{n_1} \bigoplus_{\sigma \in \mu_N/\mu_{m'}} \sigma^*L \cong \psi_s^{N^*} \bigoplus_1^{n_1} \bigoplus_{\tau \in \mu_s} \tau^*L_0 \stackrel{3.4}{\cong} \psi_s^{N^*} \psi^{s^*} \psi_*^s \bigoplus_1^{n_1} L_0 \cong \psi^{N^*} \psi_*^s \bigoplus_1^{n_1} L_0$$

Daran sehen wir (mit 3.9 (iii)), daß $\bigoplus_{\sigma \in \mu_N/\mu_{m'}} \sigma^*P$ ein μ_N -äquivarianter Unterzusammenhang von $\psi^{N^*}M$ ist. Aber nach 3.9 (iv) ist $\psi^{N^*}M$ μ_N -irreduzibel und wir erhalten die angekündigte Isomorphie (\star) . Daraus können wir folgern, daß P $\mu_{m'}$ -irreduzibel ist. Denn ein von Null verschiedener $\mu_{m'}$ -äquivarianter Unterzusammenhang E von P ist nach 3.5 isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von L und liefert daher genau wie oben einen μ_N -äquivarianten Unterzusammenhang $\bigoplus_{\sigma \in \mu_N/\mu_{m'}} \sigma^*E$ von $\psi^{N^*}M$. Daher ist $\bigoplus \sigma^*E \cong \psi^{N^*}M \cong \bigoplus \sigma^*P$ und somit $E \cong P$.

Nun ist also L ein $\mu_{m'}$ -äquivarianter Unterzusammenhang des $\mu_{m'}$ -irreduziblen P 's und somit isomorph zu P . Das heißt

$$\psi^{N^*}M \cong \bigoplus_{\sigma \in \mu_N/\mu_{m'}} \sigma^*L \cong \psi_s^{N^*} \bigoplus_{\tau \in \mu_s} \tau^*L_0 \cong \bigoplus_{\alpha=1}^n L_\alpha$$

Also ist $s = n$, damit auch $m = m'$. Insbesondere ist L also μ_m -äquivariant und L_0 ein Zusammenhang über $k(((t^{1/N})^m)) = k((z))$ mit $\psi_n^{N^*}L_0 = L$. Fassen wir nun alles zusammen, so erhalten wir

$$\psi_n^{N^*}(\psi^*M) \cong \psi^{N^*}M \cong \bigoplus_{\sigma \in \mu_N/\mu_m} \sigma^*L \cong \psi_n^{N^*} \bigoplus_{\tau \in \mu_n} \tau^*L_0$$

Also $\psi^*M \cong \bigoplus_{\tau \in \mu_n} \tau^*L_0$ und die τ^*L_0 sind paarweise nicht isomorph (da die σ^*L , $\sigma \in \mu_N/\mu_m$, es nicht sind), das heißt $L_0 \in \mathcal{P}(z)$ und wir sind fertig.

4 Die Gabber-Katz-Fortsetzung

Dieser Abschnitt ist der eigentliche Kern dieser Arbeit. Wir werden einen Satz von O. Gabber und N. Katz (siehe ([K-1],(2.4.10) Theorem) oder auch ([K-2], Main Theorem 1.4.1.)) beweisen, nämlich, daß sich jeder formelle Zusammenhang zu einem im Unendlichen regulär singulären Zusammenhang auf ganz \mathbb{G}_m in kanonischer Weise fortsetzen läßt. Unser Beweis liefert aber im Unterschied zu dem von Gabber und Katz ein konkretes Konstruktionsverfahren dieser Fortsetzung und zusätzlich erhalten wir, daß die Fortsetzung die Prima-Standard-Zerlegung des formellen Zusammenhangs respektiert.

In diesem Abschnitt benutzen wir folgende Notationen: $\mathbb{G}_{m,t} = \text{Spec } k[t, \frac{1}{t}]$; wir schreiben \mathbb{G}_m , falls die Variable klar ist. φ_t sei der Morphismus von Schematas $\varphi_t : \text{Spec } k((t)) \rightarrow \mathbb{G}_{m,t}$, der von der Inklusion $k[t, \frac{1}{t}] \hookrightarrow k((t))$ induziert wird. Für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$ sei $\pi^N : \mathbb{G}_{m,t^{1/N}} \rightarrow \mathbb{G}_{m,t}$ der Morphismus, der von der Inklusion $k[t, \frac{1}{t}] \hookrightarrow k[t^{1/N}, \frac{1}{t^{1/N}}]$ induziert wird. Wir bezeichnen mit ψ^N den standard Körperhomomorphismus $k((t)) \hookrightarrow k((t^{\frac{1}{N}}))$ und mit \wp den einen Punkt aus $\text{Spec } k((t))$ (also das Null-Ideal in $k((t))$).

4.1 Definition Sei (\mathcal{E}, ∇) ein Zusammenhang auf $\mathbb{G}_{m,t}$. Dann definieren wir

$$Form_t(\mathcal{E}, \nabla) := ((\varphi_t^* \mathcal{E})(\wp), (\varphi_t^* \nabla)(\wp))$$

Dabei ist $(\varphi_t^* \mathcal{E})(\wp)$ das inverse Bild von \mathcal{E} unter dem Morphismus φ_t , ausgewertet in der offenen Menge $\{\wp\}$ und $(\varphi_t^* \nabla)(\wp)$ ist die Abbildung, die in natürlicher Weise von ∇ auf $(\varphi_t^* \mathcal{E})(\wp)$ induziert wird. Wir schreiben auch kurz $Form_t \mathcal{E}$.

Form steht für Formalisierung und das hat seine Berechtigung, denn $Form_t \mathcal{E}$ ist ein formeller Zusammenhang über $k((t))$. Wir wollen das einmal auseinandernehmen: Wir haben

$$(\varphi_t^{-1} \mathcal{E})(\wp) = \lim_{U \supset \varphi_t(\wp)} \mathcal{E}(U) = \text{Halm von } \mathcal{E} \text{ im Punkt } \varphi_t(\wp) = \mathcal{E}_{\varphi_t(\wp)}$$

Ebenso

$$(\varphi_t^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m})(\wp) = \lim_{U \supset \varphi_t(\wp)} \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}(U) = \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m, \varphi_t(\wp)} = k[t, \frac{1}{t}]_{(0)} = k(t)$$

(Daher ist $\mathcal{E}_{\varphi_t(\wp)}$ ein $k(t)$ -Vektorraum.) Außerdem ist $\mathcal{O}_{\text{Spec } k((t))}(\wp) = k((t))$. Also insgesamt

$$(\varphi_t^* \mathcal{E})(\wp) = \left((\varphi_t^{-1} \mathcal{E}) \otimes_{\varphi_t^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}} \mathcal{O}_{\text{Spec } k((t))} \right) (\wp) = \mathcal{E}_{\varphi_t(\wp)} \otimes_{k(t)} k((t)) \left(\cong \bigoplus_1^{\text{Rang } \mathcal{E}} k((t)) \right)$$

Bezeichnen wir mit $\nabla_{\varphi_t(\wp)}$ den von ∇ auf den Halm $\mathcal{E}_{\varphi_t(\wp)}$ induzierten k -Vektorraumhomomorphismus und mit d die Differentialabbildung auf $k((t))$, so ist also $Form_t(\mathcal{E}, \nabla)$ gleich dem formellen Zusammenhang $(\mathcal{E}_{\varphi_t(\wp)} \otimes_{k(t)} k((t)), \nabla_{\varphi_t(\wp)} \otimes d)$. Offensichtlich induziert jeder flache Morphismus $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}$ einen flachen Homomorphismus $Form_t \mathcal{G} \rightarrow Form_t \mathcal{E}$. Ist $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Zusammenhängen, so liefert $Form_t$ eine exakte Sequenz von formellen Zusammenhängen $0 \rightarrow Form_t \mathcal{E} \rightarrow Form_t \mathcal{F} \rightarrow Form_t \mathcal{G} \rightarrow 0$.

4.2 Lemma

- (i) $Form_t$ ist ein exakter Funktor von der Kategorie der Zusammenhänge auf $\mathbb{G}_{m,t}$ in die Kategorie der formellen Zusammenhänge über $k((t))$.
- (ii) Seien \mathcal{E} und \mathcal{G} zwei Zusammenhänge auf \mathbb{G}_m , so ist

$$Form(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}} \mathcal{G}) = Form(\mathcal{E}) \otimes_{k((t))} Form(\mathcal{G})$$

und

$$Form(\mathcal{E} \oplus \mathcal{G}) = Form(\mathcal{E}) \oplus Form(\mathcal{G})$$

(Die Gleichheit ist jeweils ein flacher Isomorphismus.)

