Aristarch von Samos

Auszug aus „Von den Größen und Entfernungen der Sonne und des Mondes“ (ca. 260 v.C.)

Quelle: Heath, Thomas L.: Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus: a history of Greek astronomy to Aristarchus together with Aristarchus's treatise On the sizes and distances of the sun and moon; a new Greek text with translation and notes. - Repr. lithographically from sheets of the 1. ed. . - Oxford: Clarendon Press, 1966. - P.352-381

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

[Hypothesen]

1. *Daß der Mond sein Licht von der Sonne erhält.*
2. *Daß die Erde im Verhältnis eines Mittelpunktes zu der Kugel steht, in der sich der Mond bewegt.*
3. *Daß, wenn uns der Mond halbiert erscheint, der Großkreis, der die dunkle und die helle Seite des Mondes unterteilt, in Richtung unseres Auges liegt.*
4. *Daß, wenn uns der Mond halbiert erscheint, der Abstand von der Sonne dann um ein Dreißigstel eines Quadranten kleiner ist als ein Quadrant*[1].
5. *Daß die Schattenbreite (der Erde) (die) von zwei Monden ist.*
6. *Daß der Mond sich über ein Fünfzehntel eines Tierkreiszeichens erstreckt* [2].

Wir sind nun in der Lage, die folgenden Aussagen (Behauptungen) zu beweisen:

1. *Die Entfernung der Sonne von der Erde ist größer als achtzehn mal, aber geringer als zwanzig mal die Entfernung des Mondes (von der Erde);* dies ergibt sich aus der Hypothese über den Halbmond.
2. *Der Durchmesser der Sonne hat dasselbe Verhältnis (wie bereits gesagt) zum Durchmesser des Mondes* [3].

---

[1] Ein Dreißigstel von 90°, d.h. 3°

[2] Ein Fünfzehntel von 30°, d.h. 2°. Bemerkung: Archimedes schreibt in seiner *Sandzahl*, daß Aristarch später entdeckte, daß die Sonne unter einem Siebenhundertzwanzigstel des Tierkreiszeichens erscheint, d.h. 0,5°. Archimedes seinerseits gibt eine Methode der Bestimmung des Sonnendurchmessers an, welche die Bestimmung dieses kleiner als 1/164 aber größer als 1/ 200 des Rechten Winkels zuläßt.

[3] Ein Grund, warum das 2. Resultat nicht aus der Hypothese über den Halbmond folgt, basiert auf der Annahme, daß Sonne und Mond den selben sichtbaren Winkeldurchmesser haben.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

3. *Der Durchmesser der Sonne hat zum Durchmesser der Erde ein größeres Verhältnis als 19 zu 3, aber ein kleineres als 43 zu 6;* dies ergibt sich aus dem so entdeckten Verhältnis zwischen der Entfernung, der Hypothese über den Schatten und der Hypothese, daß der Mond sich über ein Fünfzehntel eines Sternkreiszeichens erstreckt.

Aussage 1

Zwei gleiche Kugeln werden von ein und demselben Zylinder umschlossen, zwei ungleiche Kugeln von ein und demselben Kegel, der seine Spitze in Richtung der kleineren Kugel hat; und die Gerade durch die Mittelpunkte der Kugeln läuft rechtwinklig zu jedem der Kreise, in dem die Oberfläche des Zylinders oder des Kegels die Kugeln berührt.

siehe Figur 16

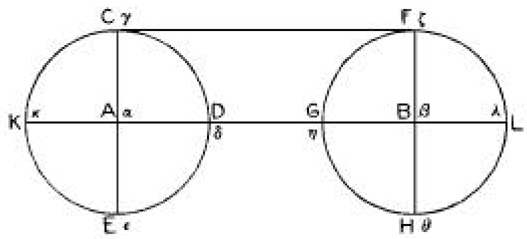

Fig. 16.

Gegeben seien gleiche Kugeln und die Punkte *A, B,* ihre Mittelpunkte.

A B seien verbunden und erzeugt;

eine Ebene werde durch *A, B* gelegt;

diese Ebene schneidet die Kugel in Großkreisen.

