UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Optimale Abschätzungen für positive lineare Funktionale (und Operatoren)

Diplomarbeit von Tim Steinmann

Betreuer: Prof. Dr. dr. h.c. Heiner Gonska

Fakultät für Mathematik – AG Mathematische Informatik

Im Fokus dieser Diplomarbeit stehen optimale Abschätzungen für den Fehler bei der Approximation stetiger Funktionen durch lineare positive Funktionale / Operatoren. Zunächst wird eine quantitative Aussage für positive lineare Funktionale im Allgemeinen angestrebt. Dafür wird ein Korollar von Păltănea auf den Fall der stetigen Funktionen über einem kompakten Intervall übertragen. Für diese Abschätzung legt die Arbeit einen anschaulichen sowie ausführlichen Beweis dar. Ferner wird das gewonnene Resultat auf Operatoren übertragen. Dabei widmet sich die Betrachtung speziell dem Bernstein-, dem Kantorovich- und dem Schoenberg-Operator.

Hauptresultat:

Sei $F: C[a,b] \to \mathbb{R}$ ein lineares positives Funktional und weiter $f \in C[a,b]$ beschränkt, $x \in [a,b]$ und $h > 0$. Dann gilt:

(i) Für $h \leq \frac{b-a}{2}$ und $s \geq 2$ erhalten wir:

$$|F(f) - f(x)| \leq |F(e_0) - 1| \cdot |f(x)| + |F(e_1 - xe_0)| h^{-1}\, \omega_1(f,h) + \left(F(e_0) + \tfrac{1}{2} h^{-s} F(|e_1 - xe_0|^s)\right) \cdot \omega_2(f,h).$$

(ii) Wenn $F(e_0) = 1, F(e_1) = x$, x ein innerer Punkt von $[a,b]$ und $h \geq \frac{b-a}{2}$ ist, so erhalten wir:

$$|F(f) - f(x)| \leq \omega_2(f,h).$$

Die Abschätzung des Approximationsfehlers berücksichtigt Kombinationen der Glattheitsmodule erster und zweiter Ordnung, sowie den Absolutbetrag der Funktion, der als Glattheitsmodul der Ordnung 0 betrachtet werden kann, bezüglich der Momente der Ordnungen 0, 1 und 2. Abschätzungen dieser Art sind genauer als solche, die nur den Glattheitsmodul erster Ordnung verwenden. Noch hinzu zerfällt der Approximationsfehler durch diese Kombinationen in drei Komponenten, die drei spezifischen, den Fehler beeinflussenden Eigenschaften der Funktion entsprechen. Genauer bedeutet das die Aufspaltung in Amplitude, Abweichung von linearen Funktionen und Abweichung von Polynomen zweiten Grades. Grob gesprochen messen die Glattheitsmodule die Abweichung von den Testfunktionen des algebraischen Chebychev-Systems, das aus den ersten drei Monomen besteht.

Der Bernstein-Operator

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$, $x \in [0,1]$. Dann ist das Bernstein-Polynom $B_n f: [0,1] \to \mathbb{R}$ der Funktion f definiert durch

$$B_n f := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}$$

mit den Bernstein-Grundfunktionen

$$p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

für $k \in [0,n]_{\mathbb{Z}}$.

Approximationsgüte

Seien $n \in \mathbb{N}, f \in C[0,1], x \in [0,1], s \geq 2$ und $0 < h \leq \frac{1}{2}$, dann gilt:

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{2} h^{-s} \cdot B_n(|e_1 - xe_0|^s; x)\right) \cdot \omega_2(f,h).$$

Für Momente bis zur Ordnung s= 2 erhalten wir:

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{2} h^{-2} \frac{x(1-x)}{n}\right) \cdot \omega_2(f,h).$$

Für $s = 2, n \geq 4$ und $h = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ergibt sich dann:

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{9}{8} \cdot \omega_2\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Der Kantorovich-Operator

Es seien $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$. Ferner sei $B_n: C[0,1] \to C[0,1]$ der klassische Bernstein-Operator der Ordnung n. Dann ist der Kantorovich-Operator der Ordnung (n,k) definiert durch:

$$Q_n^k := D^k \circ B_n \circ I_k$$

wobei $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$ und $I_k: C[0,1] \to C[0,1]$ mit $I_k f = f$ für $k = 0$ und $(I_k f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)dt$ für $k \geq 1$ gilt.

Approximationsgüte

Seien $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0, 0 < h \leq \frac{1}{2}$. Dann gilt für $f \in C[0,1], x \in [0,1], s = 2$ und $n \geq \max\{k+2, k(k+1)\}$:

$$|Q_n^k(f;x) - f(x)| \leq \tfrac{k(k-1)}{2n} \cdot |f(x)| + \tfrac{k}{2n} h^{-1}\, \omega_1(f,h) + \left(1 + \tfrac{1}{2} h^{-2} \cdot \tfrac{3n-2k}{12n^2}\right) \cdot \omega_2(f,h).$$

Aufgrund der Reproduktionseigenschaften des Operators lassen sich die Abschätzungen in drei Fälle aufteilen.