- (iii) Sei (\mathcal{P}, ∇) ein Zusammenhang auf $\mathbb{G}_{m,t}$. Dann gilt

$$\psi^{N^*} Form_t(\mathcal{P}, \nabla) = Form_{t^{1/N}}(\pi^{N^*}(\mathcal{P}, \nabla))$$

Beweis. (i) haben wir oben schon gesehen und (ii) ist trivial. Das ist (iii) eigentlich auch, aber wir schreiben es trotzdem kurz auf. Wir setzen $z := t^{1/N}$ und bezeichnen mit d die Differentialabbildung auf $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,z}}$ und mit d_x die auf $k((x))$. Dann haben wir $Form_t(\mathcal{P}, \nabla) = (\mathcal{P}_{\varphi_t(\varphi)} \otimes_{k(t)} k((t)), \nabla \otimes d_t)$. Also erhalten wir

$$\psi^{N^*} Form_t(\mathcal{P}, \nabla) = (\mathcal{P}_{\varphi_t(\varphi)} \otimes_{k(t)} k((z)), \nabla \otimes d_z)$$

Auf der anderen Seite ist

$$\begin{aligned} Form_z(\pi^{N^*}(\mathcal{P}, \nabla)) &= ((\pi^{N^*}\mathcal{P})_{\varphi_z(\varphi)} \otimes_{k(z)} k((z)), \pi^{N^*}\nabla \otimes d_z) \\ &= \left((\mathcal{P}_{\pi^N(\varphi_z(\varphi))} \otimes_{\mathcal{O}_{\pi^N(\varphi_z(\varphi))}} \mathcal{O}_{\varphi_z(\varphi)}) \otimes_{k(z)} k((z)), (\nabla \otimes d) \otimes d_z \right) \end{aligned}$$

Aber $\pi^N(\varphi_z(\varphi))$ ist das Null-Ideal in $k[t, \frac{1}{t}]$, also gleich $\varphi_t(\varphi)$. Daher haben wir

$$Form_z(\pi^{N^*}(\mathcal{P}, \nabla)) = ((\mathcal{P}_{\varphi_t(\varphi)} \otimes_{k(t)} k(z)) \otimes_{k(z)} k((z)), (\nabla \otimes d) \otimes d_z) = (\mathcal{P}_{\varphi_t(\varphi)} \otimes_{k(t)} k((z)), \nabla \otimes d_z).$$

Und fertig.

4.3 Definition Sei (E, ∇) ein formeller Zusammenhang über $k((t))$ und (\mathcal{E}, ∇) ein Zusammenhang auf $\mathbb{G}_{m,t}$. Dann sagen wir \mathcal{E} ist eine *Fortsetzung von E auf $\mathbb{G}_{m,t}$* , falls $Form_t \mathcal{E} = E$ ist.

4.4 Definition Wir sagen ein Zusammenhang (\mathcal{F}, ∇) vom Rang n auf \mathbb{G}_m ist eine *sukzessive Extension des trivialen Zusammenhangs (\mathcal{O}, d)* , falls \mathcal{F} eine Filtrierung $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ besitzt mit Zusammenhängen \mathcal{F}_i , die folgende Eigenschaften erfüllen:

- (i) \mathcal{F}_1 ist isomorph zum trivialen Zusammenhang (\mathcal{O}, d) .
- (ii) Für alle $i \geq 2$ gibt es eine exakte Sequenz von Zusammenhängen $0 \rightarrow \mathcal{F}_{i-1} \rightarrow \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$.

Wir bezeichnen die Isomorphieklasse von $0 \rightarrow \mathcal{F}_{i-1} \rightarrow \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$ in $Ext^1(\mathcal{O}, \mathcal{F}_{i-1})$ mit $[\mathcal{F}_i]$ und mit $Form[\mathcal{F}_i]$ die Isomorphieklasse von $0 \rightarrow Form\mathcal{F}_{i-1} \rightarrow Form\mathcal{F}_i \rightarrow k((t)) \rightarrow 0$ in $Ext^1(k((t)), Form\mathcal{F}_{i-1})$.

4.5 Definition Sei U ein formeller Zusammenhang über $k((t))$ und die Matrix von U in der Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ sei (nilpotenter Jordanblock) dt/t . Sei U^i der formelle Zusammenhang, der durch $\{e_1, \dots, e_i\}$ erzeugt wird und in dieser Basis die Matrixdarstellung (nilpotenter $i \times i$ -Jordanblock) dt/t besitzt. Dann ist U^1 isomorph zu $(k((t)), d)$ und für alle $i \geq 2$ erhalten wir eine exakte Sequenz von Zusammenhängen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U^{i-1} & \longrightarrow & U^i & \longrightarrow & (k((t)), d) \longrightarrow 0 \\ & & e_j & \longmapsto & e_j & \longmapsto & 0 \\ & & & & e_i & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Wir nennen $U^1 \subset U^2 \subset \dots \subset U^n = U$ die *standard Filtrierung von U* und bezeichnen mit $[U^i]$ die Isomorphieklassen von $0 \longrightarrow U^{i-1} \longrightarrow U^i \longrightarrow k((t)) \longrightarrow 0$ in $Ext^1(k((t)), U^{i-1})$.

Nun sind wir endlich soweit den Kernsatz dieser Arbeit formulieren zu können. Es ist ein Satz von O. Gabber und N. Katz (siehe ([K-1], (2.4.10) Theorem) oder auch ([K-2], Main Theorem 1.4.1.)).

4.6 Satz (Gabber-Katz) Sei E ein formeller Zusammenhang über $k((t))$ und sei $E = \bigoplus_j (M_j \otimes \bigoplus_i U_{ji})$ die Prima-Standard-Zerlegung von E und $A_{ji} \frac{dt}{t}$ die Matrix von U_{ji} (siehe 2.17). Sei $m_j := \text{Rang } M_j$, $n_{ji} := \text{Rang } U_{ji}$ und $U_{ji}^1 \subset \dots \subset U_{ji}^{n_{ji}}$ die standard Filtrierung von U_{ji} . Dann gibt es Zusammenhänge \mathcal{M}_j und \mathcal{U}_{ji} Fortsetzungen von M_j beziehungsweise U_{ji} auf $\mathbb{G}_{m,t}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für alle i, j ist \mathcal{U}_{ji} regulär singular in ∞ und außerdem eine sukzessive Extension des trivialen Zusammenhangs mit einer Filtrierung $\mathcal{U}_{ji}^1 \subset \dots \subset \mathcal{U}_{ji}^{n_{ji}}$, die für alle r $\text{Form}[\mathcal{U}_{ji}^r] = [U_{ji}^r]$ erfüllt.
- (ii) Die \mathcal{M}_j sind regulär singular in ∞ und $\pi^{m_j*} \mathcal{M}_j$ ist isomorph zu einer direkten Summe von Rang 1 Zusammenhängen auf $\mathbb{G}_{m,t^{1/m_j}}$, die ebenfalls regulär singular im Unendlichen sind.
- (iii) Die \mathcal{U}_{ji} und \mathcal{M}_j sind mit den Eigenschaften (i) beziehungsweise (ii) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Insgesamt gibt es also eine Fortsetzung $\bigoplus_j (\mathcal{M}_j \otimes \bigoplus_i \mathcal{U}_{ji})$ von E auf $\mathbb{G}_{m,t}$, die regulär singular in ∞ ist, die die Prima-Standard-Zerlegung von E respektiert und mit den Eigenschaften (i) und (ii) eindeutig (bis auf Isomorphie) bestimmt ist.

Wir werden im folgenden Schritt für Schritt erst die Fortsetzung der U_{ji} , dann die von formellen Rang 1 Zusammenhängen und schließlich die Fortsetzung von irreduziblen Zusammenhängen konstruieren.

4.1 Konstruktion einer Fortsetzung der U_{ji}

Sei (U, ∇) ein regulär singularer formeller Zusammenhang über $k((t))$, dessen Matrix in einer Basis — sagen wir $\{e_1, \dots, e_n\}$ — gleich Adt/t ist mit einem nilpotenten Jordanblock A . Sei $U^1 \subset \dots \subset U^n$ die standard Filtrierung von U . Wir konstruieren nun einen Zusammenhang (\mathcal{U}, ∇) auf \mathbb{G}_m wie folgt: Sei $\mathcal{U} := \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m} e_i$ die freie Garbe von $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$ -Moduln mit Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$. (Für eine offene Teilmenge V von \mathbb{G}_m ist $\mathcal{U}(V) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}(V) e_i$.) Wir

definieren eine Zusammenhangsabbildung $\nabla : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U} \otimes \Omega_{\mathbb{G}_m}^1$, indem wir die (globale) Matrix von ∇ bezüglich der Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ gleich Adt/t setzen. Wir bemerken, daß die Einträge von Adt/t entweder gleich 0 oder dt/t sind, beides globale Schnitte von $\Omega_{\mathbb{G}_m}^1$, daher bildet ∇ in der Tat nach $\mathcal{U} \otimes \Omega_{\mathbb{G}_m}^1$ ab. Wir zeigen nun

- (a) (\mathcal{U}, ∇) ist wohl definiert, das heißt : Ist $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ eine andere Basis von U , bezüglich welcher die Matrix von U ebenfalls gleich Adt/t ist, so ist $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ auch eine andere Basis von \mathcal{U} . (Die bezüglich $\{e_i\}$ und $\{e'_i\}$ konstruierten Zusammenhänge sind also identisch.)
- (b) (\mathcal{U}, ∇) ist eine Fortsetzung von (U, ∇) , die regulär singular in ∞ ist. Außerdem ist \mathcal{U} eine sukzessive Extension des trivialen Zusammenhangs mit einer Filtrierung $\mathcal{U}_1 \subset \dots \subset \mathcal{U}_n = \mathcal{U}$, die für alle i $Form[\mathcal{U}_i] = [U^i]$ erfüllt.
- (c) \mathcal{U} ist mit der Eigenschaft (b) eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt.

