

## Algebraische Geometrie I<sup>1</sup>

### Übungsblatt 8

**Aufgabe 8.1.** Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Char.  $\neq 2$ . Sei  $X \subset \mathbb{P}_K^2$  eine projektive Varietät, die von einem homogenen Polynom des Grads 2 definiert ist, d.h., wenn man  $\mathbb{P}_K^2 = \text{Proj}(K[Y_0, Y_1, Y_2])$  schreibt, dann gibt es  $F \in K[Y_0, Y_1, Y_2]$  homogen vom Grad 2, so dass  $X = \text{Proj}(K[Y_0, Y_1, Y_2]/(F))$ .

- 1) Zeigen Sie, dass  $X$  irreduzibel ist, genau dann wenn es eine Matrix  $(g_{ij}) \in GL(3, K)$  gibt, so dass wenn man  $X_i = \sum_{j=0}^2 g_{ij} Y_j$  setzt, man  $F(Y_i) = G(X_i) = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2$  erhält. *Hinweis:* Schreiben Sie  $F(Y_i) = {}^t Y Q Y$ , wobei  $Q$  eine symmetrische Matrix mit  $K$ -Koeffizienten ist, und  $Y$  der Spaltenvektor  $Y_0, Y_1, Y_2$  ist.
- 2) Zeigen Sie, dass, falls  $X$  irreduzibel ist, der Körper  $K(X)$  der rationalen Funktionen von  $X$  isomorph zu  $K(T)$  ist. Dazu, setzen Sie  $V = X \cap \mathbb{A}_0^2$ , wobei  $\mathbb{A}_0^2 \subset \mathbb{P}^2$  die Standard affine Menge  $\text{Spec } K[x_1, x_2]$ ,  $K[x_1, x_2] = K[\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}]$  ist, und finden Sie einen Isomorphismus zwischen dem Quotientenkörper von  $\mathcal{O}(V)$  und  $K(T)$ .

**Aufgabe 8.2.** Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper, seien  $X \subset \mathbb{A}_K^m$ ,  $Y \subset \mathbb{A}_K^n$  zwei affine Varietäten. Seien  $K[X], K[Y]$  die entsprechenden affinen Ringe. Wir nehmen an  $K[X]$  ist *reduziert* (d.h. es besitzt keine nilpotenten Elemente). Eine Abbildung  $\Phi : X \rightarrow Y$  heißt *regulär*, wenn es für jeden Punkt  $P \in X$  Elemente  $f \in K[X]$  und  $g \in K[Y]$  sowie einen  $K$ -Algebra Homomorphismus  $\varphi_* : K[Y]_g \rightarrow K[X]_f$  gibt, so dass  $P \in D(f)$ ,  $\Phi(D(f)) \subset D(g)$  und  $\Phi|_{D(f)} = \varphi : D(f) \rightarrow D(g)$  ist die von  $\varphi_*$  induzierte stetige Abbildung. Wir bezeichnen mit  $R(X, Y)$  die Menge der regulären Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ .

- 1) Zeigen Sie, dass die natürliche Abbildung

$$\theta : \text{Hom}_{K\text{-Alg}}(K[Y], K[X]) \rightarrow R(X, Y)$$

bijektiv ist.

- 2) Zeigen Sie, dass  $\theta$  eine Bijektion  $R(X, \mathbb{A}^1) \cong K[X]$  induziert.
- 3) Sei  $\varphi : X \rightarrow Y$  eine reguläre Abbildung. Zeigen Sie, dass der Zariski Abschluss von  $\varphi(X)$  genau  $Y$  ist, wenn der Kern des entsprechenden  $K$ -Algebra Homomorphismus'  $\varphi_* : K[Y] \rightarrow K[X]$  aus nilpotenten Elementen besteht.

---

<sup>1</sup>Hélène Esnault, Kay Rülling