

die Parameter u und v zugleich ein lokales kartesisches Koordinatensystem auf der Ebene.

Flächen 2. Ordnung

Für die implizite Darstellung eines Zylinders gilt in homogenen Koordinaten die allgemeine Vektorgleichung der Quadriken (Flächen 2. Ordnung)

$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ mit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{Gl. 3.26})$$

d.h.

$$\alpha_{11} \cdot x^2 + \alpha_{22} \cdot y^2 + \alpha_{33} \cdot z^2 + 2\alpha_{12} \cdot x \cdot y + 2\alpha_{13} \cdot x \cdot z + 2\alpha_{23} \cdot y \cdot z + 2\alpha_{14} \cdot x + 2\alpha_{24} \cdot y + 2\alpha_{34} \cdot z + \alpha_{44} = 0$$

In der speziellen Lage des obigen Zylinders bedeutet das für die Koeffizienten der Matrix \mathbf{A} , dass nur in der Diagonalen Werte $\neq 0$ stehen, wobei auch $\alpha_{33} = 0$ ist.

Für einen Kreiskegel, dessen Spitze im Nullpunkt liegt und dessen Achse die z -Achse ist, gilt wenn β den halben Öffnungswinkel des Kegels bezeichnet:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tan^2 \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Gl. 3.27})$$

In Bild 3.58 sind Flächen 2. Ordnung und in Tabelle 3.5 die zugehörigen Gleichungen der Nullpunktlage enthalten. Für alle gilt o.g. allgemeine Gleichung. Einige Parameterformen für Flächen 2. Ordnung wurden mit Hilfe der ebenen Parameterkurven erzeugt, die sich durch eine Schnittebene ergeben würden.

Diese Kurven sind stets Kurven 2. Ordnung bzw. Geraden.

Rotationsflächen 4. Ordnung

In Vektorschreibweise gilt für die Rotationsflächen 4. Ordnung (d.h., ein achsparalleler Kegelschnitt rotiert)

$$(\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x})^2 + \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$$

wobei auch hier die beiden Koeffizientenmatrizen symmetrisch sind.

Eine Erstbelegung dieser Matrizen ist relativ einfach, wenn davon ausgegangen wird, dass die Rotationsachse die z -Achse ist und der Kegelschnitt in der xz -Ebene definiert wird. Für die Kurve 2. Ordnung gilt in achsparalleler Lage

$$x^2 + \alpha \cdot z^2 + 2b \cdot x + 2c \cdot z + d = 0$$

und damit gilt für die Rotationsfläche 4. Ordnung in Nullpunktlage

$$(x^2 + y^2 + \alpha \cdot z^2 + 2c \cdot z + d)^2 - 4b^2 (x^2 + y^2) = 0$$

Die Parameterdarstellung einer Rotationsfläche erfolgt rechnerintern in einem lokalen Koordinatensystem und setzt sich im Prinzip aus der Parameterdarstellung der ebenen Kurve und dem Drehwinkel bezüglich der Rotationsachse zusammen (vgl. Abschnitt 3.4.3.4).

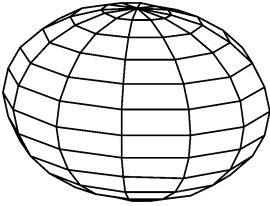
Zu den bekanntesten Vertretern der Rotationsflächen 4. Ordnung gehört der Torus (Bild 3.59).

Für beliebige Raumlagen können die Koeffizientenmatrizen gemäß Abschnitt 3.4.4 transformiert werden.

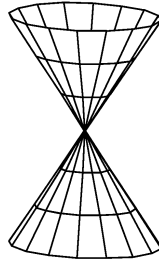
Tabelle 3.5 Gleichungen der Flächen 2. Ordnung