Beweis von (a). Besitzt U in den beiden Basen $\{e_1, \dots, e_n\}$ und $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ die Matrixdarstellung Adt/t , so gibt es eine $k((t))$ -lineare Abbildung (die wir mit der entsprechenden Matrix geschrieben in der Basis $\{e'_i\}$ identifizieren) $T \in GL(n, k((t)))$ mit $e_i = Te'_i$. Dann erfüllt T

$$A \frac{dt}{t} = T^{-1} A \frac{dt}{t} T + T^{-1} dT$$

oder äquivalenterweise

$$\frac{d}{dt} T = \frac{1}{t} (TA - AT).$$

Wir wollen nun zeigen, daß T konstant ist; die Behauptung folgt dann unmittelbar. Wir schreiben $T = \sum_{j=-m}^{\infty} t^j T_j$ für konstante Matrizen T_j und ein $m \in \mathbb{N}$. Wir erhalten:

$$\sum_{j=-m}^{\infty} j t^{j-1} T_j = \sum_{j=-m}^{\infty} t^{j-1} (T_j A - AT_j)$$

Also erfüllen die T_j

$$T_0 A = AT_0 \text{ und } j T_j = T_j A - AT_j \text{ für } j \neq 0.$$

Um $T_j = 0$ für $j \neq 0$ schließen zu können, benutzen wir folgendes Lemma:

4.7 Lemma Seien $A \in \text{End}(k^m)$ und $B \in \text{End}(k^n)$ ohne gemeinsame Eigenwerte. Dann ist die Abbildung $\text{Hom}(k^n, k^m) \longrightarrow \text{Hom}(k^n, k^m)$, $X \mapsto AX - XB$ bijektiv.

Beweis des Lemmas. (Nach ([M], II Lemma(5.5))) Es reicht die Injektivität zu zeigen. Sei also $AX = XB$. Sei P ein Polynom mit Koeffizienten in k . Dann gilt $P(A)X = XP(B)$ (denn $A^j X = A^{j-1} X B = \dots = X B^j$). Ist P nun das minimale Polynom von A , so liefert der Satz von Cayley-Hamilton $P(A) = 0$, also auch $XP(B) = 0$. Aber nach Voraussetzung ist $P(B)$ invertierbar. (Denn $P(x) = \prod (x - \lambda_i)$, λ_i Eigenwert von A . Daher ist $P(B) = \prod (B - \lambda_i Id)$ und nach Voraussetzung ist $(B - \lambda_i Id)$ invertierbar.) Somit ist $X = 0$. Das beweist das Lemma.

In unserem Fall läßt sich das wie folgt anwenden. Wir haben $(jId + A)T_j - T_j A = 0$. Der

einzigem Eigenwert von $(jId + A)$ ist gleich j (da A ein nilpotenter Jordanblock ist) und daher verschieden von dem einzigen Eigenwert von A , der ja Null ist. Also sagt uns das Lemma: $T_j = 0$ für $j \neq 0$, und wir sind fertig.

Beweis von (b). Offenbar ist (U, ∇) eine Fortsetzung von (U, ∇) ($Form\mathcal{U} = \bigoplus_i \mathcal{O}_{\varphi(\varphi)} e_i \otimes k((t)) = \bigoplus_i k((t)) e_i = U$ und die Matrix von $Form\mathcal{U}$ in der Basis $\{e_i \otimes 1\}$ ist genau Adt/t .) Ebenso sehen wir sofort an der Matrix von \mathcal{U} , daß \mathcal{U} regulär singular im Unendlichen ist. Denn: Sei $u = \frac{1}{t}$, dann ist $A \frac{dt}{t} = -A \frac{du}{u}$. Also hat die Matrix von \mathcal{U} einen einfachen Pol in ∞ . (Ist $(\bar{U}, \bar{\nabla})$ die offensichtliche Fortsetzung von (U, ∇) auf \mathbb{A}_{∞}^1 (vgl.1.4), bildet daher $\bar{\nabla}$ nach $\bar{U} \otimes \Omega_{\mathbb{A}_{\infty}^1}^1(\log \infty)$ ab.) Unmittelbar aus der Definition von \mathcal{U} folgt schließlich auch, daß \mathcal{U} eine sukzessive Extension des trivialen Zusammenhanges ist mit einer Filtrierung wie in der Behauptung.

Beweis von (c). Sei \mathcal{F} eine sukzessive Extension des trivialen Zusammenhanges mit einer Filtrierung $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$, die für alle i $Form[\mathcal{F}_i] = [U^i]$ erfüllt. Wir zeigen nun: (\star) $Form$ induziert für alle $i \geq 2$ eine Bijektion von $Ext^1(\mathcal{O}, \mathcal{F}_{i-1})$ nach $Ext^1(k((t)), U^{i-1})$. Die Behauptung folgt unmittelbar. Denn per Definition haben wir $\mathcal{U}_1 \cong \mathcal{F}_1 (\cong (\mathcal{O}, d))$. Ist außerdem \mathcal{U}_{i-1} isomorph zu \mathcal{F}_{i-1} für ein $i \geq 2$, so ist $[\mathcal{U}_i] \in Ext^1(\mathcal{O}, \mathcal{F}_{i-1})$ und wir erhalten $Form[\mathcal{U}_i] = [U^i] = Form[\mathcal{F}_i]$, also liefert (\star) $[\mathcal{U}_i] = [\mathcal{F}_i]$ und somit $\mathcal{U}_i \cong \mathcal{F}_i$. Daher reicht es (\star) zu beweisen. Hierzu machen wir einen kleinen Umweg über den Anhang, in dem die hier benutzten Definitionen und Sätze aufgelistet sind.

Zuerst stellen wir fest: $H_{dR}^0(Form\mathcal{F}_i) \cong H_{dR}^0(U^i) \cong k$. Denn ein $f \in H_{dR}^0(U^i)$ erfüllt (denken wir uns f als Spaltenvektor, geschrieben in der Basis $\{e_1, \dots, e_i\}$):

$$\frac{d}{dt} f = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{t} f =: -A_i \frac{1}{t} f$$

Schreiben wir $f = \sum_{j=-m}^{\infty} t^j f_j$ mit konstanten Vektoren f_j , so folgt:

$$i f_j = -A_i f_j$$

Also ist $f_j = 0$ für $i \neq 0$ und $f_0 \in ke_1$ und das zeigt $H_{dR}^0(Form\mathcal{F}_i) \cong k$. Wir definieren nun eine Abbildung $\alpha : H_{dR}^0(\mathcal{F}_i) \rightarrow H_{dR}^0(Form\mathcal{F}_i)$, $f \mapsto f_{\varphi(\varphi)} \otimes 1$, dabei bezeichnet $f_{\varphi(\varphi)}$ den Keim von f in $\varphi(\varphi) \in \mathbb{G}_m$. Offenbar ist α ein k -Vektorraumhomomorphismus. α ist sogar injektiv. Denn ist U eine nicht leere offene Teilmenge von \mathbb{G}_m , so enthält U den Punkt $\varphi(\varphi)$ (der ja zum Null-Ideal in $k[t, \frac{1}{t}]$ entspricht) und es gibt ein $r \in k[t, \frac{1}{t}]$ mit $\mathcal{O}(U) = k[t, \frac{1}{t}]_r$ (schließlich ist U gleich $\mathbb{G}_m \setminus \{\text{endlich viele Punkte}\}$); wir haben also eine Abbildung $\mathcal{O}(U) \ni \lambda \mapsto \lambda_{\varphi(\varphi)} \in k((t))$, die offenbar injektiv ist. Die Injektivität von α folgt unmittelbar. Aus unseren bisherigen Überlegungen erhalten wir:

$$\dim H_{dR}^0(\mathcal{F}_i) \leq \dim H_{dR}^0(Form\mathcal{F}_i) = 1 \text{ für alle } i.$$

Doch wir wissen noch mehr, denn aus $\mathcal{F}_1 \cong (\mathcal{O}, d)$ und A.4 folgt direkt $\dim H_{dR}^0(\mathcal{F}_1) = 1$. Ist nun $\dim H_{dR}^0(\mathcal{F}_{i-1}) = 1$ für ein $i \geq 2$, so liefert $0 \rightarrow \mathcal{F}_{i-1} \rightarrow \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$ zusammen mit der langen exakten Sequenz eine Inklusion

$$0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathcal{F}_{i-1}) \rightarrow H_{dR}^0(\mathcal{F}_i),$$

die wegen der obigen Dimensionsüberlegungen ein Isomorphismus ist.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß die lange exakte Sequenz für alle i auch einen Isomorphismus $H_{dR}^1(\mathcal{F}_i) \xrightarrow{\cong} H_{dR}^1(\mathcal{O})$ liefert. Zuerst einmal haben wir $H_{dR}^1(\mathcal{O}) \cong H_{dR}^1(\mathcal{F}_1)$ und daher wegen A.4 auch $\dim H_{dR}^1(\mathcal{F}_1) = 1$. Sei nun $\dim H_{dR}^1(\mathcal{F}_{i-1}) = 1$ für ein $i \geq 2$. Die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\lambda} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\mu} \mathcal{O} \rightarrow 0$ beschert uns eine lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathcal{F}_{i-1}) \xrightarrow{\lambda_0} H_{dR}^0(\mathcal{F}_i) \xrightarrow{\mu_0} H_{dR}^0(\mathcal{O}) \xrightarrow{\delta} H_{dR}^1(\mathcal{F}_{i-1}) \xrightarrow{\lambda_1} H_{dR}^1(\mathcal{F}_i) \xrightarrow{\mu_1} H_{dR}^1(\mathcal{O}) \rightarrow 0.$$

