31. Mai 2010

Algebraische Geometrie I[1]
Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1. Sei K ein Körper, sei $Y = \mathrm{Proj}\, K[X_0, \ldots, X_n]/I \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät. Seien $\mathbb{P}^n \setminus V_+(X_i) =: U_i$ die Standard offenen Mengen, und sei $Y_i := Y \cap U_i$.

1) Wiederholen Sie, warum
$$Y_i = \mathrm{Spec}\, K[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}]/I_i \subset \mathrm{Spec}\, K[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}] = \mathbb{A}^n,$$
mit
$$I_i = \{F(\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, 1, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots \frac{X_n}{X_i}), F \in I \text{ homogen}\}.$$

Ein K-*rationaler Punkt* von Y ist ein K-rationaler Punkt von einem der Y_i, also $Y(K) = \cup_{i=0}^n Y_i(K)$.

2) Sei $a \in Y_i(K)$. Wiederholen Sie, warum das maximale Ideal von a der Gestalt $\mathfrak{m}_a = (x_0 - a_0, \ldots, x_{i-1} - a_{i-1}, x_{i+1} - a_{i+1}, x_n - a_n)$ in $\mathrm{Spec}\, k[x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$ ist, mit $x_j = \frac{X_j}{X_i}$, $j \neq i$.
3) Zeigen Sie, dass das homogene Ideal zu a das Ideal $(X_j - a_j X_i, j = 0, \ldots, n, j \neq i)$ ist.

Aufgabe 7.2. Sei K ein Körper, sei $\mathbb{P}^n(K) \subset \mathbb{P}^n$ die Teilmenge der K-rationalen Punkte.

1) Zeigen Sie, dass wenn K unendlich ist, der Zariski Abschluss von $\{\mathbb{P}^n(K)\}$ der ganze $\mathbb{P}^n$ ist. *Hinweis:* Zeigen Sie erst, dass es ausreicht, zu zeigen, dass der Zariski Abschluss von $\{\mathbb{A}^n(K)\}$ in $\mathbb{A}^n$ der ganze $\mathbb{A}^n$ ist, dann machen Sie den Fall $n = 1$ und schließen Sie per Induktion.
2) Zeigen Sie, (ohne die Frage 3) zu benutzen), dass wenn $K = \mathbb{F}_q$ endlich ist, dann ist $\mathbb{P}^n(K)$ abgeschlossen in der Zariski-Topologie.
3) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = V_+(&X_0^{q-1}X_1 - X_1^q, \ldots, X_0^{q-1}X_n - X_n^q) \\ &\cup V_+(X_0, X_1^{q-1}X_2 - X_2^q, \ldots, X_1^{q-1}X_n - X_n^q) \\ &\cup \ldots \cup V_+(X_0, \ldots, X_{n-2}, X_{n-1}^{q-1}X_n - X_n^q) \cup V_+(X_0, \ldots, X_{n-1}).\end{aligned}$$

Aufgabe 7.3. Sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper.

[1] Hélène Esnault, Kay Rülling

1) Sei $L \subset \mathbb{P}^2$ eine Untervarietät, die durch ein homogenes Polynom $b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2, b_i \in K$ vom Grad 1 definiert ist (also sind nicht alle b_i gleich 0, zum Beispiel ist $b_0 \neq 0$). Zeigen Sie, dass $L = \operatorname{Proj} K[Y_1, Y_2]$. Man sagt, dass L eine *Gerade* ist.
2) Zeigen Sie, dass die Anzahl der rationalen Punkte von L genau $q + 1$ ist.
3) Zeigen Sie, dass je zwei unterschiedliche rationale Punkte von $\mathbb{P}^2$ auf genau einer Gerade liegen.
4) Sei $a \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$. Zeigen Sie, dass es genau $(q+1)$-Geraden in $\mathbb{P}^2$ gibt, die a enthalten.
5) Zeigen Sie, dass die Anzahl der rationalen Punkte von $\mathbb{P}^2$ genau $q^2 + q + 1$ ist.
6) Zeigen Sie, dass es $(q^2 + q + 1)$ Geraden in $\mathbb{P}^2$ gibt.
7) Sei K ein beliebiger Körper. Zeigen sie, dass die Zuordnung $\mathbb{P}^2(K) \to \{\text{Geraden}\}$, die durch $(b_0 : b_1 : b_2) \to V_+(b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2)$ definiert ist, eine Bijektion ist. Benutzen sie das, um 6) aus 5) herzuleiten.