

Algebraische Geometrie I¹

Lösung Aufgabe 8.2

Aufgabe (8.2). Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, seien $X \subset \mathbb{A}_K^m$, $Y \subset \mathbb{A}_K^n$ zwei affine Varietäten. Seien $K[X], K[Y]$ die entsprechenden affinen Ringe. Wir nehmen an $K[X]$ ist *reduziert* (d.h. es besitzt keine nilpotenten Elemente). Eine Abbildung $\Phi : X \rightarrow Y$ heißt *regulär*, wenn es für jeden Punkt $P \in X$ Elemente $f \in K[X]$ und $g \in K[Y]$ sowie einen K -Algebra Homomorphismus $\varphi_* : K[Y]_g \rightarrow K[X]_f$ gibt, so dass $P \in D(f)$, $\Phi(D(f)) \subset D(g)$ und $\Phi|_{D(f)} = \varphi : D(f) \rightarrow D(g)$ ist die von φ_* induzierte stetige Abbildung. Wir bezeichnen mit $R(X, Y)$ die Menge der regulären Abbildungen von X nach Y .

- 1) Zeigen Sie, dass die natürliche Abbildung

$$\theta : \text{Hom}_{K\text{-Alg}}(K[Y], K[X]) \rightarrow R(X, Y)$$

bijektiv ist.

- 2) Zeigen Sie, dass θ eine Bijektion $R(X, \mathbb{A}^1) \cong K[X]$ induziert.
 3) Sei $\varphi : X \rightarrow Y$ eine reguläre Abbildung. Zeigen Sie, dass der Zariski Abschluss von $\varphi(X)$ genau Y ist, wenn der Kern des entsprechenden K -Algebra Homomorphismus' $\varphi_* : K[Y] \rightarrow K[X]$ aus nilpotenten Elementen besteht.

Lösung: Wir brauchen zuerst etwas Vorbereitung.

Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass dann $\bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \\ \mathfrak{p} \supset I}} \mathfrak{p} = \mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$ gilt. Ist K ein Körper und R eine endlich erzeugte K -Algebra, kann man diese Aussage verschärfen.

Satz 1. *Sei R eine endlich erzeugte K -Algebra und $I \subset R$ ein Ideal. Dann gilt*

$$(*) \quad \sqrt{I} = \mathcal{I}(V(I) \cap \text{Max } R) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \text{Max } R \\ \mathfrak{m} \supset I}} \mathfrak{m}.$$

Insbesondere ist jedes Primideal \mathfrak{p} in R der Durchschnitt über die \mathfrak{p} enthaltenden maximalen Ideale in R .

Proof. (Rabinowitchs Trick) Wir können R mit $K[x_1, \dots, x_n]/J$, für ein Ideal $J \subset K[x_1, \dots, x_n]$, identifizieren. Die Ideale in R entsprechen eindeutig zu den Idealen in $K[x_1, \dots, x_n]$, die J enthalten. Wir können also ohne Einschränkung annehmen $R = K[x_1, \dots, x_n]$. Die zweite

¹Hélène Esnault, Kay Rülling

Identität in (*) gilt per Definition von \mathcal{I} und trivialerweise gilt auch $\sqrt{I} \subset \bigcap_{\mathfrak{m} \supset I} \mathfrak{m}$. Wir müssen also die andere Inklusion zeigen. Sei $f \in \bigcap_{\mathfrak{m} \supset I} \mathfrak{m}$. Dann ist $R[y] = \langle I, 1 - yf \rangle_{R[y]}$, wobei y eine neue Variable ist. Denn sonst gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{n} \subset R[y]$, dass $\langle I, 1 - yf \rangle$ enthält. Aus dem Hilbert Nullstellensatz folgt, dass wir $R[y]/\mathfrak{n}$ in einen algebraischen Abschluss \bar{K} von K einbetten können. Seien $a_1, \dots, a_n, b \in \bar{K}$ die Bilder von x_1, \dots, x_n, y unter dieser Einbettung. Es folgt, dass

$$(1) \quad 1 - bf(a_1, \dots, a_n) = 0$$

und

$$(2) \quad g(a_1, \dots, a_n) = 0, \quad \text{für alle } g \in I.$$

Sei nun \mathfrak{m} der Kern der Abbildung $R \rightarrow R/I \rightarrow \bar{K}$, $x_i \mapsto a_i$ (wohldefiniert wegen (2)). Dann ist \mathfrak{m} ein maximales Ideal (wegen $K \subset R/\mathfrak{m} \subset \bar{K}$), das offensichtlich I enthält. Somit $f \in \mathfrak{m}$, also $f(a_1, \dots, a_n) = 0$. Ein Widerspruch zu (1).