Wir haben oben gesehen, daß λ_0 ein Isomorphismus ist. Also ist δ injektiv und da $\dim H_{dR}^0(\mathcal{O}) = \dim H_{dR}^1(\mathcal{F}_{i-1})$, ist δ auch ein Isomorphismus. Daher ist μ_1 injektiv und somit ebenfalls ein Isomorphismus. In der selben Weise läßt sich zeigen, daß man aus $0 \rightarrow \text{Form}\mathcal{F}_{i-1} \rightarrow \text{Form}\mathcal{F}_i \rightarrow k((t)) \rightarrow 0$ eine lange exakte Sequenz in der de Rahm Kohomologie erhält, die einen Isomorphismus $H_{dR}^1(\text{Form}\mathcal{F}_i) \xrightarrow{\mu_2} H_{dR}^1(k((t)), d)$ liefert. Beschwören wir nun die Gruppenisomorphismen $\text{Ext}^1(\mathcal{O}, \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\cong} H_{dR}^1(\mathcal{F}_i)$, $[\mathcal{F}] \mapsto \delta_{[\mathcal{F}]}(1)$ und $\text{Ext}^1(k((t)), \text{Form}\mathcal{F}_i) \xrightarrow{\cong} H_{dR}^1(\text{Form}\mathcal{F}_i)$, $[F] \mapsto \delta_{[F]}(1)$ aus Bemerkung A.8 und fassen alles zusammen, so erhalten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} [\mathcal{F}] & \in & \text{Ext}^1(\mathcal{O}, \mathcal{F}_i) & \xrightarrow{\text{Form}} & \text{Ext}^1(k((t)), \text{Form}\mathcal{F}_i) & \ni & [F] \\ \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \\ \delta_{[\mathcal{F}]}(1) & \in & H_{dR}^1(\mathcal{F}_i) & & H_{dR}^1(\text{Form}\mathcal{F}_i) & \ni & \delta_{[F]}(1) \\ & & \downarrow \mu_1 & & \downarrow \mu_2 & & \\ & & H_{dR}^1(\mathcal{O}) & = k \frac{dt}{t} = & H_{dR}^1(k((t))) & & \end{array}$$

Dieses Diagramm kommutiert. Denn wie wir leicht aus der Definition des 'Verbindungsmorphismus' (siehe Anhang) ersehen können gilt:

$$\delta_{\text{Form}[\mathcal{F}]}(1) = (\delta_{\mathcal{F}}(1))_{\varphi(\wp)} \otimes 1.$$

Außerdem werden die Isomorphismen μ_1 und μ_2 in natürlicher Weise von $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{O}$ beziehungsweise von $\text{Form}\mathcal{F}_i \rightarrow \text{Form}\mathcal{O}$ induziert, daher folgt:

$$\mu_2(\delta_{\text{Form}[\mathcal{F}]}(1)) = \mu_2((\delta_{\mathcal{F}}(1))_{\varphi(\wp)} \otimes 1) = (\mu_1(\delta_{\mathcal{F}}(1)))_{\varphi(\wp)} \otimes 1.$$

Aber $\mu_1(\delta_{\mathcal{F}}(1)) \in k \frac{dt}{t}$ und deswegen erhalten wir $\mu_2(\delta_{\text{Form}[\mathcal{F}]}(1)) = \mu_1(\delta_{\mathcal{F}}(1))$. Also ist das Diagramm kommutativ und das beweist (\star) .

4.2 Konstruktion einer Fortsetzung von Rang 1 Zusammenhängen.

Sei (L, ∇) ein formeller Rang 1 Zusammenhang über $k((t))$. Sei e ein Basisvektor von L mit

$$\nabla e = \left(\frac{a_{-m}}{t^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{t} \right) dt e =: \omega e \quad \text{mit } a_i \in k$$

(So ein e existiert nach 2.5.) Dann definieren wir einen Zusammenhang (\mathcal{L}, ∇) auf \mathbb{G}_m ganz einfach, indem wir \mathcal{L} gleich $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m} e$ setzen und ω die Matrix von ∇ in der Basis e sein lassen. Wir bemerken, daß ω ein globaler Schnitt von $\Omega_{\mathbb{G}_m}^1$ ist, also ∇ in der Tat von \mathcal{L} nach $\mathcal{L} \otimes \Omega_{\mathbb{G}_m}^1$ abbildet. Wir zeigen nun:

- (a) (\mathcal{L}, ∇) ist wohl definiert, das heißt: Ist e' ein anderer Basisvektor von L mit $\nabla(e') = \omega' e'$ für ein $\omega' \in k[\frac{1}{t}] \frac{dt}{t}$, so ist der bezüglich e' konstruierte Zusammenhang gleich \mathcal{L} .
- (b) (\mathcal{L}, ∇) ist eine Fortsetzung von (L, ∇) , die regulär singular in ∞ ist.
- (c) (\mathcal{L}, ∇) ist mit der Eigenschaft (b) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Zeigen wir zuerst (a). Aus 2.5 wissen wir $e' = t^p \lambda e$ für ein $\lambda \in k^\times$ und ein $p \in \mathbb{Z}$. Dann ist λt^p aber ein globaler Schnitt aus $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}^\times$, der Garbe der in $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$ invertierbaren Elemente. Also ist der bezüglich e' konstruierte Zusammenhang gleich \mathcal{L} geschrieben in einer anderen $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$ -Basis.

Wenden wir uns (b) zu. Sei $u = \frac{1}{t}$. Dann ist $\omega = -(a_{-m} u^{m-1} + \dots + a_{-1}) \frac{du}{u}$, also hat die Matrix von \mathcal{L} höchstens einen Pol der Ordnung 1 im Unendlichen. Daher ist \mathcal{L} regulär singular in ∞ . Offensichtlich ist (\mathcal{L}, ∇) eine Fortsetzung von (L, ∇) .

Bevor wir (c) beweisen können, erst ein kleiner Einschub.

Sei X ein noethersches, integrales, separiertes, lokal faktorielles Schema (, zum Beispiel eine nicht singuläre Kurve). Sei $\text{Pic } X$ die Gruppe der Isomorphieklassen von lokal freien Rang 1 Garben auf X . (Die Gruppenstruktur wird durch \otimes definiert, das neutrale Element ist \mathcal{O}_X und das Inverse einer lokal freien Rang 1 Garbe \mathcal{L} ist $\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$; wir verweisen auf ([H], II Proposition 6.12.)) Sei $\text{Cl } X$ die Divisorklassengruppe auf $X = (\text{Gruppe der Weildivisoren auf } X) / (\text{Gruppe der Hauptdivisoren auf } X)$. Es gilt:

4.8 Satz $\text{Cl } X \cong \text{Pic } X$.

Beweis. ([H], II Corollary 6.16.)

4.9 Korollar Ist \mathcal{L} eine lokal freie Garbe vom Rang 1 auf \mathbb{G}_m , so ist \mathcal{L} frei, das heißt isomorph zu $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$.

Beweis. Wir wollen $\text{Pic } \mathbb{G}_m = 0$ zeigen. Da aber \mathbb{G}_m eine nicht singuläre Kurve ist, folgt das direkt aus 4.8 .

Jetzt sind wir bereit die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei also $(\mathcal{L}_0, \nabla_0)$ ein Zusammenhang auf \mathbb{G}_m , der (L, ∇) fortsetzt und regulär singular in ∞ ist. Das Korollar 4.9 sagt uns nun, daß es einen globalen Schnitt e_0 von \mathcal{L}_0 gibt mit $\mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m} e_0$. Sei ω_0 die Matrix von ∇_0 bezüglich der Basis e_0 . Da \mathcal{L}_0 eine Fortsetzung von (L, ∇) ist, gibt es einen Isomorphismus $(k(t)e_0 \otimes k((t)), \nabla_0 \otimes d) \cong (L, \nabla)$. Das heißt es gibt ein $a \in k((t))$, so daß $e_0 \otimes a \mapsto e$ einen Isomorphismus liefert. Da dieser aber mit der Zusammenhangsabbildung vertauschen muß, muß gelten: $\omega_0 + da/a = \omega$. Schreiben wir $a = t^p v$, $p \in \mathbb{Z}$, $v \in k[[t]]^\times$, so erhalten wir

$$\omega_0 + p \frac{dt}{t} + \frac{dv}{v} = \omega = \left(\frac{a_{-m}}{t^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{t} \right) dt$$

Aber \mathcal{L}_0 soll regulär singular in ∞ sein, das bedeutet ω_0 ist ein Element aus $k[\frac{1}{t}] \frac{dt}{t}$. (Denn ein $t^n dt = -u^{-n-2} du$ mit $u = 1/t$ liefert für $n \geq 0$ im Unendlichen eine Polstelle größer

gleich zwei.) Daher muß $\frac{dv}{v}$ ein Element aus $k[\frac{1}{t}] \frac{dt}{t}$ sein, also $\frac{dv}{v} = 0$ und somit $\omega_0 + p \frac{dt}{t} = \omega$. Nun ist t^p ein globaler, invertierbarer Schnitt aus $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$ und daher ist $e'_0 := t^p e_0$ ebenfalls eine Basis von \mathcal{L}_0 als freier $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$ -Modul. Wir haben $\nabla_0(e'_0) = (\omega_0 + p \frac{dt}{t})e'_0 = \omega e'_0$. Also liefert $\mathcal{L}_0 \ni e'_0 \mapsto e \in \mathcal{L}$ einen Isomorphismus von Zusammenhängen und somit auch die Behauptung.

