

1. KLAUSUR zur Algebraischen Geometrie I

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Unterschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
von	10	10	6	10	4	40
erreicht:						

Note:

Nicht bestanden:

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei $K \supset k$ eine endliche Körpererweiterung.

- 1) Sei $x \in K$. Zeigen Sie, dass die Multiplikation mit x , die durch $m_x : K \rightarrow K, y \mapsto x \cdot y$ definiert ist, k -linear ist.
- 2) Sei $e_i, i = 1, \dots, n$ eine Basis von K über k , und sei $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in K$. Zeigen Sie, dass es ein homogenes Polynom $N_e \in k[X_1, \dots, X_n]$ des Grads n gibt, so dass $N_e(x_1, \dots, x_n) = \det(m_x) \in k$.
- 3) Zeigen Sie, dass $N_e(x_1, \dots, x_n) \in k^\times$ genau dann wenn $x \in K^\times$.
- 4) Sei $n = 2$. Zeigen Sie, dass die Hyperfläche in \mathbb{P}_k^1 , die durch N_e definiert ist, Dimension 0 hat, und nur aus einem einzigen abgeschlossenen Punkt besteht, dessen Restklassenkörper Grad 2 über k hat. *Hinweis:* Wählen Sie eine Basis aus, und rechnen Sie die Matrix von m_x in dieser Basis aus.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Sei k ein endlicher Körper der Charakteristik $p > 0$ und der Kardinalität q . Sei $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom. Sei N die Kardinalität der Menge $\{(x_1, \dots, x_n) \in k^n, f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$.

- 1) Sei $P := 1 - f^{q-1} \in k[X_1, \dots, X_n]$. Zeigen Sie die Kongruenz

$$N \equiv \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in k^n} P(x_1, \dots, x_n) \pmod{p}.$$

- 2) Zeigen Sie, dass wenn $\text{Grad}(f) < n$, so ist $\text{Grad}(P) < n(q-1)$.
- 3) Zeigen Sie, dass wenn $u < q-1$, $u \in \mathbb{N}$, dann gilt $\sum_{x \in k} x^u = 0$ in k (hier per Definition $0^0 = 1$). (*Hinweis:* Im Fall $u \neq 0$, erinnern Sie sich daran, dass K^\times zyklisch ist. Zeigen Sie, dass es ein $y \in K^\times$ mit $y^u \neq 1$ gibt und benutzen Sie, dass $x \mapsto y \cdot x$ eine Bijektion auf K^\times ist.)
- 4) Schließen Sie daraus, dass wenn $\text{Grad}(f) < n$, so ist $N \equiv 0$ modulo p . (*Hinweis:* Schließen Sie aus 2), dass P eine Linearkombination von Monomen $X_1^{u_1} \cdots X_n^{u_n}$ ist, mit $u_i < q-1$ für mindestens ein i . Dann benutzen Sie Teil 3).)
- 5) Sei $X \subset \mathbb{P}_k^{n-1}$ eine Hyperfläche, die durch ein homogenes Polynom $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ des Grads $< n$ definiert ist. Zeigen Sie, dass X einen k -rationalen Punkt besitzt.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Sei K ein Körper, sei R eine affine K -Algebra, sei $X = \text{Spec } R$. Sei $x \in X$ ein K -rationaler Punkt, und R_x die Lokalisierung von R im maximalen Ideal \mathfrak{m}_x von x .

- 1) Zeigen Sie, dass x ein rationaler Punkt von $\text{Spec } R_x$ ist.
- 2) Zeigen Sie, dass wenn X irreduzibel ist, so ist $\dim \text{Spec } R_x = \dim X = \dim(\text{Spec } R_x \setminus \{x\}) + 1$.
- 3) Zeigen Sie, dass $(\text{Spec } R_x \setminus \{x\})$ keinen K -rationalen Punkt hat.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $C \subset \mathbb{P}_K^2$ eine glatte Kurve, die durch ein homogenes Polynom des Grads $n \geq 1$ definiert ist. Sei $x \in C(K)$ ein rationaler Punkt. Eine Gerade $L \subset \mathbb{P}_K^2$ durch x heißt *Tangente* an C in x , wenn die Schnittmultiplizität $\mu_x(C \cap L) \geq 2$.

- 1) Zeigen Sie, dass eine und nur eine Tangente an C in x immer existiert.
- 2) Wenn $n = 2$, zeigen Sie, dass eine Tangente an einem rationalen Punkt die Kurve C nur in diesem Punkt trifft.
- 3) Wenn $n = 3$, zeigen Sie, dass eine Tangente L an einem rationalen Punkt $x \in C$ nur in diesem Punkt x trifft oder in diesem Punkt x und in einem anderen Punkt y . Falls der andere Punkt y existiert, zeigen Sie, dass dann L keine Tangente an C in y ist. *Hinweis:* Rechnen Sie $\mu_p(C \cap L)$ für $p = x$ und $p = y$.
- 4) Sei $C = V_+(ZY^2 - X(X - Z)(X - \lambda Z))$, $\lambda \in K$. Finden Sie die Werte $\lambda \in K$, so dass C in allen Punkten glatt ist. Finden Sie dann einen Punkt $x \in C$ auf der glatten Kurve, der eine Tangente L hat mit $\mu_x(C \cap L) \geq 3$.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Sei K ein Körper, sei $X = \text{Spec } R$, $R := K[X_1, \dots, X_n]/I$ eine affine K -Varietät. Zeigen Sie, dass ein abgeschlossener Punkt x von X rational ist genau dann wenn das vom maximalen Ideal \mathfrak{m}_x von x erzeugte Ideal in $R \otimes \bar{K} := \bar{K}[X_1, \dots, X_n]/\langle I \rangle$ maximal ist. Hier ist $\langle I \rangle$ das von I erzeugte Ideal in $\bar{K}[X_1, \dots, X_n]$.