Diese Großkreise seien *CDE, FGH.*

CAE, FBH seien von *A, B* rechtwinklig zu *AB* gezogen und *CF seien* verbunden.

Nun, da *CA, FB* gleich und parallel sind, sind folglich auch *CF, AB* gleich und parallel.

Folglich ist *CFAB* ein Parallelogramm

und sind die Winkel in *C, F* rechtwinklig;

so daß *CF* die Kreise *CDE, FGH* berührt.

Wenn nun bei gleichbleibendem *AB* das Parallelogramm *AF* und die Halbkreise *KCD, GFL* rotieren und wieder in die Ausgangslage gebracht werden, werden sich die Halbkreise *KCD, GFL* gleichlaufend mit den Kugeln bewegen[4], und das Parallelogramm *AF* wird einen Zylinder erzeugen, dessen Basis die Kreise um *CE, FH* als Durchmesser und im rechten Winkel zu *AB* sein werden, weil *CE, HF* während der ganzen Bewegung rechtwinklig zu *AB* bleiben.

Und es ist offensichtlich, daß der Zylindermantel die Kugeln berührt, da *CF* während der ganzen Bewegung die Halbkreise *KCD, GFL* berührt.

4

Seien die Kugeln ungleich, und *A, B* ihre Mittelpunkte; die Kugel mit dem Mittelpunkt *A* sei größer.
Ich sage, daß die Kugeln von ein und demselben Kegel umschlossen werden, dessen Spitze in Richtung der kleineren Kugel liegt.
siehe Figur 17

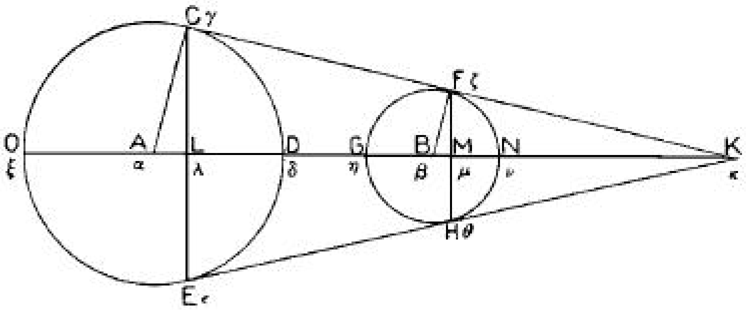

Fig. 17.

Man verbinde *A* und *B*, lege eine Ebene durch *AB*; diese Ebene schneidet die Kugeln in Kreise.
Diese Kreise seien *CDE, FGH;*
folglich ist der Kreis *CDE* größer als der Kreis *GFH;* so daß der Radius des Kreises *CDE* ebenfalls größer als der Radius des Kreises *FGH* ist. Nun ist es möglich, einen Punkt wie *K* (auf der verlängerten *AB*) so anzunehmen, daß sich der Radius des Kreises *CDE* zum Radius des Kreises *FGH* so verhält, wie *AK* zu *KB.*
Man setze den Punkt *K* so, und zeichne *KF*, daß es den Kreis *FGH* berührt;
man verbinde *FB*, und zeichne *AC* durch *A* parallel zu *BF;*
man verbinde *CF:*
Dann, weil sich *AK* zu *KB,* wie *AD* zu *BN* verhält,
während *AD* gleich *AC*, und *BN* gleich *BF* ist,
verhält sich folglich *AK* zu *KB* wie *AC* zu BF.
Und *AC* ist parallel zu *BF;*
und folglich ist *CFK* eine Gerade.
Nun ist der Winkel *KFB* ein rechter;
folglich ist auch der Winkel *KCA* ein rechter;
folglich berührt *KC* den Kreis *CDE.*
Man zeichne nun *CL, FM* senkrecht zu *AB.*
Wenn nun, bei gleichbleibendem *KO*, die Halbkreise *OCD*, *GFN* und die Dreiecke *KCL, KFM* rotieren und wieder in die Ausgangslage gebracht werden, bewegen sich die Halbkreise *OCD, GFN* im Gleichklang mit den Kugeln; und die Dreiecke *KCL* und *KFM* erzeugen Kegel, deren Basen die Kreise um *CE, FH* als Durchmesser und rechtwinklig zur Achse *KL* sind, wobei die Mittelpunkte der Kreise *L, M* sind.