4.3 Konstruktion einer Fortsetzung eines irreduziblen Zusammenhangs

Sei M ein irreduzibler Zusammenhang vom Rang n über $k((t))$. Sei $z := t^{1/n}$, $\pi := \pi^n$, $\psi := \psi^n$ und $\mu_n = \text{Gal}(k((z))/k((t)))$. Dann gibt es nach 3.11 und 3.4 einen Rang 1 Zusammenhang L über $k((z))$ mit $M \cong \psi_* L$ und $\psi^* M \cong \bigoplus_{\sigma \in \mu_n} \sigma^* L$ und $\sigma^* L \not\cong \tau^* L$ für $\sigma \neq \tau \in \mu_n$. Sei (\mathcal{L}, ∇) die eindeutige, im Unendlichen regulär singuläre Fortsetzung von L aus Konstruktion 4.2. Dann definieren wir einen Zusammenhang \mathcal{M} auf $\mathbb{G}_{m,t}$ einfach so:

$$(\mathcal{M}, \nabla) := (\pi_* \mathcal{L}, \pi_* \nabla)$$

Wir zeigen nun:

- (a) \mathcal{M} ist eine Fortsetzung von M , die regulär singulär in ∞ ist und $\pi^* \mathcal{M}$ ist isomorph zu einer direkten Summe von Rang 1 Zusammenhängen auf $\mathbb{G}_{m,z}$, die alle regulär singulär im Unendlichen sind.
- (b) \mathcal{M} ist mit der Eigenschaft (a) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Bevor wir uns jedoch einem dieser Punkte zuwenden, wollen wir uns genauer die Gestalt von $\pi_* \mathcal{L}$ anschauen. Am übersichtlichsten geht das, wenn wir uns folgende Notation und Proposition (aus [H]) zu eigen machen:

Ist A ein Ring und M ein A -Modul, so bezeichnen wir mit \widetilde{M} die zu M auf $\text{Spec } A$ assoziierte Garbe. (Für die Definition verweisen wir auf ([H], Seite 110).) Es gelten folgende Eigenschaften:

4.10 Proposition Seien A, B zwei Ringe mit einem Ringhomomorphismus $A \rightarrow B$ und dem induzierten Morphismus $f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$. Dann gilt

- (1) Sind M und N zwei A -Moduln, so ist $\widetilde{(M \otimes_A N)} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Spec } A}} \widetilde{N}$.
- (2) Für jede Familie von A -Moduln $\{M_i\}$ gilt $\widetilde{(\bigoplus M_i)} = \bigoplus \widetilde{M}_i$.
- (3) Ist N ein B -Modul und bezeichnen wir mit ${}_A N$ den Modul N aufgefasst als A -Modul, so ist $f_* \widetilde{N} \cong \widetilde{({}_A N)}$.
- (4) Für jeden A -Modul M gilt $f^*(\widetilde{M}) \cong \widetilde{(M \otimes_A B)}$.

Beweis. ([H], II Proposition 5.2.)

Wir wissen (per Konstruktion 4.2) \mathcal{L} ist isomorph zu einem Zusammenhang $(\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,z}}, \nabla)$

mit $\nabla(1) = \omega$ für ein ω aus $k[\frac{1}{z}]\frac{dz}{z}$. Desweiteren ist $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,z}}$ nichts anderes als $\widetilde{k[z, \frac{1}{z}]}$ und wir haben

$$k[t, \frac{1}{t}]k[z, \frac{1}{z}] = k[t, \frac{1}{t}] \oplus \dots \oplus k[t, \frac{1}{t}]z^{n-1}$$

Also ist nach 4.10 (3), (2) $\pi_*\mathcal{L}$ als Garbe isomorph zu $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,t}} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,t}}z^{n-1}$. Die Zusammenhangsabbildung auf $\pi_*\mathcal{L}$ ist dann der Zusammenhang ∇ auf \mathcal{L} , nur jetzt aufgefasst als Zusammenhang von $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,t}}$ -Moduln. Schreiben wir $\nabla(1) = \omega = \omega_0(t) + \omega_1(t)z + \dots + \omega_{n-1}(t)z^{n-1}$ mit $\omega_i(t) \in k[\frac{1}{t}]\frac{dt}{t}$, so ist die Matrix von $\pi_*\mathcal{L}$ in der Basis $\{1, z, \dots, z^{n-1}\}$ genau die aus 3.2 (i) und somit auch gleich der Matrix von $\psi_*L = M$ in der entsprechenden Basis. Daraus folgt unmittelbar, daß $\mathcal{M} = \pi_*\mathcal{L}$ eine Fortsetzung von $M = \psi_*L$ ist.

Kommen wir nun zu (a). Das \mathcal{M} eine Fortsetzung von M ist haben wir gerade gesehen. Sei $\mathbb{A}_{\infty,z}^1 = \text{Spec } k[u]$ mit $u = \frac{1}{z}$ und $\mathbb{A}_{\infty,t}^1 = \text{Spec } k[v]$ mit $v = \frac{1}{t}$. Wir bezeichnen mit $\bar{\pi} : \mathbb{A}_{\infty,z}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{\infty,t}^1$ den von dem Ringhomomorphismus $k[v] \rightarrow k[u], v \mapsto u^n$ induzierten Morphismus. (Offenbar ist $\bar{\pi}|_{\mathbb{G}_{m,z}} = \pi$.) Wenn wir zeigen wollen, daß (\mathcal{M}, ∇) regulär singular in ∞ ist, müssen wir eine Fortsetzung $(\bar{\mathcal{M}}, \bar{\nabla})$ auf $\mathbb{A}_{\infty,t}^1$ konstruieren mit $\bar{\nabla} : \bar{\mathcal{M}} \rightarrow \bar{\mathcal{M}} \otimes \Omega_{\mathbb{A}_{\infty,t}^1}^1(\log \infty)$. Wir wissen \mathcal{M} ist gleich $\pi_*\mathcal{L}$ und \mathcal{L} ist regulär singular im Unendlichen (nach Konstruktion 4.2). Es existiert also eine Fortsetzung $(\bar{\mathcal{L}}, \bar{\nabla})$ auf $\mathbb{A}_{\infty,z}^1$ mit $\bar{\nabla} : \bar{\mathcal{L}} \rightarrow \bar{\mathcal{L}} \otimes \Omega_{\mathbb{A}_{\infty,z}^1}^1(\log \infty)$. Aber $\Omega_{\mathbb{A}_{\infty,z}^1}^1(\log \infty)$ ist gleich $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\infty,z}^1} \frac{du}{u}$ und außerdem gilt $\frac{du}{u} = -\frac{dz}{z} = -\frac{1}{n} \frac{dt}{t} = \frac{1}{n} \frac{dv}{v}$. Daher gilt $\bar{\pi}_*\Omega_{\mathbb{A}_{\infty,z}^1}^1(\log \infty) = (\bar{\pi}_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\infty,z}^1}) \frac{dv}{v}$. Alles zusammen erhalten wir also

$$\bar{\pi}_*\bar{\nabla} : \bar{\pi}_*\bar{\mathcal{L}} \rightarrow \bar{\pi}_*\bar{\mathcal{L}} \otimes_{\bar{\pi}_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\infty,z}^1}} (\bar{\pi}_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\infty,z}^1}) \frac{dv}{v} = \bar{\pi}_*\bar{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\infty,t}^1}} \Omega_{\mathbb{A}_{\infty,t}^1}^1(\log \infty)$$

Außerdem ist $\bar{\pi}^{-1}(\mathbb{G}_{m,t}) \subset \mathbb{G}_{m,z}$ und daher $(\bar{\pi}_*\bar{\mathcal{L}}, \bar{\pi}_*\bar{\nabla})|_{\mathbb{G}_{m,t}} = (\pi_*\mathcal{L}, \pi_*\nabla) = (\mathcal{M}, \nabla)$. Das heißt $\bar{\pi}_*\bar{\mathcal{L}}$ ist die gewünschte Fortsetzung von (\mathcal{M}, ∇) . Also ist \mathcal{M} regulär singular in ∞ .

Es bleibt zu zeigen, daß $\pi^*\mathcal{M}$ in Rang 1 Zusammenhänge zerfällt, die regulär singular im Unendlichen sind. Aus 4.10 (4) folgt $\pi^*\mathcal{M} \cong \pi^*\pi_*\mathcal{L} = (\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,t}} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,t}}z^{n-1}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,t}}} \mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,z}}$ (als Garbe). Wie im Beweis von 3.4 definieren wir

$$\varepsilon_i = 1 \otimes 1 + z \otimes \frac{1}{\sigma^i(z)} + \dots + z^{n-1} \otimes \frac{1}{\sigma^i(z^{n-1})}$$

für ein primitives Element $\sigma \in \mu_n$. Genau wie in 3.4 zeigt man dann, daß die ε_i eine Basis von $\pi^*\mathcal{M}$ als freier $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,z}}$ -Modul bilden und $\nabla(\varepsilon_i) = \omega(\sigma^i(z))\varepsilon_i$ erfüllen (wobei $\omega(z)$ die Matrix von \mathcal{L} in der Basis "1" ist). Wir erhalten

$$\pi^*\mathcal{M} \cong \bigoplus_i (\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,z}}\varepsilon_i, \nabla|_{\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,z}}\varepsilon_i})$$

und das ist die versprochene Zerlegung in Rang 1 Zusammenhänge, die offenbar regulär singular in ∞ sind (da \mathcal{L} es ist).

