Universität
DUISBURG
ESSEN
Campus Essen, Mathematik
PD Dr. L. Strüngmann
Lineare Algebra

WS 2008/09

Zermelo-Fränkel Axiome (ZF)

Wir setzen ein intuitives Verständnis von Mengen, der Teilmengenrelation $\subseteq$ und der ϵ-Relation voraus. Im folgenden seien X, Y und Z Mengen.

Erweiterungsaxiom: *Haben X und Y dieselben Elemente, so sind sie gleich.*

$$X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Longrightarrow X = Y.$$

Axiom der leeren Menge: *Es gibt eine Menge $\emptyset$, die keine Elemente besitzt. $\emptyset := \{X : X \neq X\}$ heißt die leere Menge*

Vereinigungsaxiom: *Ist X eine Menge, so existiert eine Menge deren Elemente genau die Elemente der Elemente von X sind.*

$$X \text{ Menge } \Longrightarrow \bigcup_{Y \in X} Y \text{ Menge}.$$

Unendlichkeitsaxiom: *Es existiert eine Menge, die die leere Menge als Element enthält und induktiv ist.*

$$\exists X \text{ mit } \emptyset \in X \wedge (Y \in X \Longrightarrow Y \cup \{Y\} \in X).$$

Fundierungsaxiom: *Jede nicht-leere Menge X enthält ein Element Y, so dass X und Y keine gemeinsamen Elemente haben.*

$$X \text{ Menge } \Longrightarrow \exists Y \in X \text{ mit } Y \cap X = \emptyset.$$

Potenzmengenaxiom: *Ist X eine Menge, so existiert eine Menge $\mathcal{P}(X)$ deren Elemente genau die Teilmengen von X sind. $\mathcal{P}(X)$ wird die Potenzmenge von X genannt.*

$$X \text{ Menge } \Longrightarrow \exists \mathcal{P}(X) \text{ Menge mit } (Y \in \mathcal{P}(X) \Longleftrightarrow Y \subseteq X).$$

Teilmengenaxiom: *Ist φ eine Eigenschaft und X eine Menge, so existiert eine Menge, deren Elemente genau die Elemente von X sind, die φ erfüllen.*

$$X \text{ Menge } \Longrightarrow \{Y \in X : \varphi(Y) \text{ ist wahr }\} \text{ Menge.}$$

Substitutionsaxiom: *Ist X eine Menge und $F(\dot{,})$ eine Funktion auf X (d.h. $F(Y, Z) = F(Y, W)$ impliziert $Y = W$), so existiert eine Menge, deren Elemente genau die Mengen Z sind für die ein $Y \in X$ existiert mit $F(Y, Z)$.*

$$X \text{ Menge und } F \text{ Funktion } \Longrightarrow \{F(Y) : Y \in X\} \text{ Menge.}$$

Auswahlaxiom (C)

Auswahlaxiom: *Ist X ist eine Menge paarweise disjunkter nicht-leerer Mengen, so existiert eine Menge, die mit jedem Element von X genau ein Element gemeinsam hat.*

$$X \text{ Menge paarweise disjunkter Menge } Y \neq \emptyset \Longrightarrow \exists Z \text{ Menge mit } Y \cap Z = \{X_Y\}.$$