Fläche	$f(x, y, z) = 0$	$x(u, v)$
Ellipsoid	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 =$	$x = a \cdot \sin v \cdot \cos u$ $y = b \cdot \sin v \cdot \sin u$ $z = c \cdot \cos v$ mit $0 \leq u \leq 2\pi$ und $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$
Kegel	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0$	$x = v \cdot \sin \beta \cdot \cos u$ $y = v \cdot \sin \beta \cdot \sin u$ $z = v \cdot \cos \beta$ mit $0 \leq u \leq 2\pi$
elliptischer Zylinder	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	$x = a \cdot \cos u$ $y = b \cdot \sin u$ $z = v$ mit $0 \leq u \leq 2\pi$
hyperbolischer Zylinder	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	$x = a \cdot \cosh u$ $y = b \cdot \sinh u$ $z = v$ mit $0 \leq u \leq 2\pi$
parabolischer Zylinder	$y^2 - 2 \cdot p \cdot x = 0$	$x = \frac{p}{(1 + \cos u)} \cos u - \frac{p}{2}$ $y = \frac{p}{(1 + \cos u)} \sin u$ $z = v$ mit $0 \leq u \leq 2\pi$
einschaliges Hyperboloid	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 =$	$x = a \cdot v \cdot \cos u$ $y = b \cdot v \cdot \sin u$ $z = \pm c \cdot \sqrt{v^2 - 1}$ mit $0 \leq u \leq 2\pi$ und $ v > 1$
zweischaliges Hyperboloid	$b_i(u) = \binom{n}{i} \cdot u^i \cdot (1-u)^{n-i}$ für $i =$	$x = a \cdot v \cdot \cos u$ $y = b \cdot v \cdot \sin u$ $z = \pm c \cdot \sqrt{1 + v^2}$ mit $0 \leq u \leq 2\pi$ und $0 \leq v$
elliptisches Paraboloid	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$	$x = a \cdot v \cdot \cos u$ $y = b \cdot v \cdot \sin u$ $z = v^2$ mit $0 \leq u \leq 2\pi$ und $0 \leq v$
hyperbolisches Paraboloid	$\left(\frac{x}{2p}\right)^2 - \frac{y^2}{2q} - z = 0$	$x = u$ $y = v$ $z = \frac{u^2}{2p} - \frac{v^2}{2q}$

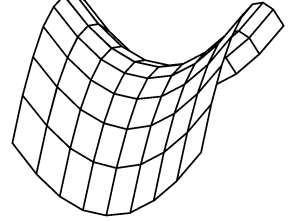
Ellipsoid



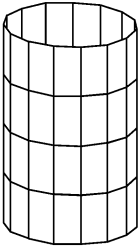
Kegel



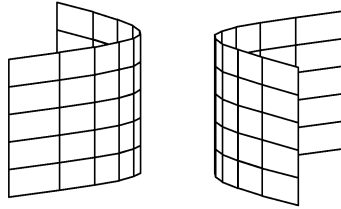
1-schaliges Hyperboloid



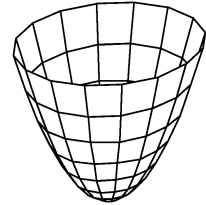
Elliptischer Zylinder



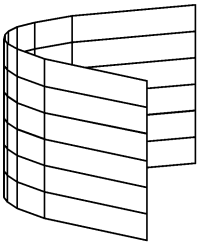
Hyperbolischer Zylinder



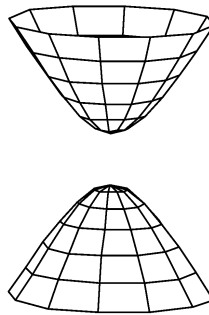
Elliptisches Paraboloid



Parabolischer Zylinder



2-schaliges Hyperboloid



Hyperbolisches Paraboloid

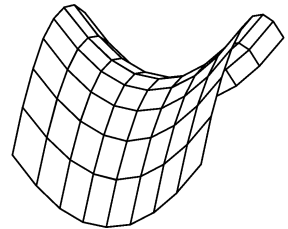


Bild 3.58 Flächen 2. Ordnung

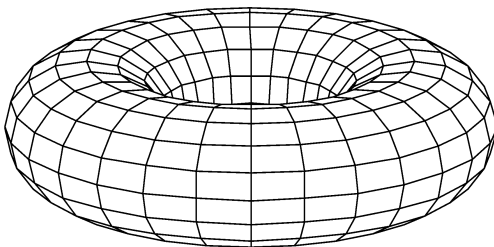


Bild 3.59 Torus

3.4.4.2 Polyeder

Polyeder sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt werden. Alle Kanten sind daher Geraden. Ebenso liefert die Durchdringung zweier Polyeder bzw. der Schnitt mit einer Ebene Geraden als Schnittkurven. Bekannte Vertreter sind Prismen und Pyramiden.

Jedes Polyeder kann aus konvexen Polyedern zusammengesetzt werden. Die Konvexität ist gegeben, wenn alle möglichen Eckpunktverbindungen im bzw. auf dem Körper liegen (Bild 3.60).

Polyeder werden als regulär bezeichnet, wenn alle Teilflächen aus kongruenten regelmäßigen n -Ecken bestehen. Alle regulären

Polyeder sind konvex. Es gibt exakt 5 solcher Körper (Bild 3.61). Für sie gilt die Eulerformel:

$$f + e = k + 2$$

mit:

- f Anzahl der Flächen
- e Anzahl der Ecken
- k Anzahl der Kanten

Für alle regulären Polyeder kann eine innere Kugel definiert werden, die alle Teilflächen tangiert. Ebenso gibt es eine äußere Kugel, auf der alle Eckpunkte des Polyeders liegen.

