

Algebraische Geometrie I¹

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1. Sei K ein Körper, sei $Y = \text{Proj } K[X_0, \dots, X_n]/I \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät. Seien $\mathbb{P}^n \setminus V_+(X_i) =: U_i$ die Standard offenen Mengen, und sei $Y_i := Y \cap U_i$.

1) Wiederholen Sie, warum

$$Y_i = \text{Spec } K\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]/I_i \subset \text{Spec } K\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right] = \mathbb{A}^n,$$

mit

$$I_i = \left\{ F\left(\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, 1, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right), F \in I \text{ homogen} \right\}.$$

Ein K -rationaler Punkt von Y ist ein K -rationaler Punkt von einem der Y_i , also $Y(K) = \cup_{i=0}^n Y_i(K)$.

- 2) Sei $a \in Y_i(K)$. Wiederholen Sie, warum das maximale Ideal von a der Gestalt $\mathfrak{m}_a = (x_0 - a_0, \dots, x_{i-1} - a_{i-1}, x_{i+1} - a_{i+1}, x_n - a_n)$ in $\text{Spec } k[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ ist, mit $x_j = \frac{X_j}{X_i}$, $j \neq i$.
- 3) Zeigen Sie, dass das homogene Ideal zu \mathfrak{m}_a das Ideal $(X_j - a_j X_i, j = 0, \dots, n, j \neq i)$ ist.

Aufgabe 7.2. Sei K ein Körper, sei $\mathbb{P}^n(K) \subset \mathbb{P}^n$ die Teilmenge der K -rationalen Punkte.

- 1) Zeigen Sie, dass wenn K unendlich ist, der Zariski Abschluss von $\{\mathbb{P}^n(K)\}$ der ganze \mathbb{P}^n ist. *Hinweis:* Zeigen Sie erst, dass es ausreicht, zu zeigen, dass der Zariski Abschluss von $\{\mathbb{A}^n(K)\}$ in \mathbb{A}^n der ganze \mathbb{A}^n ist, dann machen Sie den Fall $n = 1$ und schließen Sie per Induktion.
- 2) Zeigen Sie, (ohne die Frage 3) zu benutzen), dass wenn $K = \mathbb{F}_q$ endlich ist, dann ist $\mathbb{P}^n(K)$ abgeschlossen in der Zariski-Topologie.
- 3) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) &= V_+(X_0^{q-1}X_1 - X_1^q, \dots, X_0^{q-1}X_n - X_n^q) \\ &\quad \cup V_+(X_0, X_1^{q-1}X_2 - X_2^q, \dots, X_1^{q-1}X_n - X_n^q) \\ &\quad \cup \dots \cup V_+(X_0, \dots, X_{n-2}, X_{n-1}^{q-1}X_n - X_n^q) \cup V_+(X_0, \dots, X_{n-1}). \end{aligned}$$

Lösung:

1) \mathbb{P}_K^n ist irreduzibel und somit ist $U_0 = \mathbb{A}_K^n$ dicht in \mathbb{P}_K^n . Es reicht daher zu zeigen, dass $\mathbb{A}_K^n(K)$ dicht in \mathbb{A}_K^n ist. Wir machen Induktion über

¹Hélène Esnault, Kay Rülling

n . Der Fall $n = 1$: Ist $V(I) \supset \mathbb{A}_K^1(K)$, so gilt für alle $f \in I \subset K[x]$, dass $f(a) = 0$ für alle $a \in K$. Da $\#K = \infty$ kann dies nur sein wenn I das Nullideal ist. Der Induktionsschritt $n-1 \rightarrow n$: Sei $V(I) \supset \mathbb{A}_K^n(K)$. Sei $f \in I \subset K[x_1, \dots, x_n]$. Dann $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ für alle $a_i \in K$. Für $a \in K$, setze $f_a := f(x_1, \dots, x_{n-1}, a) \in K[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Es folgt dass $V(f_a) \supset \mathbb{A}_K^{n-1}(K)$ und somit ist nach Induktionsvoraussetzung $f_a = 0$. Also $f = f - f_a = (x_n - a)g$ für ein $g \in K[x_1, \dots, x_n]$. D.h. $(x_n - a) \mid f$ für alle unendlich vielen Elemente $a \in K$. Das ist nur möglich wenn $f = 0$ ist, da $x - a$ und $x - b$ prim zueinander sind ($a \neq b$) und f endlichen Grad hat, wenn es nicht 0 ist. Da $f \in I$ beliebig war, muss I das Nullideal sein und das liefert die Behauptung.