Als letztes bleibt nun noch (b) zu zeigen. Zuerst bemerken wir, daß eine Fortsetzung von M auf $\mathbb{G}_{m,t}$ irreduzibel ist. Denn sei \mathcal{P} so eine Fortsetzung, dann liefert jeder von Null verschiedene Unterzusammenhang \mathcal{E} von \mathcal{P} einen von Null verschiedenen Unterzusammenhang $Form_t \mathcal{E}$ von M . Da M irreduzibel ist, ist $Form_t \mathcal{E}$ isomorph zu $M = Form_t \mathcal{P}$. Insbesondere haben \mathcal{E} und \mathcal{P} den selben Rang, sind also isomorph.

Sei nun (\mathcal{M}', ∇) eine Fortsetzung von $M = \psi_* L$, die regulär singular in ∞ ist und auf $\mathbb{G}_{m,z}$ in Rang 1 Zusammenhänge \mathcal{L}_i zerfällt, die ebenfalls regulär singular in ∞ sind. Wir zeigen: \mathcal{M}' ist isomorph zu $\pi_* \mathcal{L} = \mathcal{M}$. Da $\pi^* \mathcal{M}' = \bigoplus \mathcal{L}_i$, folgt aus den Lemmas 4.2 und 3.4:

$$\bigoplus Form_z \mathcal{L}_i = Form_z(\pi^* \mathcal{M}') = \psi^* Form_t \mathcal{M}' = \psi^* \psi_* L = \bigoplus_{\sigma \in \mu_n} \sigma^* L$$

Also ist \mathcal{L}_i Fortsetzung eines $\sigma^* L$ für ein $\sigma \in \mu_n$. Nach Konstruktion 4.2 (und wegen der dort bewiesenen Eindeutigkeit), ist \mathcal{L}_i isomorph zu dem Zusammenhang $(\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,z}}, \nabla_i)$ mit $\nabla_i(1) = \sigma(\omega(z))$. (Schließlich ist nach 3.2 (ii) die Matrix von $\sigma^* L$ in der Basis $e \otimes 1$ gleich $\sigma(\omega(z))$, falls $\omega(z)$ die Matrix von L in der Basis e ist.) Außerdem folgt aus (a), daß $\pi_* \mathcal{L}_i$ eine Fortsetzung von $\psi_* \sigma^* L \cong M$ ist. Wegen der Vorbemerkung sind daher \mathcal{M}' und $\pi_* \mathcal{L}_i$ irreduzibel. Aber es gibt eine natürliche Inklusion $\mathcal{M}' \hookrightarrow \pi_* \pi^* \mathcal{M}' = \bigoplus \pi_* \mathcal{L}_i$ und das liefert für alle i einen flachen Morphismus

$$\mathcal{M}' \hookrightarrow \bigoplus \pi_* \mathcal{L}_j \xrightarrow{\text{Projektion}} \pi_* \mathcal{L}_i.$$

Mit dem selben Beweis wie in 2.7, sehen wir nun, daß dieser Morphismus entweder gleich 0 oder ein Isomorphismus ist. Da er aber sicherlich nicht für alle i gleich 0 ist, erhalten wir

$$\mathcal{M}' \cong \pi_* \mathcal{L}_i \quad (\text{für ein gewisses } i)$$

Also bleibt zu zeigen: $\pi_* \mathcal{L}_i \cong \pi_* \mathcal{L}$. Wir identifizieren die Garben \mathcal{L} und \mathcal{L}_i mit $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,z}}$. Dann ist die Matrix von \mathcal{L} in der Basis "1" gleich $\omega(z) = \omega_0(t) + \dots + \omega_{n-1}(t)z^{n-1}$ und, wie oben gesehen, die Matrix von \mathcal{L}_i in der Basis "1" gleich $\sigma(\omega(z)) = \omega_0(t) + \dots + \omega_{n-1}(t)\sigma(z^{n-1})$. Somit ist die Matrix von $\pi_* \mathcal{L}_i$ in der Basis $\{1, \sigma(z), \dots, \sigma(z^{n-1})\}$ gleich

$$\begin{pmatrix} \omega_0(t) & t\omega_{n-1}(t) & \dots & t\omega_1(t) \\ \omega_1(t) & \omega_0 + \frac{1}{n} \frac{dt}{t} & \dots & t\omega_2(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{n-1}(t) & \omega_{n-2}(t) & \dots & \omega_0(t) + \frac{n-1}{n} \frac{dt}{t} \end{pmatrix},$$

also genau gleich der Matrix von $\pi_* \mathcal{L}$ in der Basis $\{1, z, \dots, z^{n-1}\}$. Daher liefert $\pi_* \mathcal{L}_i \longrightarrow \pi_* \mathcal{L}$, $\sigma(z^i) \mapsto z^i$ einen Isomorphismus von Zusammenhängen und wir sind fertig.

4.4 Zusammenfassung

Sei (E, ∇) ein formeller Zusammenhang über $k((t))$ und $E = \bigoplus_j (M_j \otimes \bigoplus_i U_{ji})$ die Prima-Standard-Zerlegung. Sei $m_j := \text{Rang } M_j$, $n_{ji} := \text{Rang } U_{ji}$ und $U_{ji}^1 \subset \dots \subset U_{ji}^{n_{ji}}$ die standard Filtrierung von U_{ji} . Sei (L_j, ∇_{L_j}) ein Rang 1 Zusammenhang mit $\psi_*^{m_j} L_j = M_j$ (existiert nach 3.11). Sei $0 \neq e_j \in L_j$ und $\omega_j \in k[\frac{1}{z}] \frac{dz}{z}$ mit $\nabla_{L_j}(e_j) = \omega_j$. Desweiteren sei $\{u_1^{j1}, \dots, u_{n_{ji}}^{ji}\}$ eine Basis von U_{ji} , bezüglich derer die Matrix von $\nabla_{U_{ji}}$ gleich $A_{ji} \frac{dt}{t}$ ist mit einem nilpotenten Jordanblock A_{ji} . Dann sind (nach den Konstruktionen 4.1, 4.2, 4.3)

$$(\mathcal{U}_{ji}, \nabla_{\mathcal{U}_{ji}}) \text{ mit } \mathcal{U}_{ji} = \bigoplus_{s=1}^{n_{ji}} \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m} u_s^{ji} \text{ und } \nabla_{\mathcal{U}_{ji}}(u_s^{ji}) = A_{ji} \frac{dt}{t} u_s^{ji},$$

$$(\mathcal{L}_j, \nabla_{\mathcal{L}_j}) \text{ mit } \mathcal{L}_j = \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m} e_j \text{ und } \nabla_{\mathcal{L}_j}(e_j) = \omega_j e_j$$

$$\text{und } (\mathcal{M}_j, \nabla_{\mathcal{M}_j}) = \pi_*^{m_j} (\mathcal{L}_j, \nabla_{\mathcal{L}_j})$$

Fortsetzungen von U_{ji} , L_j und M_j , die regulär singular in ∞ sind. $\mathcal{E} := \bigoplus_j (\mathcal{M}_j \otimes \bigoplus_i \mathcal{U}_{ji})$ ist daher eine Fortsetzung von E , die regulär singular im Unendlichen ist und die Prima-Standard-Zerlegung respektiert. Außerdem gilt folgende Eindeutigkeitsaussage: Ist $\mathcal{E}' = \bigoplus_j (\mathcal{M}'_j \otimes \bigoplus_i \mathcal{U}'_{ji})$ eine weitere Fortsetzung von E , so daß \mathcal{M}'_j und \mathcal{U}'_{ji} im Unendlichen regulär singular Fortsetzungen von M_j und U_{ji} sind, die folgendes erfüllen

- (1) Die \mathcal{M}'_j zerfallen auf $\mathbb{G}_{m,t^{1/m_j}}$ in Rang 1 Zusammenhänge, die regulär singular in ∞ sind.
- (2) Für alle i, j ist \mathcal{U}'_{ji} eine sukzessive Extension des trivialen Zusammenhangs (\mathcal{O}, d) mit einer Filtrierung $\mathcal{V}_{ji}^1 \subset \dots \subset \mathcal{V}_{ji}^{n_{ji}} = \mathcal{U}'_{ji}$, die für alle r $\text{Form}[\mathcal{V}_{ji}^r] = [U_{ji}^r]$ erfüllt.

Dann ist \mathcal{E}' isomorph zu \mathcal{E} und genauer \mathcal{M}'_j ist isomorph zu \mathcal{M}_j und \mathcal{U}'_{ji} ist isomorph zu \mathcal{U}_{ji} .

Und das zu zeigen war genau das Ziel dieser Arbeit.

A Anhang

Hier wollen wir ein paar Definitionen und Aussagen zusammenstellen (größten Teils ohne Beweis), die wir hauptsächlich im Beweis des Lemmas 2.8 und in der Konstruktion 4.1 benutzen.