Also $R[y] = \langle I, 1 - yf \rangle_{R[y]}$ und somit gibt es Polynome $h_0(x, y), h_i(x, y) \in R[y]$ und $f_i(x) \in I$, $i = 1, \dots, r$, mit

$$1 = h_0(x, y)(1 - yf(x)) + \sum_{i \geq 1} h_i(x, y)f_i(x).$$

Setzen wir für y den Bruch $1/f(x)$ ein, erhalten wir in R_f

$$1 = \sum_{i \geq 1} h_i(x, \frac{1}{f(x)})f_i(x).$$

Multiplizieren wir das mit f^n (n groß genug), so erhalten wir $f^n \in \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{R} \subset I$, und das war zu zeigen. \square

Ein Ring R , der für alle Ideale I die Eigenschaft (*) besitzt, heißt ein *Jacobson Ring*. Wir haben also gesehen, dass endlich erzeugte K -Algebren Jacobson Ringe sind. Aber zum Beispiel ist $K[x]_{(x)}$ (= Lokalisierung von $K[x]$ nach dem multiplikativen System $K[X] \setminus (x)$) kein Jacobson Ring.

Nun zur Aufgabe 8.2. Wir schreiben

$$K[X] = R = K[X_1, \dots, X_m]/I = K[x_1, \dots, x_m]$$

und

$$K[Y] = S = K[Y_1, \dots, Y_n]/J = K[y_1, \dots, y_n].$$

Nach Voraussetzung haben wir $\bar{K} = K$ und $\sqrt{I} = I$.

8.2, 1): Ist $\varphi : S \rightarrow R$ ein Homomorphismus von K -Algebren, so bezeichnen wir mit $\tilde{\varphi} : X = \text{Spec } R \rightarrow Y = \text{Spec } S, \mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ die induzierte stetige Abbildung. Wir erhalten eine Abbildung

$$\theta : \text{Hom}_{K\text{-Alg}}(S, R) \rightarrow R(X, Y), \quad \varphi \mapsto \tilde{\varphi}$$

und es ist zu zeigen, dass θ bijektiv ist.

θ ist injektiv: Seien $\varphi, \psi : S \rightarrow R$ zwei K -Algebrahomomorphismen mit $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$. Es gibt dann $f_i, g_i \in K[X_1, \dots, X_m], i = 1, \dots, n$, so dass

$$\varphi(y_i) = f_i(x_1, \dots, x_m), \quad \psi(y_i) = g_i(x_1, \dots, x_m).$$

Sei nun $\mathfrak{m}_a = (x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m) \in \text{Max } R \subset X$ (beachte, dass, wegen $K = \bar{K}$, jedes maximale Ideal diese Gestalt hat). Wir identifizieren \mathfrak{m}_a auch mit dem entsprechenden maximalen Ideal in $V(I) \cap \text{Max } K[X_1, \dots, X_m]$. Dann

$$\tilde{\varphi}(\mathfrak{m}_a) = (y_1 - f_1(a), \dots, y_n - f_n(a)), \quad \tilde{\psi}(\mathfrak{m}_a) = (y_1 - g_1(a), \dots, y_n - g_n(a)).$$

Denn $\varphi(y_i - f_i(a)) = f_i(x) - f_i(a) \in \mathfrak{m}_a$ (Taylor-Entwicklung!) und somit ist also $(y_1 - f_1(a), \dots, y_n - f_n(a))$ im Urbild von \mathfrak{m}_a unter φ enthalten; es ist aber ein maximales Ideal und somit muss Gleichheit gelten. Also folgt aus $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$, dass $f_i(a) = g_i(a)$ für alle i und alle a mit $\mathfrak{m}_a \supset I$. D.h. $f_i - g_i \in \mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{m} \in V(I) \cap \text{Max } K[X_1, \dots, X_m]$. Aus Satz 1 folgt somit $f_i - g_i \in \sqrt{I} = I$; also $f_i(x) = g_i(x)$ in R für alle i ; also $\varphi = \psi$.