1. Fall: $k = 0, s = 2$
   $$|Q_n^0(f;x) - f(x)| = |B_n(f;x) - f(x)| \leq \left(1 + \tfrac{1}{2} h^{-2} \cdot \tfrac{1}{4n}\right) \cdot \omega_2(f,h).$$
2. Fall: $k = 1, s = 2$ und $n \geq \max\{k+2, k(k+1)\}$
   $$|Q_n^1(f;x) - f(x)| \leq \tfrac{1}{2n} \cdot h^{-1} \cdot \omega_1(f,h) + \left(1 + \tfrac{1}{2} h^{-2} \cdot \tfrac{3n-2}{12n^2}\right) \cdot \omega_2(f,h).$$
3. Für $k \geq 2$ erhalten wir drei Terme als obere Schranke. Nachfolgend ist dies als Beispiel für den Fall $k = 2$ ausgeführt: $s = 2$ und $n \geq \max\{k+2, k(k+1)\}$
   $$|Q_n^2(f;x) - f(x)| \leq \tfrac{1}{n} \cdot |f(x)| + \tfrac{1}{n} \cdot h^{-1} \cdot \omega_1(f,h) + \left(1 + \tfrac{1}{2} h^{-2} \cdot \tfrac{3n-4}{12n^2}\right) \cdot \omega_2(f,h).$$

Seien die Voraussetzungen von 3. gegeben und wählen wir zusätzlich $h := \frac{1}{\sqrt{n}}$, dann folgt:

$$|Q_n^k(f;x) - f(x)| \leq \frac{k(k-1)}{2n} \cdot |f(x)| + \frac{k}{2\sqrt{n}} \cdot \omega_1\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{9}{8} \cdot \omega_2\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Ferner ergibt sich somit für den klassischen Kantorovich-Operator

$$|Q_n^1(f;x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \omega_1\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{9}{8} \cdot \omega_2\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Der Schoenberg-Operator

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x}_{0,n}: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ eine Zerlegung des Intervalls $[0,1]$ und $f: [0,1] \to \mathbb{R}$. Für $k \in \mathbb{N}$ erweitern wir die Zerlegung durch

$$x_{-k} = \cdots = x_{-1} = x_0 = 0$$
$$1 = x_n = x_{n+1} = \cdots = x_{n+k}$$

zu einer Sequenz $\boldsymbol{x}_{0,n}^k$ von *"knots"*.

Der k-te Schoenberg-Spline $S_{n,} f: [0,1] \to \mathbb{R}$ der Funktion f bzgl. $\boldsymbol{x}_{0,n}$ ist definiert durch:

$$S_{n,k}(f;x) := \begin{cases} \sum_{j=-k}^{n-1} f(\xi_{j,k}) \cdot N_{j,k}(x), x \in [0,1) \\ \lim_{y \nearrow 1} S_{n,k}(f;y), x = 1 \end{cases}.$$

Hierbei sind $\xi_{j,} = \frac{x_{j+1} + \cdots + x_{j+k}}{k}, j \in [-k, n-1]_{\mathbb{Z}}$ die *"nodes"* (Greville-Abszissen).

Approximationsgüte:

Seien $n, \in \mathbb{N}, \boldsymbol{x}_{0,n}^k$ eine Knotensequenz, $f \in C[0,1], x \in [0,1]$ und $0 < h \leq \frac{1}{2}$, dann gilt:

$$\left|S_{n,k}(f;x) - f(x)\right| \leq \left(1 + \frac{1}{2} h^{-2} \cdot \min\left\{\frac{1}{2k}, \frac{(k+1)\left\|\boldsymbol{x}_{0,n}^k\right\|^2}{12}\right\}\right) \cdot \omega_2(f,h).$$

Damit lassen sich folgenden Abschätzungen in Abhängigkeit der Wahl von h erreichen:

1. $\left|S_{n,k}(f;x) - f(x)\right| \leq \frac{5}{4} \cdot \omega_2\left(f, \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.
2. $\left|S_{n,k}(f;x) - f(x)\right| \leq \left(1 + \frac{k+1}{24}\right) \cdot \omega_2\left(f, \left\|\boldsymbol{x}_{0,n}^k\right\|\right)$.
3. $\left|S_{n,k}(f;x) - f(x)\right| \leq \frac{3}{2} \cdot \omega_2\left(f, \sqrt{\min\left\{\frac{1}{2k}, \frac{(k+1)\left\|\boldsymbol{x}_{0,n}^k\right\|^2}{12}\right\}}\right)$.

Simultanapproximation:

Seien $r \in \mathbb{N}_0, n \geq \max\{r+2, r(r+1)\}, f \in C^r[0,1], B_n$ der Bernstein-Operator der Ordnung n und $x \in [0,1]$ sowie $0 < h \leq \frac{1}{2}$. Dann gilt:

$$|D^r B_n(f;x) - D^r f(x)| \leq \tfrac{r(r-1)}{2n} \cdot |D^r f(x)| + \tfrac{r}{2n} \cdot h^{-1} \cdot \omega_1(D^r f, h) + \left(1 + \tfrac{1}{2h^2} \cdot \tfrac{3n-2r}{12n^2}\right) \cdot \omega_2(D^r f, h).$$

Mit $h = \frac{1}{\sqrt{n}}$ und $n \geq 4$ folgt daraus

$$|D^r B_n(f;x) - D^r f(x)| \leq \tfrac{r(r-1)}{2n} \cdot |D^r f(x)| + \tfrac{r}{2\sqrt{n}} \cdot \omega_1\left(D^r f, \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) + \tfrac{9}{8} \cdot \omega_2\left(D^r f, \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right).$$