In Tabelle 3.6 sind die entsprechenden Radien angegeben, wobei a die Seitenlänge des jeweiligen n -Ecks bezeichnet.

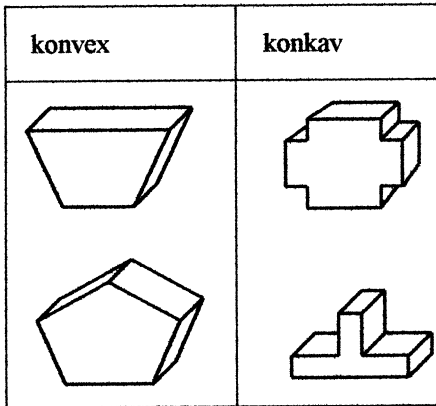


Bild 3.60 Einfache Prismen

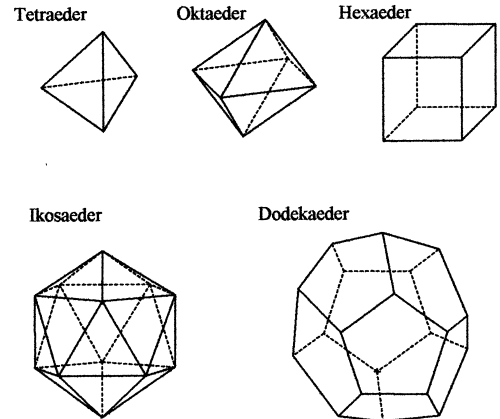


Bild 3.61 Reguläre Polyeder

Tabelle 3.6 Charakteristische Werte für reguläre Polyeder

Polyeder	Fläche	f	e	k	Innenradius	Außenradius
Tetraeder	Dreieck	4	4	6	$(a \cdot \sqrt{6})/12$	$(a \cdot \sqrt{6})/4$
Oktaeder	Dreieck	8	6	12	$(a \cdot \sqrt{6})/6$	$a/\sqrt{2}$
Hexaeder	Quadrat	6	8	12	$a/2$	$a \cdot \sqrt{3}/2$
Ikosaeder	Dreieck	20	12	30	$a \cdot \sqrt{3} \cdot (3 + \sqrt{5})/12$	$a \cdot \sqrt{(2 \cdot (5 + \sqrt{5}))}/4$
Dodekaeder	Fünfeck	12	20	30	$a \cdot \sqrt{(10 \cdot (25 + 11 \cdot \sqrt{5}))}/20$	$a \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{5})/4$

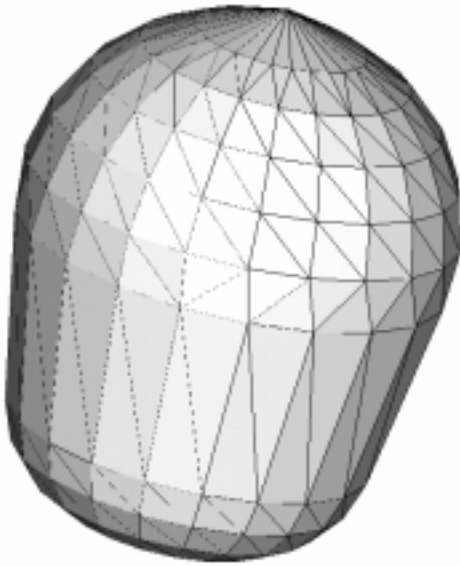


Bild 3.62 Triangulierung eines gekrümmten Bauteils

Berechnungsmethoden und Verfahren der grafischen Datenverarbeitung erfordern häufig, eine geordnete «Zerstückelung» der Körper bzw. Oberflächen, sodass auch gekrümmte Teile näherungsweise durch ebene Flächenstücke beschrieben werden. Bild 3.62 zeigt eine Triangulierung, wie sie z.B. für Rapid-Prototyping-Verfahren notwendig sein kann. Dreieckselemente werden häufig auch genutzt, um besondere Darstellungsoptionen für die Bildschirmausgabe zu realisieren.

3.4.4.3 Regelflächen

Für Regelflächen werden zur analytischen Beschreibung der sie erzeugenden Geradenscharn (Bild 3.63) Gleichungen der Form

$$x(u, v) = f_1(u) + v \cdot \alpha_1(u)$$

$$y(u, v) = f_2(u) + v \cdot \alpha_2(u)$$

$$z(u, v) = f_3(u) + v \cdot \alpha_3(u)$$

genutzt.

