

**Algebraische Geometrie I<sup>1</sup>**  
Übungsblatt 13

**Aufgabe 13.1.** Sei  $K$  ein Körper, seien  $C_i, i = 1, 2, D \subset \mathbb{A}^2$  die Kurven, die durch die Ideale  $I_{C_1} = (y), I_{C_2} = (x), I_D = (x^3 - y^2)$  in  $K[x, y]$  definiert sind. Seien  $\overline{C}_i, \overline{D} \subset \mathbb{P}^2$  die Zariski Abschlüsse. Zeigen Sie, **ohne zu rechnen**, indem Sie Bézout benutzen,

- 1) dass  $\overline{C}_1 \cap \overline{D} \cap (\mathbb{P}^2 - \mathbb{A}^2) = \emptyset$
- 2) dass  $\overline{C}_2 \cap \overline{D} \cap (\mathbb{P}^2 - \mathbb{A}^2) \in \mathbb{P}^2(K)$

**Aufgabe 13.2.** Sei  $K$  ein Körper, seien  $\Gamma_i, i = 1, 2 \subset \mathbb{A}^2$  die Kurven, die durch  $I_{\Gamma_1} = (x^2 + y^2 + 1), I_{\Gamma_2} = (x^2 + y^2 - 1) \in K[x, y]$  definiert sind. Seien  $\overline{\Gamma}_i \subset \mathbb{P}^2, i = 1, 2$  die Zariski Abschlüsse.

- 1) Zeigen Sie, dass wenn  $K$  algebraisch abgeschlossen ist, dann sind  $\Gamma_1, \Gamma_2$  glatt, genau dann wenn  $K[x, y]/I_{\Gamma_1}, K[x, y]/I_{\Gamma_2}$  reduziert sind, genau dann wenn die Ideale  $\sqrt{I_{\Gamma_i}}$  nicht gleich sind, genau dann wenn  $\text{char. } K \neq 2$ .
- 2) Wir nehmen jetzt an, dass  $\text{char. } K \neq 2$ . Zeigen Sie, dass  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .
- 3) Wenn  $-1$  kein Quadrat in  $K$  ist, zeigen Sie, dass  $\overline{\Gamma}_i \cap (\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{A}^2)$  keinen rationalen Punkt enthält für  $i = 1, 2$ , und dass  $\overline{\Gamma}_i \cap (\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{A}^2)$  aus einem einzigen Punkt des Grads 2 besteht.
- 4) Wenn  $-1$  ein Quadrat in  $K$  ist, zeigen Sie, dass  $\overline{\Gamma}_i \cap (\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{A}^2)$  aus zwei rationalen Punkten besteht.
- 5) Wir nehmen an, dass  $-1$  ein Quadrat in  $K$  ist. Zeigen Sie, dass  $\mu_p = 2$  für jeden Punkt  $p \in \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$ .

**Aufgabe 13.3.** Sei  $K$  ein Körper, seien  $f, g \in K[x, y] \setminus K$  Polynome, sei  $C = V((f)), D = V((g)) \subset \mathbb{A}^2$ . Wir nehmen an, dass  $C$  und  $D$  keine gemeinsame irreduzible Komponente haben. Sei  $L \supset K$  eine Galois Erweiterung. Wir definieren  $C \otimes L \subset \mathbb{A}_L^2$  durch  $f \in L[x, y]$ . Sei  $x = (a, b)$ , mit  $a, b \in L$ , ein  $L$ -rationaler Punkt in  $C \otimes L \cap D \otimes L$ . Sei  $\sigma$  ein Element aus der Galois Gruppe von  $L$  über  $K$ , und sei  $\sigma \cdot x = (\sigma(a), \sigma(b))$ .

- 1) Zeigen Sie, dass  $C \otimes L, D \otimes L$  keine gemeinsame irreduzible Komponente besitzen.
- 2) Zeigen Sie, dass  $\sigma \cdot x$  ein  $L$ -rationaler Punkt von  $C \otimes L \cap D \otimes L$  ist.

---

<sup>1</sup>Hélène Esnault, Kay Rülling

2

- 3) Zeigen Sie, dass  $\sigma \cdot x = x \forall \sigma$  genau dann, wenn  $x$  ein  $K$ -rationaler Punkt von  $C \cap D$  ist
- 4) Zeigen Sie, dass  $\mu_x = \mu_{\sigma \cdot x}$ .