

# Algebraische Geometrie I<sup>1</sup>

## Lösung Aufgabe 6.4

**Aufgabe 1** (6.4). Sei  $K$  ein Körper,  $S = K[X_0, \dots, X_n]$ ,  $R = K[t_1, \dots, t_n]$ ,  $\mathbb{A}_K^n = \text{Spec } R$ ,  $\mathbb{A}_K^{n+1} = \text{Spec } S$ ,  $\mathbb{P}_K^n = \text{Proj } S$ . Sei

$$Q : \mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{(X_0, \dots, X_n)\} \rightarrow \mathbb{P}_K^n, \quad \mathfrak{p} \mapsto \bigoplus_{d \geq 0} (\mathfrak{p} \cap S_d)$$

die Quotientenabbildung. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass  $Q$  surjektiv und stetig ist.

(1) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus V(X_i) \subset \mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{(X_0, \dots, X_n)\}$  unter  $Q$  auf  $U_i = \mathbb{P}_K^n \setminus V_+(X_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , abgebildet wird.

(2) Sei  $\mathfrak{m} = (X_0 - a_0, \dots, X_n - a_n)$  ein  $K$ -rationaler Punkt von  $\mathbb{A}_K^{n+1}$  mit  $a_0 \neq 0$ . Bestimmen Sie das Bild von  $\mathfrak{m}$  unter der

$$\text{Zusammensetzung } \mathbb{A}_K^{n+1} \setminus V(X_0) \xrightarrow{Q} U_0 \xrightarrow{\varphi_0^{-1}} \mathbb{A}_K^n.$$

(3) Sei  $\mathfrak{m}$  wie in (2). Zeigen Sie, dass

$$Q^{-1}(Q(\mathfrak{m})) =$$

$$V(a_0X_1 - a_1X_0, a_0X_2 - a_2X_0, \dots, a_0X_n - a_nX_0) \cap \mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{(X_0, \dots, X_n)\}.$$

(4) Sei  $Q_r$  die Zusammensetzung

$$Q_r : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \simeq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \setminus \{(X_0, \dots, X_n)\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \setminus \{(X_0, \dots, X_n)\} \xrightarrow{Q} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$$

Stellen Sie sich die Urbilder unter  $Q_r$  der Situationen (1) und (2) aus Aufgabe 6.3 vor! Malen Sie Bilder in bunten Farben und verstehen Sie die Unendlichkeit!

*Lösung:*

(1) Sei  $\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_K^{n+1} \setminus V(X_i)$ . Dann ist  $X_i$  nicht in  $\mathfrak{p}$  enthalten und somit auch nicht in  $Q(\mathfrak{p})$ , wegen  $\mathfrak{p} \supset \bigoplus_{d \geq 0} (S_d \cap \mathfrak{p}) = Q(\mathfrak{p})$ . Also  $Q(\mathfrak{p}) \in U_i$ .

Sei nun  $\mathfrak{p} = (a_0X_1 - a_1X_0, a_0X_2 - a_2X_0, \dots, a_0X_n - a_nX_0) \subset S$  mit  $a_0 \neq 0$ . Offensichtlich ist  $\mathfrak{p}$  ein homogenes Primideal und ein Punkt in  $\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus V(X_i)$ . Bevor wir (2) und (3) machen, zeigen wir erst folgende

Behauptung:  $\mathfrak{p} = Q(\mathfrak{p}) = Q(\mathfrak{m})$ , mit  $\mathfrak{m}$  wie in (2) (d.h.  $\mathfrak{p}$  ist das kleinste homogene Ideal, das über  $\mathfrak{m}$  liegt).

Beweis: Die erste Gleichung gilt da  $\mathfrak{p}$  homogen ist. Offensichtlich gilt  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ ; also auch  $Q(\mathfrak{p}) \subset Q(\mathfrak{m})$  und da  $\varphi_0$  ein Homöomorphismus ist, gilt Gleichheit genau dann, wenn  $\varphi_0^{-1}(Q(\mathfrak{p})) = \varphi_0^{-1}(Q(\mathfrak{m}))$  gilt. (Beachte in der Vorlesung haben wir  $\varphi_0^{-1}$  auch  $\psi_0$  genannt.) Aber

---

<sup>1</sup>Hélène Esnault, Kay Rülling

indem wir die  $X_0$ -Koordinate in den definierenden Gleichungen von  $\mathfrak{p}$  gleich 1 setzen sehen wir das  $\varphi_0^{-1}(Q(\mathfrak{p}))$  auf jeden Fall das Ideal

$$\mathfrak{m}_0 = \left(t_1 - \frac{a_1}{a_0}, \dots, t_n - \frac{a_n}{a_0}\right)$$

enthält. Dies ist aber ein maximales Ideal und somit  $\varphi_0^{-1}(Q(\mathfrak{m})) = \varphi_0^{-1}(Q(\mathfrak{p})) = \mathfrak{m}_0$ . Das zeigt die Behauptung.

(2) Wir haben gerade gesehen:  $\varphi_0^{-1}(Q(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}_0$ .

(3) Es folgt aus (2), dass die einpunktige Teilmenge  $\{Q(\mathfrak{m})\}$  in  $U_0$  abgeschlossen ist, somit auch in  $\mathbb{P}_K^n$ . Insbesondere  $Q(\mathfrak{m}) = V_+(Q(\mathfrak{m})) = V_+(\mathfrak{p})$  (wegen der Behauptung). Also (siehe Vorlesung)  $Q^{-1}(Q(\mathfrak{m})) = Q^{-1}(V_+(\mathfrak{p})) = V(\mathfrak{p}) \cap \mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{(X_0, \dots, X_n)\}$ .

(4) Es folgt aus (3) das unter der Abbildung  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  alle Punkte die auf einer Geraden durch  $(0, 0, 0)$  und  $(a_0, a_1, a_2)$  liegen auf den selben Punkt abgebildet werden. Stellen Sie sich nun den  $\mathbb{R}^3$  vor (mit Koordinaten  $X_0, X_1, X_2$ ). Jede Gerade durch 0 trifft mindestens eine der Ebenen  $E_i = V(X_i - 1)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , in genau einem Punkt und  $Q$  induziert einen Homöomorphismus von  $E_i$  auf  $U_i$ . Im Fall von Aufgabe 6.3, (1) fassen wir die beiden Geraden  $G_1, G_2$  als Gerade auf  $E_0$  auf (d.h.  $G_1 = V(X_0 - 1, X_2)$ ,  $G_2 = V(X_0 - 1, X_0 + X_2)$ ). Nun betrachten wir alle Geraden in  $\mathbb{R}^3$  durch 0, die durch einen Punkt von  $G_1$  oder  $G_2$  laufen. Die Menge dieser Geraden ergibt wieder zwei Ebenen in  $\mathbb{R}^3$ , die jeweils  $G_1$  und  $G_2$  und den Nullpunkt enthalten. Diese beiden Ebenen schneiden sich in der  $X_1X_2$ -Ebene (d.h.  $X_0 = 0$ ) wieder in einer Geraden, die unter  $Q$  auf einen Punkt abgebildet wird. Das ist der Punkt im Unendlichen in dem sich  $G_1$  und  $G_2$  schneiden...