ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 36 2000 Вып. 1

УДК 621.391.1

© 2000 г. **П. Гобер, А. Хан Винк**

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ Л. ВИЛЬХЕЛЬМССОНА И К. Ш. ЗИГАНГИРОВА "ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ОДНОГО МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОГО КАНАЛА"

Замечание относится к статье [1], в которой изучалась пропускная способность q-ичного канала множественного доступа с T пользователями для случаев координированной и некоординированной передачи. Мы приводим границы для пропускной способности при $T \to \infty$ и обсуждаем численные результаты при различных значениях T.

§ 1. Введение

Авторы статьи [1] изучали пропускную способность q-ичного дискретного бесшумного канала множественного доступа без памяти с T пользователями как для согласованного, так и для несогласованного случаев. В каждый момент времени в такой канал поступает q-ичный символ от каждого из T пользователей. Входом канала является вектор

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_T), \quad X_i \in \{0, 1, \dots, q-1\}, \tag{1}$$

а выходом — множество символов, появившихся на входе,

$$\boldsymbol{Y} = \{y \mid \exists j: \ X_j = y, \ j = 1, \dots, T\}. \tag{2}$$

Пропускную способность можно вычислить как максимум взаимной информации по всевозможным входным распределениям $p(\boldsymbol{x})$. Для координированной передачи общая пропускная способность равна [1]

$$C_{\text{coord}} = \max_{p(\boldsymbol{x})} H(\boldsymbol{Y}), \tag{3}$$

а для некоординированной остальные пользователи рассматриваются как помехи, и общая пропускная способность определяется, как для суммы эквивалентных каналов с одним пользователем, т.е.

$$C_{\text{uncoord}} = T \left[\max_{p(\boldsymbol{x})} (H(\boldsymbol{Y}) - H(\boldsymbol{Y}|X_t)) \right]. \tag{4}$$

В [1] авторы повсюду считают входное распределение равномерным, что частично обосновывается численными результатами из [2]. Мы хотели бы подчеркнуть, что подсчет взаимной информации для какого бы то ни было конкретного входного распределения, безусловно, дает лишь нижнюю границу для пропускной способности.

В § 2 настоящей работы мы приводим нижнюю границу для пропускной способности в случае $T \to \infty$, использующую неравномерное входное распределение. Эта граница намного точнее, чем граница, получаемая в предположении о равномерности распределения. Для координированной передачи мы показываем, что эта нижняя граница совпадает с истинной пропускной способностью. В § 3 обсуждаются численные результаты, которые дают представление о поведении пропускной способности и о входных распределениях, при которых пропускная способность достигается, при различных значениях T.

§ 2. Пропускная способность при $T \to \infty$

В этом параграфе мы вычисляем взаимную информацию для некоторого входного распределения при $T \to \infty$ и фиксированном q, оценивая тем самым пропускную способность снизу. Для координированной передачи мы показываем, что вычисленная пропускная способность является точной.

Мы предполагаем, что все пользователи используют одно и то же входное распределение[1]. Мы рассматриваем распределение, предложенное в [3], при котором в среднем $(q-1)\ln 2$ пользователей используют символы $0, 1, \ldots, q-2$, а остальные используют символ $q-1$:

$$P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \cdots = P(X_i = q-2) = \frac{\ln 2}{T}, \tag{5}$$

$$P(X_i = q-1) = 1 - (q-1)\frac{\ln 2}{T}. \tag{6}$$

Координированная передача. Из принципа включения-исключения получаем, что вероятность появления на выходе канала некоторого конкретного множества из ℓ символов $W = \{y_1, \ldots, y_\ell\}$ равна

$$P(\mathbf{Y} = W) = \sum_{V \subseteq W} (-1)^{|V|} \left[\sum_{j \in W \setminus V} P(X_i = j) \right]^T . \tag{7}$$

Для вычисления $P(\mathbf{Y} = W)$ при указанном входном распределении рассмотрим два случая.

Случай $q - 1 \notin W$:

$$P(\mathbf{Y} = W) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k \left[(\ell - k)\frac{\ln 2}{T} \right]^T , \tag{8}$$

$$\lim_{T \to \infty} P(\mathbf{Y} = W) = 0. \tag{9}$$

Эти выходные множества асимптотически не дают вклада во взаимную информацию.