Seien $(\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}})$, $(\mathcal{F}, \nabla_{\mathcal{F}})$ und $(\mathcal{G}, \nabla_{\mathcal{G}})$ Zusammenhänge auf \mathbb{G}_m und $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ und $\beta \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ flache Morphismen. Dann ist $0 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Zusammenhängen, falls die Reihen in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{G} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} \otimes \Omega^1 & \xrightarrow{\alpha \otimes id} & \mathcal{F} \otimes \Omega^1 & \xrightarrow{\beta \otimes id} & \mathcal{G} \otimes \Omega^1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

exakte Sequenzen von $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$ -Moduln sind. Wir sagen zwei exakte Sequenzen von Zusammenhängen $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$, $i = 1, 2$, sind isomorph, wenn es einen flachen Isomorphismus $\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}_2$ gibt, der folgendes Diagramm kommutativ macht

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

A.1 Definition Wir bezeichnen mit $\text{Ext}^1((\mathcal{G}, \nabla_{\mathcal{G}}), (\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}}))$ oder auch kurz $\text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ die Menge der Isomorphieklassen von exakten Sequenzen von Zusammenhängen der Gestalt

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

Wir schreiben auch $[\mathcal{F}]$ für die Isomorphieklasse von $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ in $\text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{E})$. $\text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ läßt sich wie folgt zu einer Gruppe machen (vergleiche ([W], Definition 3.4.4 und Corollary 3.4.5)):

Seien $0 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\epsilon_i} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\gamma_i} \mathcal{G} \rightarrow 0$, $i = 1, 2$ zwei exakte Sequenzen von Zusammenhängen. Wir bezeichnen mit \mathcal{F}' die Garbe zu der Prägarbe

$$U \longmapsto \frac{\{(f_1, f_2) \in \mathcal{F}_1(U) \oplus \mathcal{F}_2(U) \mid \gamma_1(f_1) = \gamma_2(f_2)\}}{\{(-\epsilon_1(e), \epsilon_2(e)) \mid e \in \mathcal{E}(U)\}}.$$

\mathcal{F}' wird in natürlicher Weise zu einem Zusammenhang (es erbt die Zusammenhangsabbildung von $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$). Wir erhalten eine exakte Sequenz von Zusammenhängen $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$, dabei ist der Morphismus $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}'$ gegeben durch $e \mapsto (\epsilon_1(e), \epsilon_2(e))$ und $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}$ durch $(f_1, f_2) \mapsto \gamma_1(f_1)$. Wir definieren dann die Baer Summe von $[\mathcal{F}_1]$ und $[\mathcal{F}_2]$ in $\text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ durch

$$[\mathcal{F}_1] + [\mathcal{F}_2] := [\mathcal{F}'] \in \text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{E})$$

Die Baer Summe macht $\text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ zu einer Gruppe. Das neutrale Element ist die Isomorphieklasse der exakten Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \oplus \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ (dabei sind $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \oplus \mathcal{G}$ und $\mathcal{E} \oplus \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ die natürlichen Inklusions- beziehungsweise Projektions-Morphismen).

Wir erhalten unmittelbar folgendes Lemma

A.2 Lemma Sind \mathcal{E} und \mathcal{G} zwei Zusammenhänge mit $Ext^1(\mathcal{G}, \mathcal{E}) = 0$, so gilt, daß jede exakte Sequenz von Zusammenhängen der Gestalt $0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$ spaltet.

A.3 Definition Sei (\mathcal{F}, ∇) ein Zusammenhang auf \mathbb{G}_m . Wir definieren die *0-te de Rahm Kohomologie Gruppe von \mathcal{F}* durch

$$H_{dR}^0(\mathcal{F}) = Ker(\nabla : \Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{F} \otimes \Omega^1))$$

und die *1-te de Rahm Kohomologie Gruppe von \mathcal{F}* durch

$$H_{dR}^1(\mathcal{F}) = Coker \nabla(\mathbb{G}_m) = \frac{\Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{F} \otimes \Omega^1)}{\nabla \Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{F})}$$

Die Aussagen und Definitionen aus A.1 – A.3 lassen sich natürlich ohne Probleme auf formelle Zusammenhänge übertragen.

A.4 Lemma Es gilt :

$$H_{dR}^0((\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}, d)) = H_{dR}^0((k((t)), d)) = k \text{ und } H_{dR}^1((\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}, d)) = H_{dR}^1((k((t)), d)) = k \frac{dt}{t}.$$

Beweis. $H_{dR}^0((\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}, d)) = k$ folgt direkt aus der Definition. Außerdem sind die exakten Elemente aus $k[t, \frac{1}{t}]dt = \Omega^1(\mathbb{G}_m)$, das heißt die Elemente, die sich in der Form df für ein $f \in k[t, \frac{1}{t}]$ schreiben lassen, genau die Elemente ohne $\frac{dt}{t}$ -Term, also $H_{dR}^1((\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}, d)) = k \frac{dt}{t}$. Genauso geht's auch für $(k((t)), d)$.

Eine exakte Sequenz von Zusammenhängen auf \mathbb{G}_m $0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \longrightarrow 0$ induziert eine lange exakte Sequenz in der de Rahm Kohomologie

$$0 \longrightarrow H_{dR}^0(\mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha_0} H_{dR}^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\beta_0} H_{dR}^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta} H_{dR}^1(\mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha_1} H_{dR}^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\beta_1} H_{dR}^1(\mathcal{G}) \longrightarrow 0.$$

Dabei werden die α_i und die β_i jeweils in offensichtlicher Weise von α und β induziert. δ wird *Verbindungsmorphismus* genannt. Er ist wie folgt definiert: Zuerst stellen wir fest, daß alles kohärent ist und wir somit folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Reihen erhalten

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{G}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{E} \otimes \Omega^1) & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{F} \otimes \Omega^1) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{G} \otimes \Omega^1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Sei nun $g \in H_{dR}^0(\mathcal{G})$. Dann gibt es also ein $f \in \Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{F})$ mit $\beta(f) = g$ und es gilt $\beta(\nabla_{\mathcal{F}}(f)) = \nabla_{\mathcal{G}}(g) = 0$. Daher existiert ein $e \in \Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{E} \otimes \Omega^1)$ mit $\alpha(e) = \nabla_{\mathcal{F}}(f)$. Wir definieren dann

$$\delta(g) = \text{Restklasse von } e \text{ in } H_{dR}^1(\mathcal{E}).$$

Man sieht leicht, daß δ ein wohl definierter k -Vektorraumhomomorphismus ist. Für ein $[\mathcal{F}]$ aus $Ext^1(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ bezeichnen wir den Verbindungsmorphismus der zugehörigen langen exakten Sequenz mit $\delta_{[\mathcal{F}]}$. Für eine kurze exakte Sequenz von formellen Zusammenhängen definieren wir eine lange exakte Sequenz in der de Rahm Kohomologie ganz analog.

A.5 Satz Sei (F, ∇) ein formeller Zusammenhang über $k((t))$. Dann sind $H_{dR}^0(F)$ und $H_{dR}^1(F)$ endlich dimensionale k -Vektorräume und haben als solche dieselbe Dimension.

Beweis. ([BBE], 5.9. (a) (ii))

A.6 Lemma Seien $(\mathcal{F}, \nabla_{\mathcal{F}})$ und $(\mathcal{G}, \nabla_{\mathcal{G}})$ zwei Zusammenhänge auf \mathbb{G}_m (oder formelle Zusammenhänge über $k((t))$) und $(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \nabla)$ der in 1.2 (iv) definierte Zusammenhang. Dann gibt es einen Gruppenisomorphismus

$$Ext^1((\mathcal{O}, d), \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \cong Ext^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}),$$

dabei sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$ im Falle von Zusammenhängen auf \mathbb{G}_m oder $\mathcal{O} = k((t))$, falls \mathcal{F} und \mathcal{G} $k((t))$ -Zusammenhänge sind.

Beweis. Wir werden den Beweis nur skizzieren, ansonsten bekäme er eine für den Anhang unangebrachte Länge. Wir beschränken uns darauf, die Aussage für Zusammenhänge auf \mathbb{G}_m zu zeigen, für formelle Zusammenhänge geht es offensichtlich genauso.

Sei $0 \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{E} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{F} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Zusammenhängen. Da alle Garben lokal frei und von endlichem Rang sind, erhalten wir eine exakte Sequenz von Zusammenhängen:

$$0 \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\gamma^*} \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\epsilon^*} \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \rightarrow 0$$

Wir bezeichnen mit \mathcal{E}^{pb} ("pb" steht für pullback) die Garbe

$$U \mapsto \mathcal{E}^{pb}(U) = \{(\lambda, \phi) \in \mathcal{O}(U) \oplus \mathcal{H}om(\mathcal{F}(U), \mathcal{E}(U)) \mid \epsilon \circ \phi = \lambda \cdot id_{\mathcal{F}}\}.$$

\mathcal{E}^{pb} wird auf natürliche Weise zu einem Zusammenhang (die Zusammenhangsabbildung wird von dem Zusammenhang $\mathcal{O} \oplus \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ induziert). Man rechnet leicht nach, daß das folgende Diagramm aus zwei exakten Sequenzen von Zusammenhängen besteht und kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\gamma^*} & \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\epsilon^*} & \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \iota \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\gamma_0} & \mathcal{E}^{pb} & \xrightarrow{\epsilon_0} & \mathcal{O} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Dabei sei $\gamma_0(\psi) := (0, \gamma \circ \psi)$, $\epsilon_0(\lambda, \phi) := \lambda$ und $\iota(1) := id_{\mathcal{F}}$. Wir definieren also eine Abbildung

$$\alpha : Ext^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \ni [\mathcal{E}] \mapsto [\mathcal{E}^{pb}] \in Ext^1(\mathcal{O}, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$$

Man überlegt sich: α ist auf den Isomorphieklassen wohl definiert und ein Gruppenhomomorphismus. Wir wollen nun eine Umkehrabbildung finden. Sei also $0 \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{E} \xrightarrow{\tau} \mathcal{O} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Zusammenhängen. Wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sigma_0} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} \xrightarrow{\tau_0} \mathcal{F} \rightarrow 0$$

mit $\sigma_0(f \otimes \phi) = f \otimes \sigma(\phi)$ und $\tau_0(f \otimes e) = f\tau(e)$. Wir definieren einen Morphismus

$$\sigma' : \mathcal{F} \otimes \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \ni f \otimes \phi \mapsto \phi(f) \in \mathcal{G}.$$

