Universität
DUISBURG
ESSEN
Campus Essen, Mathematik
PD Dr. Lutz Strüngmann

WS 2008/09

16. Februar 2009

Die Ergebnisse finden Sie demnächst unter:

http://www.uni-due.de/algebra-logic/struengmann.shtml

Klausur zur Logik

1. **Aufgabe: (Warm up (1 + 1) Punkte)** Lösen Sie folgende Rätsel:

   (a) Paul ist mit seinen Eltern nach Logistan gezogen. Auf dieser Insel sind ein Teil der Menschen *Normale*, die mal lügen und mal nicht. Ein Teil sind *Edle*. Sie sagen immer die Wahrheit. Und der Rest sind *Lügner*, die immer lügen.

   In Logistan lauern Probleme wirklich überall, natürlich auch beim Geld! Statt in Euro zahlen die Menschen auf der Insel in der Währung Logi, und jeder Geldschein sieht anders aus. Denn weil der Sultan sich beim Gelzählen immer langweilte, lässt er die Scheine seit Neuestem von Künstlern drucken (in diesem Beruf arbeiten nur Edle und Lügner) - die nun die buntesten Scheine mit den schrägsten Bildern und Sprüchen in Umlauf bringen. Gestern hatte Paul eine Banknote in der Hand, auf der stand: *Dieser logi zeigt zwei Vögel* - dabei waren drei Papageien abgebildet. Als Paul damit einen fliegenden Teppich kaufen wollte, zeigte ihm der Verkäufer seinerseits einen Vogel. Denn nach Gesetz sind nur solche Scheine gültig, die von edlen Künstlern stammen. Heute hat Paul einen Schein in der Hand, auf dem steht: *Dieser Schein stammt von mir.*

   Kann Paul damit einkaufen?

   (b) In der Schublade eines dunklen Zimmers liegen zwölf weiße Socken und zwölf schwarze. Wie viele Socken müssen Sie herausholen, damit Sie sicher zwei Socken der gleichen Farbe haben?

2. **Aufgabe: (1 + 8 + 2 + 4) Punkte**

   (a) Geben Sie die Definition einer Turing-Maschine.

   (b) Konstruieren Sie für vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ eine Turing-Maschine T, die entscheidet, ob die Eingabe beliebig lange 0-Blöcke enthält, jedoch nur 1-Blöcke der Länge n enthält, wobei diese jeweils gedoppelt und durch **eine** 0 getrennt auftreten, also von der Form $11\cdots1011\cdots1$ sind. So soll zum Beispiel die Eingabe 000111101111000000111101111000000 für $n = 4$ akzeptiert werden, jedoch die Eingabe 00111100111100000011111 verworfen werden.

   (c) Zeigen Sie am Beispiel $n = 2$ und der Eingabe 00011011011000, dass Ihre Turing Maschine funktioniert.

   (d) Modifizieren Sie T so, dass nach Akzeptanz der Eingabe jeweils jede zweite 1 durch eine 0 ersetzt wird.

3. **Aufgabe: 4 Punkte**

   Zeigen Sie, dass
   $$(\neg\Phi \to \neg\Psi) \to (\Psi \to \Phi)$$
   eine Tautologie ist.

4. **Aufgabe: (2 + 2 + 2) Punkte**

   Zeigen Sie in der Sprache der Gruppen bzw. angeordneten Körper

   (a) $(\mathbb{Z}, +, 0) \cong (2\mathbb{Z}, +, 0)$

   (b) $(\mathbb{Z}, +, 0) \ncong (\mathbb{Z}/nZ, +, 0)$ für $n \in \mathbb{N}$

   (c) Ist die $<$-Relation definierbar über $(\mathbb{Q}, +, *, 0)$ bzw. $(\mathbb{Q}, +, 0)$?

5. **Aufgabe: (2 + 3 + 3) Punkte**

   (a) Geben Sie die Definition von Konfinalität und geben Sie ein Beispiel einer Kardinalzahl κ mit $cf(\kappa) = \aleph_1$.

   (b) Seien α und β Ordinalzahlen. Zeigen Sie:

i. Ist $\alpha \leq \beta$, so gilt $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

ii. $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$

6. **Aufgabe: 6 Punkte**

   Bestimmen Sie die Mächtigkeit des Polynomrings $\mathbb{R}[x_i : i \in I]$, wobei I eine Indexmenge ist. Beachten Sie, dass jedes Polynom in $\mathbb{R}[x_i : i \in I]$ nur **endlich** viele Variablen enthält !

7. **Aufgabe: (3 + 0 + 6) Punkte**

   Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl und M ein abzählbares transitives Modell von ZFC. Sei weiterhin $\mathbf{P} = \{f : dom(f) \to \omega \ \mathit{mit}\ dom \subseteq \kappa \times \omega \ \mathit{endlich}\ \}$ partiell geordnet mittels Fortsetzung als Funktion. Sei G ein $\mathbf{P}$-generischer Filter und $h := \bigcup_{g \in G} g : \kappa \times \omega \to \omega$.

   (a) Zeigen Sie, dass $G \notin M$ gilt.

   (b) Denken Sie sich zwei natürliche Zahlen $m, n > 1$ aus.

   (c) Zeigen Sie, dass für $\alpha \neq \beta < \kappa$ die Menge $A_{\alpha,\beta} := \{k \in \omega : h(\alpha, k) = n \ \mathit{und}\ h(\beta, k) = m\}$ unendlich ist.