Случай $q - 1 \in W$:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Y} = W) = & \sum_{V \subseteq W, q-1 \notin V} (-1)^{|V|} \left[\sum_{j \in W \setminus V} P(X_i = j) \right]^T + \\ & + \sum_{V \subseteq W, q-1 \in V} (-1)^{|V|} \left[\sum_{j \in W \setminus V} P(X_i = j) \right]^T = \\ & = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{\ell-1}{k} (-1)^k \left[1 - (q-1)\frac{\ln 2}{T} + (\ell - k - 1)\frac{\ln 2}{T} \right]^T + \end{aligned} \tag{10}$$

[1] В противном случае, для координированной передачи было бы возможно то или иное разделение сигналов по времени и частоте — в зависимости от степени координированности.

$$+\sum_{k=1}^{\ell}\binom{\ell-1}{k-1}(-1)^k\left[(\ell-k)\frac{\ln 2}{T}\right]^T,$$

$$\lim_{T\to\infty} P(\mathbf{Y}=W)=\sum_{k=0}^{\ell-1}\binom{\ell-1}{k}(-1)^k 2^{-q+\ell-k}+0=2^{-(q-1)}. \tag{11}$$

Объединяя оба случая, получаем для энтропии выхода

$$\begin{gathered}\lim_{T\to\infty} H(\mathbf{Y})=\sum_{W}-P(\mathbf{Y}=W)\log_2 P(\mathbf{Y}=W)= \\ =-2^{q-1}\cdot 2^{-(q-1)}\log_2 2^{-(q-1)}=q-1.\end{gathered} \tag{12}$$

Таким образом, $C_{\mathrm{coord},\,q,\,T\to\infty}\geq q-1$.

Следующая верхняя граница принадлежит Бассалыго [4]. Пусть каждый пользователь использует входное распределение, независимое от входных распределений остальных пользователей. Тогда найдется символ q' такой, что по крайней мере для T/q пользователей $P(X_i)\geq\dfrac{1}{q}$. Вероятность того, что эта частота не появится на выходе, равна

$$P(q'\notin\mathbf{Y})\leq\left(1-\frac{1}{q}\right)^{T/q}. \tag{13}$$

Поскольку $\lim\limits_{T\to\infty}P(q'\notin\mathbf{Y})=0$, при $T\to\infty$ этот символ q' всегда будет в выходном множестве. Поэтому число различных выходных множеств $\mathbf{Y}$ не превосходит 2^{M-1}, что дает верхнюю границу на пропускную способность $C_{\mathrm{coord},\,q,\,T\to\infty}\leq q-1$.

Объединяя обе границы, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *При фиксированном q и $T\to\infty$ общая пропускная способность q-ичного канала с T пользователями для координированной передачи*

$$C_{\mathrm{coord},\,q,\,T\to\infty}=q-1. \tag{14}$$

Замечание. В предположении равномерного входного распределения взаимная информация стремится к нулю при $T\to\infty$.

Некоординированная передача. В [3] доказана следующая

Теорема 2. *При фиксированном q и $T\to\infty$ общая пропускная способность q-ичного канала с T пользователями для некоординированной передачи ограничена снизу*