Offenbar ist σ' flach. Sei nun \mathcal{E}^{po} ("po" steht für push out) die Garbe zur Prägarbe

$$U \longmapsto \frac{(\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{E}(U)) \oplus \mathcal{G}(U)}{\mathcal{A}(U)}$$

mit $\mathcal{A}(U) = \{(-\sigma_0(x), \sigma'(x)) \mid x \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}))(U)\}$. \mathcal{E}^{po} wird in natürlicher Weise zu einem Zusammenhang (die Zusammenhangsabbildung wird von dem Zusammenhang $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}) \oplus \mathcal{G}$ induziert). Man rechnet nach, daß das folgende Diagramm exakte Reihen hat und kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} \otimes \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\sigma_0} & \mathcal{F} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow{\tau_0} & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \\ & & \sigma' \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\sigma_1} & \mathcal{E}^{po} & \xrightarrow{\tau_1} & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Dabei sei $\sigma_1(g) := (0, g)$ und $\tau_1([f \otimes e, g]) := \tau_0(f \otimes e)$. Zum Schluß überprüft man, daß die Abbildung

$$\beta : Ext^1(\mathcal{O}, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \ni [\mathcal{E}] \longmapsto [\mathcal{E}^{po}] \in Ext^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

auf den Isomorphieklassen wohl definiert und invers zu α ist. Fertig.

A.7 Satz Sind \mathcal{F} und \mathcal{G} zwei Zusammenhänge auf \mathbb{G}_m (oder formelle Zusammenhänge über $k((t))$) und ist $(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \nabla)$ der in 1.2 (iv) definierte Zusammenhang, so gibt es einen Gruppenisomorphismus:

$$H_{dR}^1(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \nabla) \cong Ext^1(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Beweis. Wir führen den Beweis wieder nur für Zusammenhänge auf \mathbb{G}_m , er läßt sich beinahe wörtlich auf formelle Zusammenhänge übertragen. Desweiteren reicht es wegen A.6, wenn wir für einen beliebigen Zusammenhang \mathcal{E} folgende Isomorphie nachweisen:

$$H_{dR}^1(\mathcal{E}) \cong Ext^1((\mathcal{O}, d), \mathcal{E})$$

Dazu definieren wir eine Abbildung

$$\alpha : Ext^1(\mathcal{O}, \mathcal{E}) \ni [\mathcal{F}] \longmapsto \delta_{[\mathcal{F}]}(1) \in H_{dR}^1(\mathcal{E}) \quad \text{mit } 1 \in H_{dR}^1(\mathcal{O}).$$

Offensichtlich ist α auf den Isomorphieklassen wohl definiert. Außerdem folgt direkt aus der Definition der Baer Summe und des Verbindungsmorphismus', daß α ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wollen nun eine Umkehrabbildung konstruieren. Sei $\omega \in \Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{E} \otimes \Omega^1)$. Wir setzen $\mathcal{F}_\omega := \mathcal{E} \oplus \mathcal{O}$ (als Garbe) und definieren eine Abbildung $\nabla_\omega : \mathcal{F}_\omega \longrightarrow \mathcal{F}_\omega \otimes \Omega^1$ durch $\nabla_\omega(e, \lambda) = (\nabla_{\mathcal{E}}(e) + \lambda\omega, d\lambda) \in \mathcal{F}_\omega \otimes \Omega^1$ für $e \in \mathcal{E}$ und $\lambda \in \mathcal{O}$. Offenbar definiert $(\mathcal{F}_\omega, \nabla_\omega)$ einen Zusammenhang und wir erhalten eine exakte Sequenz von Zusammenhängen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F}_\omega & \longrightarrow & \mathcal{O} \longrightarrow 0 \\ & & e \longmapsto & & (e, 0) & & \\ & & & & (e, \lambda) \longmapsto & & \lambda \end{array}$$

Wir definieren daher eine Abbildung

$$\beta : H_{dR}^1(\mathcal{E}) \ni [\omega] \longmapsto [\mathcal{F}_{[\omega]}] \in Ext^1(\mathcal{O}, \mathcal{E})$$

Wir müssen noch sehen, daß diese Abbildung wohl definiert ist, das heißt: für ein $a \in \Gamma(\mathbb{G}_m, \mathcal{E})$ muß gelten $[\mathcal{F}_\omega] = [\mathcal{F}_{\omega + \nabla_{\mathcal{E}} a}]$ in $Ext^1(\mathcal{O}, \mathcal{E})$. Um dies zu zeigen, definieren wir eine Abbildung $\theta_a : \mathcal{F}_\omega \rightarrow \mathcal{F}_{\omega + \nabla_{\mathcal{E}} a}$ mit $\theta_a(e, \lambda) = (e - \lambda a, \lambda)$. Man rechnet nun ohne die geringsten Probleme nach, daß θ_a ein flacher Morphismus ist, der folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\omega + \nabla_{\mathcal{E}} a} & \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \theta_a \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F}_\omega & \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Das bedeutet gerade, daß β wohl definiert ist.

Wir wollen nun sehen, daß α und β invers zueinander sind. Sei also $[\mathcal{F}] \in Ext^1(\mathcal{O}, \mathcal{E})$. Offenbar gibt es einen Zusammenhang $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}, \nabla)$, so daß

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & (\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}, \nabla) & \longrightarrow & \mathcal{O} \longrightarrow 0 \\ (\star) & & e & \longmapsto & (e, 0) & & \\ & & & & (e, \lambda) & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

eine exakte Sequenz von Zusammenhängen ist und $[\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}] \cong [\mathcal{F}]$ erfüllt. Wegen (\star) gibt eine Abbildung $F : \mathcal{E} \oplus \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^1$ mit $\nabla(e, \lambda) = (F(e, \lambda), d\lambda)$ und $F(e, 0) = \nabla_{\mathcal{E}}(e)$. Aus der Additivität von ∇ folgt nun $F(e, \lambda) = F(e, 0) + F(0, \lambda) = \nabla_{\mathcal{E}}(e) + F(0, \lambda)$ für $e \in \mathcal{E}$ und $\lambda \in \mathcal{O}$. Desweiteren liefert die Leibnizregel, daß die Abbildung $\mathcal{O} \ni \lambda \mapsto F(0, \lambda) \in \mathcal{E} \otimes \Omega^1$ \mathcal{O} -linear ist. Also haben wir $\nabla(e, \lambda) = (\nabla_{\mathcal{E}}(e) + \lambda F(0, 1), d\lambda)$. Aber aus (\star) und der Definition von $\delta_{[\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}]}$ folgt direkt

$$F(0, 1) = \delta_{[\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}]}(1) = \delta_{[\mathcal{F}]}(1)$$

und somit erhalten wir

$$\beta(\alpha([\mathcal{F}])) = \beta(\delta_{[\mathcal{F}]}(1)) = [\mathcal{F}_{\delta_{[\mathcal{F}]}(1)}] = [(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}, \nabla)] = [\mathcal{F}].$$

Umgekehrt ist für ein $\omega \in H_{dR}^1(\mathcal{E})$ $\delta_{[\mathcal{F}_\omega]}(1)$ gleich ω , das heißt $\alpha(\beta(\omega)) = \omega$. Insgesamt haben wir also $\alpha \circ \beta = id_{H_{dR}^1(\mathcal{E})}$ und $\beta \circ \alpha = id_{Ext^1(\mathcal{O}, \mathcal{E})}$ und das liefert die Behauptung.

A.8 Bemerkung A.7 liefert insbesondere einen Isomorphismus von $Ext^1((\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}, d), \mathcal{E})$ nach $H_{dR}^1(\mathcal{E})$. Dieser wird konkret gegeben durch

$$Ext^1(\mathcal{O}, \mathcal{E}) \ni [\mathcal{F}] \longmapsto \delta_{[\mathcal{F}]}(1) \in H_{dR}^1(\mathcal{E}) \quad (\text{für } 1 \in H_{dR}^1(\mathcal{O})).$$

Einen entsprechenden Isomorphismus erhalten wir für formelle Zusammenhänge.

Literatur

- [B] Ein Brief von A. Beilinson an S. Bloch und H. Esnault. (29. April 2001), 2 Seiten.
- [BBE] A. Beilinson, S. Bloch, H. Esnault. \mathcal{E} -Factors for Gauss-Manin determinants. Preprint, 61 Seiten.
- [H] R. Hartshorne. Algebraic Geometry. Springer-Verlag, New York (1977).
- [K-1] N. Katz. On the calculation of some differential galois groups. *Invent. Math.* **87** (1987), no. 1, 13-61.
- [K-2] N. Katz. Local-to-global extensions of representations of fundamental groups. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **36** (1986), no. 4, 69-106.
- [K-3] N. Katz. An Overview of Deligne's Work on Hilbert's Twenty-First Problem. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 28* (1976), 537-557.
- [L] A.H.M. Levelt. Jordan decomposition for a class of singular differential operators. *Ark. Math.* **13** (1975), 1-27.
- [M] B. Malgrange. *Equations Différentielles à Coefficients Polynomiaux*. Progress in Math. **96**, Birkhäuser, Boston (1991).
- [W] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Univ. Press (1994).