Und der Kegel berührt die Kugeln entlang ihrer Oberfläche, da *KFC* auch die Halbkreise *OCD, GFN* während der ganzen Bewegung berührt.

AUSSAGE 2

Wenn eine Kugel von einer anderen beleuchtet wird, die größer ist als sie selbst, wird der beleuchtete Teil der ersteren Kugel größer als eine Halbkugel sein.

siehe Figur 18

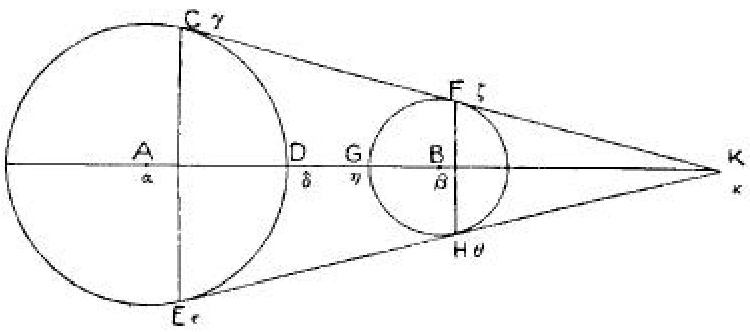

Fig. 18.

Man lasse nämlich eine Kugel mit dem Mittelpunkt *B* durch eine größere Kugel beleuchten, deren Mittelpunkt *A* ist.
Ich behaupte, daß der erleuchtete Teil der Kugel mit dem Mittelpunkt *B* größer als eine Halbkugel ist.
Denn wenn zwei ungleiche Kugeln in ein und demselben Kegel enthalten sind, dessen Spitze in Richtung der kleineren Kugel liegt [Aussage 1, vgl Abbildung 2],
zeichne man den Kegel, der die Kugeln umfaßt und lege eine Ebene durch die Achsen;
diese Ebene schneidet die Kugeln in Kreise und den Kegel in ein Dreieck.
Man lasse diese Ebene die Kugeln in die Kreise *CDE, FGH* und den Kegel in das Dreieck *CEK* zerschneiden.
Dann ist es offensichtlich, daß der Teil der Kugel in Richtung auf den Umfang von *FGH,* dessen Basis der Kreis um *FH* als Durchmesser ist, der von dem Abschnitt in Richtung auf den Umfang *CDE* beleuchtete Teil ist, dessen Basis der Kreis um *CE* als Durchmesser und rechtwinklig zur Geraden *AB* ist;
denn der Umfang *FHG* wird durch den Umfang *CDE* beleuchtet, da *CF, EH* die äußersten Strahlen sind.
Und der Mittelpunkt *B* der Kugel liegt innerhalb des Abschnitts *FGH*;
so daß der beleuchtete Teil der Kugel größer ist als eine Halbkugel.

AUSSAGE 3

Der Kreis im Monde, der die dunkle von der hellen Seite trennt, ist am kleinsten, wenn der Kegel, der sowohl die Sonne als auch den Mond umfaßt, seine Spitze in unserem Auge hat.