2) Per Definition $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = \cup_i U_i(\mathbb{F}_q)$ und $U_i \cong \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^n$. Also $\#U_i(\mathbb{F}_q) = \#\mathbb{A}^n(\mathbb{F}_q) = q^n$. Aber ein abgeschlossener Punkt in U_i ist auch abgeschlossen in \mathbb{P}^n und somit ist $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ eine endliche Vereinigung abgeschlossener Punkte in \mathbb{P}^n und somit wieder abgeschlossen.

3) Beachte zuerst, dass für $V_+(X_0) \subset \mathbb{P}_K^n$ gilt

$$V_+(X_0) \cong \text{Proj } K[X_0, \dots, X_n]/(X_0) \cong \mathbb{P}_K^{n-1}.$$

Ist außerdem $V_+(I) \subset \mathbb{P}_K^{n-1}$ eine abgeschlossene Teilmenge, so wird diese unter diesem Isomorphismus auf die abgeschlossene Teilmenge $V_+(X_0, I)$ in \mathbb{P}_K^n abgebildet. Wir erhalten auch

$$\mathbb{P}^n = U_0 \sqcup V_+(X_0) \cong \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}$$

und also auch

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = \mathbb{A}^n(\mathbb{F}_q) \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_q).$$

Da die Punkte auf \mathbb{F}_q in jedem Körper $K \supset \mathbb{F}_q$ gerade dadurch charakterisiert werden, dass sie die Gleichung $x^q - x = 0$ erfüllen, folgt (mit $x_i = X_i/X_0$)

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^n(\mathbb{F}_q) &= V(x_1 - x_1^q, \dots, x_n - x_n^q) \cong V_+(X_0^{q-1}X_1 - X_1^q, \dots, X_0^{q-1}X_n - X_n^q) \cap U_0 \\ &= V_+(X_0^{q-1}X_1 - X_1^q, \dots, X_0^{q-1}X_n - X_n^q). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt da $V_+(X_0) \cap V_+(X_0^{q-1}X_1 - X_1^q, \dots, X_0^{q-1}X_n - X_n^q) = V_+(X_0, X_1, \dots, X_n) = \emptyset$. Insbesondere ist also für $n = 1$: $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) = \mathbb{A}^1(\mathbb{F}_q) \sqcup V_+(X_0) = V_+(X_0^{q-1}X_1 - X_1^q) \sqcup V_+(X_0)$. Und die Gleichung für $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ folgt nun per Induktion und dem oben Gesagten.

Aufgabe 7.3. Sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper.

1) Sei $L \subset \mathbb{P}^2$ eine Untervarietät, die durch ein homogenes Polynom $b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2, b_i \in K$ vom Grad 1 definiert ist (also

sind nicht alle b_i gleich 0, zum Beispiel ist $b_0 \neq 0$). Zeigen Sie, dass $L = \text{Proj } K[Y_1, Y_2]$. Man sagt, dass L eine *Gerade* ist.