$$C_{\mathrm{uncoord},\,q,\,T\to\infty}\geq(q-1)\ln 2. \tag{15}$$

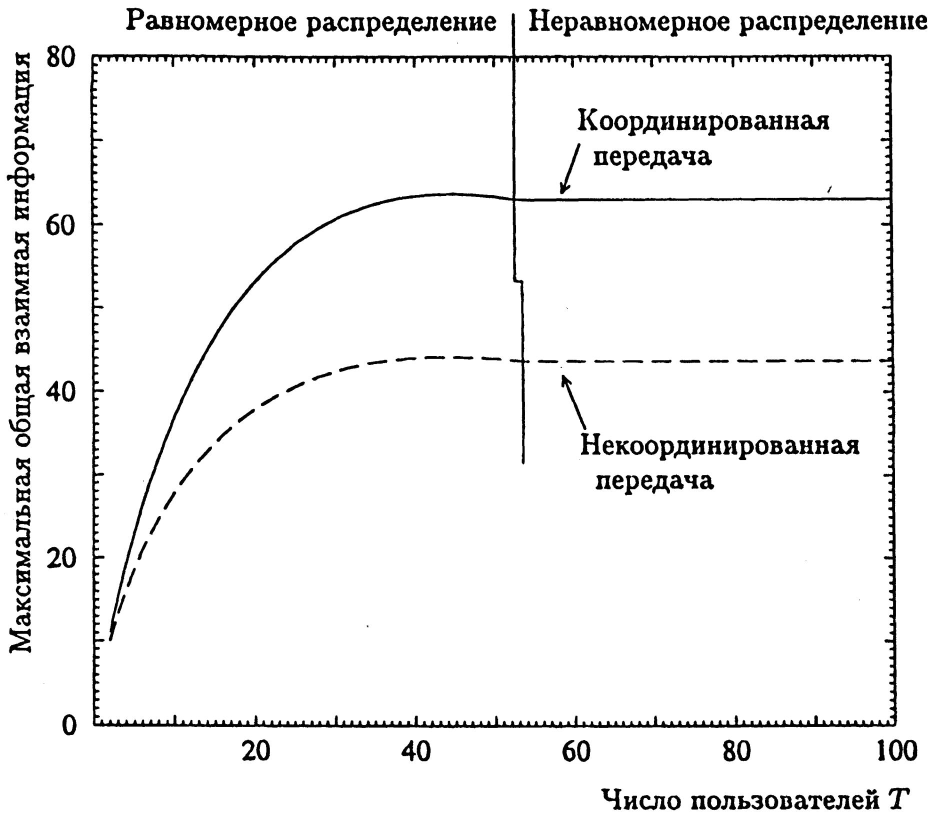
Мы высказываем предположение, что $C_{\mathrm{uncoord},\,q,\,T\to\infty}=(q-1)\ln 2$.

§ 3. Численные результаты

В этом параграфе мы обсуждаем результаты, полученные компьютерными вычислениями.

На рисунке приведены значения взаимной информации как функции от числа пользователей T, полученные максимизацией по входным распределениям. Мы вновь предполагаем, что все пользователи используют одно и то же входное распределение. Число частот фиксировано, $q=64$.

При малых T максимум достигается на равномерном распределении. Начиная с некоторых $T_{\mathrm{limit,\,coord}}$ и $T_{\mathrm{limit,\,uncoord}}$, соответственно, максимумы достигаются на неравномерных распределениях. Как и в § 2, используются распределения, в которых один символ имеет высокую вероятность, а остальные символы равновероятны.



В случае $q = 64$ получаем $T_{\text{limit, coord}} = 53$ и $T_{\text{limit, uncoord}} = 54$, что опровергает гипотезу из [5] о том, что в координированном случае пропускная способность достигается на равномерном распределении при $T < q$.

Для бо́льших T максимумы взаимной информации, видимо, сходятся сверху к пределам, указанным в § 2.

§ 4. Заключение

В настоящей статье рассмотрены q-ичные каналы множественного доступа с T пользователями для случаев координированной и некоординированной передачи. Приведены асимптотические нижние границы пропускной способности при $T \to \infty$ и фиксированном q, использующие неравномерное распределение на входе канала, и обсуждены результаты численной максимизации взаимной информации по входным распределениям для различных значений T.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вилхельмссон Л., Зигангиров К. Ш.* Об асимптотической пропускной способности одного многопользовательского канала // Пробл. передачи информ. 1997. Т. 33. № 1. С. 12–20.
2. *Chang S.-C., Wolf J.* On the T-User M-Frequency Noiseless Multiple-Access Channel with and without Intensity Information // IEEE Trans. Inform. Theory. 1981. V. 27. № 1. P. 41–48.

3. *Han Vinck A. J., Keuning J.* On the Capacity of the Asynchronous T-User M-Frequency Noiseless Multiple-Access Channel without Intensity Information // IEEE Trans. Inform. Theory. 1996. V. 42. № 6. P. 2235–2238.
4. *Бассалыго Л. А.* Частное сообщение. Март, 1999.
5. *Grant A. J., Schlegel C.* Collision-Type Multiple-User Communication // IEEE Trans. Inform. Theory. 1997. V. 43. № 5. P. 1725–1736.

Поступила в редакцию
13.01.99
После переработки
02.03.99