siehe Figur 19

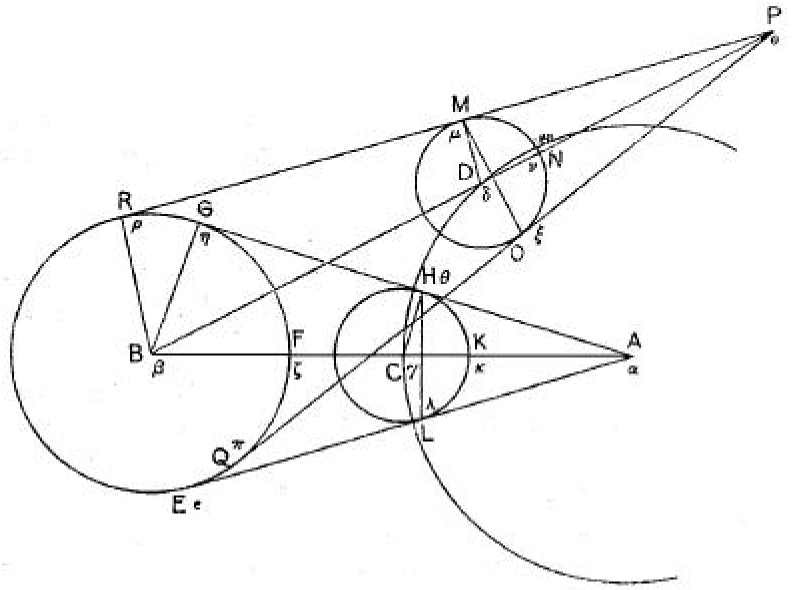

Fig. 19.

Denn unser Auge sei in *A*, und *B* sei der Mittelpunkt der Sonne;

C sei der Mittelpunkt des Mondes, wenn der Kegel, der sowohl die Sonne als auch den Mond umfaßt, seine Spitze in unserem Auge hat, und wenn dies nicht der Fall ist, sei *D* der Mittelpunkt.

Es ist dann offensichtlich, daß *A, C, B* auf einer Geraden liegen.

Man lege eine Ebene durch *AB* und den Punkt *D;* diese Ebene schneidet die Kugel in Kreise und die Kegel in Geraden.

Diese Ebene soll außerdem auch die Kugel, auf der sich der Mittelpunkt des Mondes in dem Kreis *CD* bewegt, schneiden;

daher ist *A* der Mittelpunkt dieses Kreises, denn das ist unsere Hypothese [Hypothese 2].

Die Ebene schneidet die Sonne in einen Kreis *EFR*, und den Mond, wenn der sowohl die Sonne als auch den Mond umfassende Kegel seine Spitze in unserem Auge hat, in dem Kreise *KHL,* wenn dies nicht der Fall ist, im Kreis *MNO;*

und sie schneidet die Kegel in die Geraden *EA, AG, QP, PR*, wobei die Achsen *AB, BP* sind.

Dann, wenn sich der Radius des Kreises *EFG* zum Radius des Kreises *HKL* wie der Radius des Kreises *EFG* zum Radius des Kreises *MNO* verhält, während sich BA zu AC so wie der Radius des Kreises *EFG* zum Radius des Kreises *HLK* verhält.

und *BP* zu *PD* wie der Radius des Kreises *EFG* zum Radius des Kreises *MNO*

folglich verhält sich BP zu *PD* wie BA zu AC;

und, *separando*, verhält sich *BD* zu *DP* wie *BC* zu *CA;*

daher auch andererseits, *CA* zu *DP wie BC* zu *BD.*

Und *BC* ist kleiner als *BD,* denn *A* ist der Mittelpunkt des Kreises *CD;*

daher ist auch *AC* kleiner als *DP.*

Und der Kreis *HKL* ist gleich dem Kreis *MNO;*

daher ist *HL* ebenfalls kleiner als *MO* [nach dem Lemma [5]].

Entsprechend ist der Kreis um *HL* als Durchmesser und im rechten Winkel zu *AB* ebenfalls kleiner als der Kreis um *MO* als Durchmesser und im rechten Winkel *zu BP.*

Doch der Kreis um *HL* als Durchmesser und rechtwinklig zu *AB* ist der Kreis, der die dunkle und die helle Seite des Mondes trennt, wenn der sowohl die Sonne als auch den Mond umfassende Kegel seine Spitze in unserem Auge hat;

und der Kreis um *MO* als Durchmesser und rechtwinklig zu *BP* ist der Kreis, der die dunkle und die helle Seite des Mondes trennt, wenn der sowohl die Sonne als auch den Mond umfassende Kegel seine Spitze nicht in unserem Auge hat.

Entsprechend ist der Kreis, der die dunkle und die helle Seite des Mondes trennt, kleiner, wenn der sowohl die Sonne als auch den Mond enthaltende Kegel seine Spitze in unserem Auge hat.