- 2) Zeigen Sie, dass die Anzahl der rationalen Punkte von L genau $q + 1$ ist.
- 3) Zeigen Sie, dass je zwei unterschiedliche rationale Punkte von \mathbb{P}^2 auf genau einer Gerade liegen.
- 4) Sei $a \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$. Zeigen Sie, dass es genau $(q + 1)$ -Geraden in \mathbb{P}^2 gibt, die a enthalten.
- 5) Zeigen Sie, dass die Anzahl der rationalen Punkte von \mathbb{P}^2 genau $q^2 + q + 1$ ist.
- 6) Zeigen Sie, dass es $(q^2 + q + 1)$ Geraden in \mathbb{P}^2 gibt.
- 7) Sei K ein beliebiger Körper. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\mathbb{P}^2(K) \rightarrow \{\text{Geraden}\}$, die durch $(b_0 : b_1 : b_2) \rightarrow V_+(b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2)$ definiert ist, eine Bijektion ist. Benutzen Sie das, um 6) aus 5) herzuleiten.

Lösung:

1) Offensichtlich ist $K[Y_1, Y_2] \rightarrow K[X_0, X_1, X_2]/(b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2)$, $Y_i \mapsto X_i$, $i = 1, 2$ ein Isomorphismus von graduierten K -Algebren vom Grad 0 (d.h. es ist ein Isomorphismus von K -Algebren, der die homogene Elemente vom Grad d auf homogene Elemente vom Grad d abbildet). Die Behauptung folgt.

2) Wie in Aufgabe 7.2, 3) haben wir $\#L(\mathbb{F}_q) = \#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) = \#\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_q) + 1 = \#\mathbb{F}_q + 1 = q + 1$.

3) Es folgt aus Aufgabe 7.1, 3) und der Definition von \mathbb{F}_q -rationalen Punkten in $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^2$, dass jeder \mathbb{F}_q -rationale Punkte von $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^2$ durch ein homogenes Ideal

$$\langle a_iX_j - a_jX_i \mid i, j \in \{0, 1, 2\}, i \neq j \rangle, \quad \text{mit } (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{F}_q^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

gegeben wird. (Man beachte, dass dieses Ideal immer von zwei homogenen Polynomen vom Grad 1 erzeugt wird. Wenn z.B. $a_0 \neq 0$ dann wird dieses Ideal von $a_0X_1 - a_1X_0$ und $a_0X_2 - a_2X_0$ erzeugt, denn $a_1X_2 - a_2X_1 = \frac{1}{a_0}(a_1(a_0X_2 - a_2X_0) - a_2(a_0X_1 - a_1X_0))$.) Wir bezeichnen den Punkt in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$, der zu diesem Ideal gehört mit $(a_0 : a_1 : a_2)$. Man sieht leicht $(a_0 : a_1 : a_2) = (a'_0 : a'_1 : a'_2)$ genau dann, wenn $a_i = \lambda a'_i$ mit $\lambda \in K^\times$. (Die vorangegangene Diskussion läßt auf K -rationale Punkte im \mathbb{P}_K^n verallgemeinern, wobei K ein beliebiger Körper ist.)

Seien nun $P = (a_0 : a_1 : a_2)$ und $Q = (c_0 : c_1 : c_2)$ zwei beliebige Punkte in $\mathbb{P}_K^2(K)$. Man rechnet leicht nach, dass dann $P, Q \in L =$

$V_+(b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2)$ genau dann, wenn der Vektor $b = {}^t(b_0, b_1, b_2)$ im Kern der linearen Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} : K^3 \rightarrow K^2$$

liegt. Dieser Kern ist 1-dimensional, daher gibt jedes $b \in \text{Ker } A$ die selbe Gerade L . Es gibt also genau eine Gerade durch P und Q .

4) Wir zeigen zuerst folgende Behauptung:

Sei K ein Körper und L_0 und L_1 Geraden in \mathbb{P}_K^2 , die durch zwei homogene Polynome vom Grad 1 $\ell_0, \ell_1 \in K[X_0, X_1, X_2]$ gegeben werden. Falls $L_0 \neq L_1$, schneiden sich L_0 und L_1 in genau einem K -rationalen Punkt in \mathbb{P}_K^2 , d.h. $L_0 \cap L_1 = \{1 \text{ Punkt in } \mathbb{P}_K^2(K)\}$.