θ ist surjektiv: Sei $\Phi \in R(X, Y)$. Es gibt dann $g_i \in S, f_i \in R$ und K -Algebrahomomorphismen $\varphi_i : S_{g_i} \rightarrow R_{f_i}$, so dass $X = \cup_i D(f_i)$ und $\Phi|_{D(f_i)} = \tilde{\varphi}_i : D(f_i) \rightarrow D(g_i)$. Wir beobachten, dass mit R auch R_f eine endlich erzeugte K -Algebra ohne nilpotente Elemente ist, für alle $f \in R \setminus \{0\}$ (Beweis!). Außerdem ist $R_f = \mathcal{O}_X(D(f))$. Wir haben

$$\tilde{\varphi}_i|_{D(f_i f_j)} = \Phi|_{D(f_i f_j)} = \tilde{\varphi}_j|_{D(f_i f_j)} : D(f_i f_j) \rightarrow D(g_i g_j).$$

Die Injektivität von θ angewendet auf die Situation $X = D(f_i f_j)$ und $Y = D(g_i g_j)$ gibt uns also

$$(3) \quad \varphi_i = \varphi_j : S_{g_i g_j} \rightarrow R_{f_i f_j}.$$

Seien nun $a \in S$. Dann ist $\varphi_i(a) \in \mathcal{O}_X(D(f_i))$ und wegen (3) gilt

$$\varphi_i(a)|_{D(f_i f_j)} = \varphi_j(a)|_{D(f_i f_j)} \quad \text{in } \mathcal{O}_X(D(f_i f_j)).$$

Da $X = \cup_i D(f_i)$, folgt aus der Garbeneigenschaft von \mathcal{O}_X nun, dass es ein $\varphi(a)$ in $\mathcal{O}_X(X) = R$ gibt mit $\varphi(a)|_{D(f_i)} = \varphi_i(a)$ für alle i . Außerdem, haben wir für alle i

$$(\varphi(a) + \varphi(b) - \varphi(a + b))|_{D(f_i)} = \varphi_i(a) + \varphi_i(b) - \varphi_i(a + b) = 0.$$

Die Garbeneigenschaft von \mathcal{O}_X impliziert nun, $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Genauso zeigt man auch, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ und $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ für $\lambda \in K$. Somit erhalten wir einen Homomorphismus von K -Algebren $\varphi : S \rightarrow R$, so dass $\varphi(a)|_{D(f_i)} = \varphi_i(a)$. Es folgt, $\Phi = \tilde{\varphi}$.

8.1, 2): Aus 1) folgt, $R(X, \mathbb{A}_K^1) = \text{Hom}_{K\text{-Alg}}(K[x], R)$. Da aber ein K -Algebrahomomorphismus von $K[x]$ in irgendeine andere K -Algebra eindeutig durch seinen Wert in x bestimmt wird, ist

$$\text{Hom}_{K\text{-Alg}}(K[x], R) \rightarrow R, \quad \varphi \mapsto \varphi(x)$$

eine Bijektion. Die Behauptung folgt.

8.1,3): Sei $\Phi : X \rightarrow Y$ eine reguläre Abbildung und sei $\varphi : S \rightarrow R$ der zugehörige K -Algebrahomomorphismus (d.h. $\Phi = \tilde{\varphi}$ in der Notation von 1)). Der Abschluss $\overline{\Phi(X)}$ von $\Phi(X)$ in Y ist gleich $V(\mathcal{I}(\Phi(X)))$. Somit

$$\overline{\Phi(X)} = Y \iff \mathcal{I}(V(\mathcal{I}(\Phi(X)))) = \mathcal{I}(Y) = \sqrt{(0)_S}.$$

Aber

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(V(\mathcal{I}(\Phi(X)))) &= \mathcal{I}(\Phi(X)) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Phi(X)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{q} \in X} \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \\ &= \varphi^{-1} \left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} \right) = \varphi^{-1}(\sqrt{(0)_R}), \end{aligned}$$

und da R reduziert ist haben wir, $\sqrt{(0)_R} = (0)_R$ in R und somit $\varphi^{-1}(\sqrt{(0)_R}) = \text{Ker } \varphi$. Alles zusammen erhalten wir

$$\overline{\Phi(X)} = Y \iff \text{Ker } \varphi = \sqrt{(0)_S}$$

und das ist die Behauptung.