---

5 Lemma (nicht aufgeführt, aus Euklids *Optics* 24): siehe Figur 20.

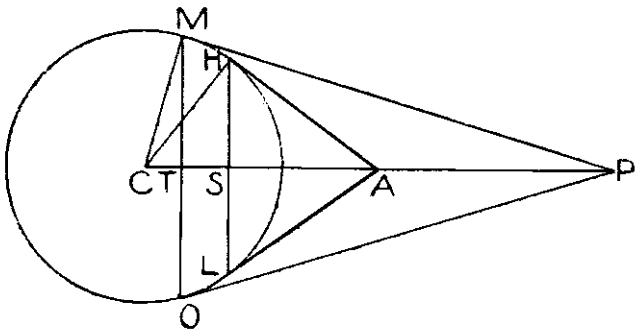

Fig. 20.

z.z.: Sind A, P Punkte auf dem verlängerten Radius, wobei P weiter vom Zentrum C entfernt ist als A;
AH, AL ein Paar von Tangenten ausgehend von A
PM, PO ein Paar von Tangenten ausgehend von P
daraus folgt: $MO > HL$

Nach Euklid (Kathetensatz) gilt:	$CM^2 = CT \cdot CP$	und	$CH^2 = CS \cdot CA$
Daraus folgt	$CT \cdot CP = CS \cdot CA$	oder	$CA : CP = CT : CS$
Aber	$CA < CP$,	somit	$CT < CS$
Also	$HL < MO$ (als Sehnen)		

AUSSAGE 4

Der Kreis, der die dunkle und die helle Seite des Mondes trennt, unterscheidet sich nicht wahrnehmbar von einem Großkreis des Mondes.

siehe Figur 21

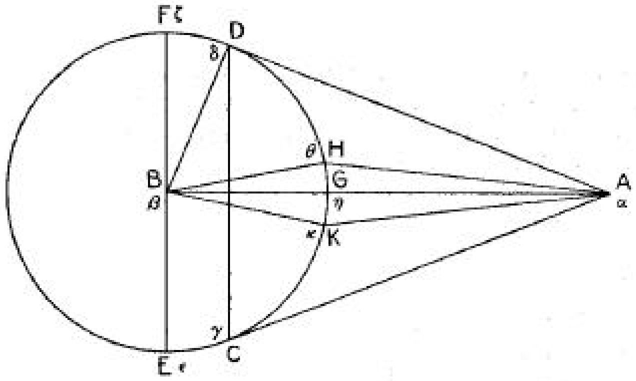

Fig. 21.

Unser Auge sei in *A*, und *B* sei der Mittelpunkt des Mondes.
Man verbinde *AB* und lege eine Ebene durch *AB*; diese Ebene zerschneidet die Kugel in einem Großkreis. Man schneide die Kugel in dem Kreis *ECDF* und den Kegel an den Geraden *AC*, *AD*, *DC*.
Dann ist der Kreis um *CD* als Durchmesser und rechtwinklig zu *AB* der Kreis, der die dunkle und die helle Seite des Mondes trennt.
Ich behaupte, daß sich dieser Kreis nicht wahrnehmbar von einem Großkreis unterscheidet.
Hierzu lege man *EF* durch *B* parallel zu *CD*; mache *GK*, *GH* beide gleich zur Hälfte von *DF;*
und verbinde *KB*, *BH*, *KA*, *AH*, *BD.*
Und dann, da der Hypothese zufolge der Mond ein Fünfzehntel eines Tierkreiszeichens überdeckt,
steht der Winkel *CAD* auf dem fünfzehnten Teil eines solchen Zeichens.
Doch ein Fünfzehntel eines Zeichens ist ein Hundertachtzigstel des gesamten Tierkreises,
so daß der Winkel *CAD* auf einem Hundertachtzigstel des gesamten (Tier-)Kreises steht;
daher ist der Winkel *CAD* ein Hundertachtzigstel von vier rechten Winkeln.
Hieraus folgt, daß der Winkel *CAD* ein Fünfundvierzigstel eines rechten Winkels ist.
Und der Winkel *BAD* ist die Hälfte des Winkels *CAD*;
daher ist der Winkel *BAD* ein ein Fünfundvierzigstel eines halben rechten Winkels.
Nun, da der Winkel *ADB* ein rechter ist,

hat der Winkel *BAD* zu einem halben rechten Winkel ein Verhältnis, daß größer ist, als das von *BD* zu *DA*.[6]

Entsprechend ist *BD* geringer als ein Fünfundvierzigstel von *DA*.