Beweis der Behauptung: Sei $\ell_i = a_iX_i$, $i = 0, 1$, wobei a_0 und a_1 Zeilenvektoren in K^3 sind und $X = {}^t(X_0, X_1, X_2)$. Da $L_0 \neq L_1$ sind a_0 und a_1 linear unabhängig. Es gibt daher eine invertierbare 3×3 Matrix $T \in \text{Gl}_3(K)$, deren ersten beiden Zeilen durch a_0 und a_1 gegeben werden. Die Matrix T definiert einen homogenen K -Isomorphismus vom Grad 0:

$$K[X_0, X_1, X_2] \rightarrow K[X_0, X_1, X_2], \quad X \mapsto TX.$$

(Die Umkehrabbildung wird durch $X \mapsto T^{-1}X$ gegeben.) Dieser Isomorphismus induziert einen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{P}_K^2 \rightarrow \mathbb{P}_K^2$ der K -rationalen Punkte auf K -rationalen Punkte abbildet und $\varphi(L_i) = V_+(X_i)$, $i = 0, 1$, erfüllt. Also können wir ohne Einschränkung annehmen $L_0 = V_+(X_0)$ und $L_1 = V_+(X_1)$. Aber dann ist $L_0 \cap L_1 = V_+(X_0, X_1)$ offensichtlich ein K -rationaler Punkt von \mathbb{P}_K^2 . Das zeigt die Behauptung.

Wir kommen nun zum Teil 4): Sei $a \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$, ohne Einschränkung können wir annehmen $a \in U_0(\mathbb{F}_q)$, d.h. $a \notin L_0 := V_+(X_0)$. Sein nun $L \subset \mathbb{P}_K^2$ eine Gerade, die a enthält, nach der obigen Behauptung gibt es dann einen \mathbb{F}_q -rationalen Punkt a_L mit $L \cap L_0 = \{a_L\}$. Mit Teil 3) erhalten wir also eine Bijektion

$$\{\text{Geraden durch } a\} \xrightarrow{1:1} L_0(\mathbb{F}_q), \quad L \mapsto a_L.$$

Somit folgt 4) aus 2).

5) Wie in 7.2, 3) haben wir: $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q) = \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_q) \sqcup \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$. Daher $\#\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q) = q^2 + q + 1$.

6) Sei $L_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^2$ eine Gerade. Nach 2) $L_0(\mathbb{F}_q) = \{P_1, \dots, P_{q+1}\}$. Nach 4) laufen durch jedes P_i genau $(q+1)$ Geraden $L_0, L_{i1}, \dots, L_{iq}$. Beachte,

dass $L_{ij} \neq L_{i'j'}$ für $(i, j) \neq (i', j')$. Andererseits schneidet nach der Behauptung in 4) jede Gerade die Gerade L_0 in einem Punkt. D.h. L_{ij} mit $i = 1, \dots, q+1, j = 1, \dots, q$ und L_0 sind alle Geraden in $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^2$. Zählen: Es sind $q(q+1) + 1$ Stück. Das zeigt 6).

7) Offensichtlich ist

$$\mathbb{P}^2(K) \rightarrow \{\text{Geraden in } \mathbb{P}_K^2\}, \quad (b_0 : b_1 : b_2) \mapsto V_+(b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2)$$

wohl definiert (d.h. unabhängig von der Darstellung von $(b_0 : b_1 : b_2)$) und surjektiv. Injektiv: Sei $\ell = b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2$ und $\ell' = b'_0X_0 + b'_1X_1 + b'_2X_2$ mit $V_+(\ell) = V_+(\ell')$. Dann $(\ell) = \sqrt{(\ell)} = \sqrt{(\ell')} = (\ell')$ und das kann nur sein wenn $b_i = \lambda b'_i$, $i = 0, 1, 2$, für ein $\lambda \in K^\times$. Das zeigt die Injektivität.