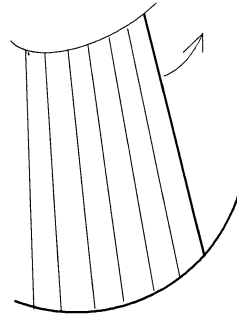


Bild 3.63 Geradenschar

Die Funktionen $f_i(u)$ ($i = 1, 2, 3$) geben die Parameterdarstellung der Leitkurve an, auf der die Gerade zur Erzeugung der Regelfläche «bewegt» werden muss.

Die Funktionen $\alpha_i(u)$ ($i = 1, 2, 3$) definieren für jeden Wert des Parameters u (d.h. für jeden Punkt auf der Leitkurve) den Richtungsvektor der entsprechenden Geraden. Die letztgenannten Funktionen bestimmen somit, welcher Art die Regelfläche ist.

Für **Zylinderflächen** (alle erzeugenden Geraden liegen parallel zueinander) ist dieser Richtungsvektor eine Konstante, also vom Parameter u unabhängig.

Für **Kegelflächen** (alle erzeugenden Geraden haben einen gemeinsamen Schnittpunkt) gilt:

$$\alpha_1(u) = f_1(u) - x_0$$

$$\alpha_2(u) = f_2(u) - y_0$$

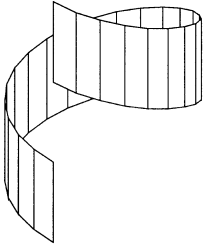
$$\alpha_3(u) = f_3(u) - z_0$$

mit dem Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ als Kegelspitze.

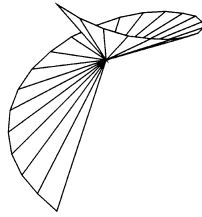
Für **Tangentenflächen** ergibt sich der Richtungsvektor der Punkt-Richtungsgleichungen jeder erzeugenden Geraden aus den 1. Ableitungen der Parameterdarstellung der Leitkurve.

Für die Regelflächen in Bild 3.64 wurde eine zylindrische Schraubenlinie als Leitkurve verwendet ($r = h = 100 \text{ mm}$, $\varphi = u \cdot \varepsilon$ ($0, 360^\circ$)). Die Länge des zur z -Achse parallelen Richtungsvektors der Zylinderfläche wurde mit 50

Zylinderfläche



Kegelfläche



Tangentenfläche

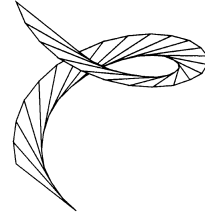


Bild 3.64 Torsen

mm festgelegt. Die Spitze der Kegelfläche wurde auf der z -Achse mit $z = 50$ mm fixiert. Für die Tangentenfläche wurden alle Tangenten mit einer Länge von 50 mm festgelegt.

Andere spezielle Definitionen der Richtungsvektoren sind möglich. In Bild 3.65 ist eine Regelschraubfläche dargestellt, die nahezu mit der gleichen Parameterdarstellung wie die Tangentenfläche in Bild 3.64 erzeugt wurde. Lediglich die z -Komponente des Richtungsvektors wurde $= 0$ gesetzt, sodass alle erzeugenden Geraden parallel zur xy -Ebene liegen.

Oft besteht die Aufgabe, zwischen 2 Querschnitten eine Regelfläche zu erzeugen. Für diese linearen Verbundflächen gilt in Vektorschreibweise

$$\mathbf{x}(u, v) = (1 - v) \cdot \mathbf{f}(u) + v \cdot \mathbf{g}(w(u)).$$

In Bild 3.66 wurden mit 2 parallelen Kreisen Verbundkörper erzeugt. Die unterschiedliche Flächengestaltung wurde durch unterschiedliche Startpunkte erreicht. Dies kann durch $w(u) = u + u_0$ erreicht werden.

Für den Fall, dass der Konstrukteur zwischen 2 Kurven eine exakt abwickelbare Fläche erzeugen will, sind differentialgeometrische Gesichtspunkte der **Abwickelbarkeit** zu beachten [31]:

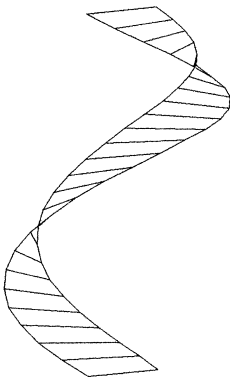


Bild 3.65 Wendelfläche

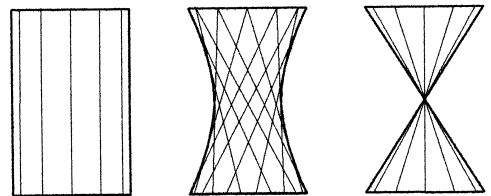


Bild 3.66 Lineare Verbundflächen zwischen parallelen Kreisen