Daher ist *BG* sehr viel geringer [7] als ein ein Fünfundvierzigstel von *BA* und, *separando, BG* ist weniger als ein Vierundvierzigstel von *GA*.

Entsprechend ist *BH* ebenfalls viel kleiner als ein Vierundvierzigstel von *AH*.

---

6 Dies ist ein spezieller Fall einer allgemeinen Behauptung (Archimedes) mit der Aussage:

Ist $\beta < \alpha < 90°$ dann gilt $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} > \frac{\alpha}{\beta}$

Ein geometrischer Beweis: siehe Figur 22

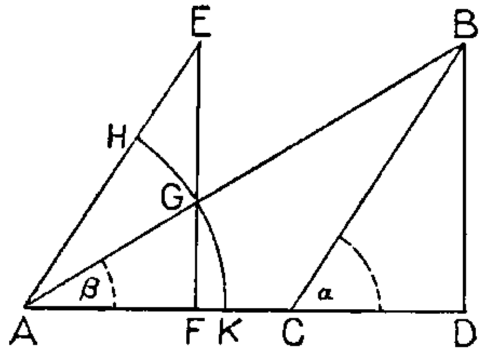

Fig. 22.

BC und BA schließen mit ACD die Winkel α und β ein; BD steht senkrecht auf AD

Dann gilt: $\tan\alpha = \frac{BD}{CD}$ und $\tan\beta = \frac{BD}{AD}$

z.z.: $\frac{AD}{CD} > \frac{\alpha}{\beta}$

Schneide AF = CD heraus und zeichne FE senkrecht zu AD und gleich BD; verbinde AE

Dann gilt: $\angle$ EAF = $\angle$ BCD = α; G ist Schnittpunkt von EF und AB

Da AE > AG > AF , wird der Kreis mit A als Mittelpunkt und AG als Radius AE in H und AF (verlängert) in K schneiden.

$$Dann \quad \frac{\angle EAG}{\angle GAF} = \frac{Sektor HAG}{Sektor GAK} < \frac{\Delta EAG}{\Delta GAF} < \frac{EG}{GF}$$

$$Ergänzend \quad \frac{\angle EAF}{\angle GAF} < \frac{EF}{GF}$$

$$Aber \quad \frac{EF}{GF} = \frac{BD}{GF} = \frac{AD}{AF} = \frac{AD}{CD}$$

$$Also \quad \frac{a}{b} < \frac{AD}{GF} \quad bzw. \quad \frac{AD}{CD} > \frac{a}{b}$$

$$Spezialfall: \quad a = \frac{1}{2}R, \quad also\, CD = BD, \quad somit \frac{\angle BAD}{\frac{1}{2}R} > \frac{BD}{DA}$$

7 gemeint ist damit: ist a <u>etwas</u> größer als b und ist c größer als a, dann muß c <u>viel</u> größer als b sein.

Und *BH* hat zu *HA* ein Verhältnis, das größer ist als das, das der Winkel *BAH* zum Winkel *ABH* hat.[8]

Daher ist der Winkel *BAH* weniger als ein Vierundvierzigstel des Winkels *ABH*.

Und der Winkel *KAH* ist das Doppelte des Winkels *BAH*,

während der Winkel *KBH* das Doppelte des Winkels *ABH* ist;

daher ist der Winkel *KAH* ebenfalls geringer als ein Vierundvierzigstel des Winkels *KBH*.

Aber der Winkel *KBH* ist gleich dem Winkel *DBF*, das heißt, gleich dem Winkel *CDB*, das heißt, gleich dem Winkel *BAD*.

Daher ist der Winkel *KAH* weniger als ein Vierundvierzigstel des Winkels *BAD*.

---

8 Dies ist unmittelbar ableitbar von einer Behauptung von Ptolomäus (Syntaxis, I.10): Siehe Figur 23

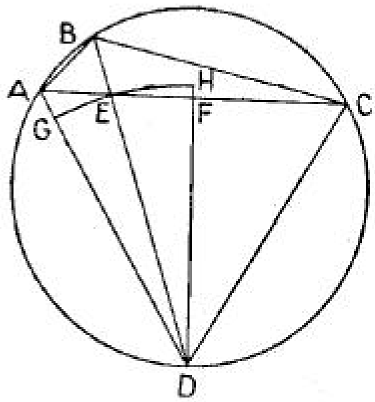

Fig. 23.

Wenn zwei ungleiche Sehnen in einem Kreis gezogen sind, hat die größere zur kleineren ein Verhältnis, welches kleiner ist als der Umfang des größeren Sektors zum Kleineren.

Seien CB und BA die ungleichen Sehen, mit CB > BA z.z.: CB : BA < arc CB . arc BA

Dazu: Halbiere den Winkel ABC durch BD (D auf dem Kreis); verbinde AEC, AD und CD.

Dann CD = AD (nach Euklid) und CE > EA (nach Euklid), weil der Winkel *ABC* durch *BD* halbiert wird.

Zeichne DF senkrecht zu AEC; da DA > DE > DF, schneidet der Kreis mit D als Mittelpunkt und DE als Radius AD zwischen A und D in G und DF in der Verlängerung in H (zeichne den Kreis)

Dann ΔAED > SektorDEG und ΔDEF < Sektor DEH

$$\frac{\Delta DEF}{\Delta DEA} < \frac{SektorDEH}{SektorDEG}$$

$$Daher \quad \frac{FE}{EA} < \frac{\angle FDE}{\angle EDA} \quad zusammen\ mit \quad \frac{FA}{EA} < \frac{\angle FDA}{\angle EDA}$$

$$Daher \quad \frac{CA}{AE} < \frac{\angle CDE}{\angle ADE} \quad und \quad \frac{CE}{EA} < \frac{\angle CDE}{\angle EDA}$$

$$Aber \quad \frac{CE}{EA} = \frac{CB}{BA} \quad und \quad \frac{\angle CDE}{\angle EDA} = \frac{arcCB}{arcBA}$$

$$Also \quad \frac{CB}{BA} < \frac{arcCB}{arcBA} \quad und\ somit, \quad da\ \angle CDE = \angle CAB \quad und \quad \angle ADE = \angle ACB,$$

$$folgt \quad \frac{CB}{BA} < \frac{\angle CAB}{\angle ACB}.$$

$$Dies\ ist\ äquivalent\ mit\ der\ Aussage \quad \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} \quad für \quad b < a < 90^\circ$$

Doch der Winkel *BAD* ist 1/45 eines halben rechten Winkels.
Entsprechend ist der Winkel *KAH* weniger als ein Dreitausendneunhundertsechzigstel eines rechten Winkels.[9]
Doch eine Größenordnung unter einem solchen Winkel gesehen, ist für unser Auge nicht wahrnehmbar.
Und der Umfang *KH* ist gleich dem Umfang *DF;* daher ist der Umfang *DF* für unser Auge noch weniger wahrnehmbar;
denn, wenn *AF* verbunden wird, ist der Winkel *FAD* geringer als der Winkel *KAH.*[10]
Daher wird *D* als das gleiche wie *F* erscheinen.
Aus demselben Grund wird *C* auch als das gleiche wie *E* erscheinen.
Entsprechend ist *CD* nicht wahrnehmbar anders als *EF*.
Daher ist der Kreis, der die dunkle und die helle Seite des Mondes trennt, nicht wahrnehmbar anders als ein Großkreis.

AUSSAGE 5

Wenn der Mond uns halbiert erscheint, dann liegt der Großkreis parallel zu dem Kreis, der die dunkle und die helle Seite des Mondes voneinander trennt, in der Richtung unseres Auges; das heißt, der zum Teilungskreis parallele Großkreis und unser Auge sind in einer Ebene.

Denn wenn der Mond halbiert ist, liegt der Kreis, der die dunkle und die helle Seite des Mondes voneinander trennt, in Richtung unseres Auges [Hypothese 3], während der Großkreis parallel zum trennenden Kreis davon ununterscheidbar ist,
folglich, wenn der Mond uns halbiert erscheint, ist der Großkreis parallel zum trennenden Kreis in Richtung unseres Auges.

9 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{45} \cdot \frac{1}{44} = \frac{1}{3960}$

10 Vgl. Pappus

AUSSAGE 6

Der Mond bewegt sich (in einer Himmelsbahn), niedriger als (die der) Sonne, und ist, wenn er halbiert ist, weniger als ein Quadrant von der Sonne entfernt.

siehe Figur 24

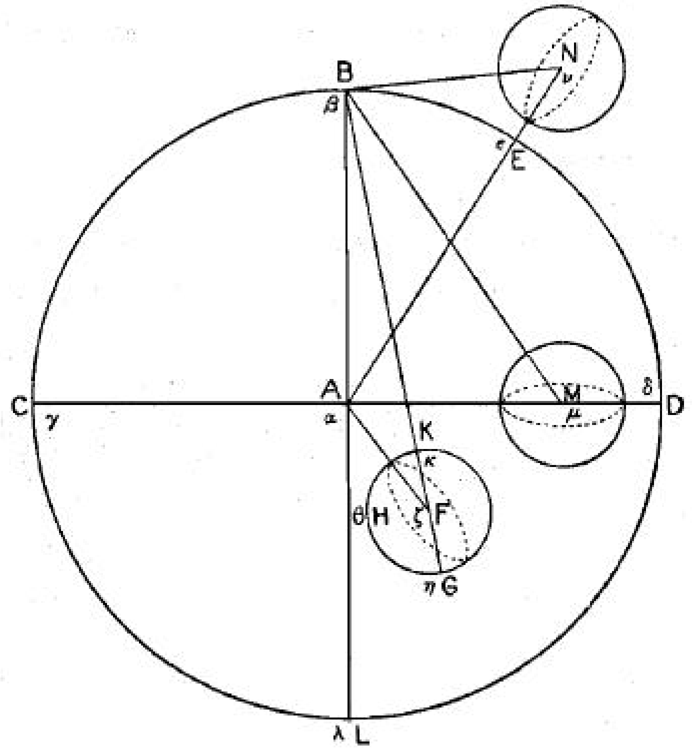

Fig. 24.

Denn unser Auge sei in *A* und *B* sei der Mittelpunkt der Sonne; man verbinde *A* und *B* und verlängere *AB*, lege eine Ebene durch *AB* und den Mittelpunkt des Mondes, wenn dieser halbiert ist;

diese Ebene schneidet in einem Großkreis die Kugel, auf der sich der Mittelpunkt der Sonne bewegt.

Die Ebene schneidet die Kugel im Kreis *CBD*; und von *A* werde *CAD* rechtwinklig zu *AB* gezogen.

Dann ist der Umfang *BD* der eines Quadranten.

Ich behaupte, daß der Mond sich (auf einer Bahn) bewegt, niedriger als die (der) Sonne, und daß er halbiert weniger als einen Quadranten von der Sonne entfernt ist; das heißt, daß sein Mittelpunkt zwischen den Geraden *BA*, *AD* und dem Umfang *DEB* liegt.

Wenn nicht, läge sein Mittelpunkt *F* zwischen den Geraden *DA*, *AL* und man verbinde *BF;*

dann ist *BF* die Achse des Kegels, der sowohl die Sonne als auch den Mond umfaßt, und *BF* ist im rechten Winkel zu dem Großkreis[11], der auf dem Mond die dunkle und die helle Seite voneinander trennt.

Der Großkreis auf dem Mond parallel zu dem Kreis, der die dunkle und die helle Seite voneinander trennt, sei *GHK*; dann liegen, wenn der Mond halbiert ist, der Großkreis parallel zu dem Kreis, der die dunkle und helle Seite des Mondes voneinander trennt, und unser Auge in einer Ebene [Aussage 5], man verbinde *AF*.

Daher liegt *AF* auf der Ebene des Kreises *KGH*.

Und *BF* ist im rechten Winkel zum Kreis *KHG*, und daher zu *AF*; daher ist der Winkel *BFA* ein rechter.

Doch der Winkel *BFA* ist außerdem stumpf, was unmöglich ist.

Daher liegt der Punkt *F* nicht in dem Raum, der von dem Winkel *DAL* begrenzt wird.

Ich behaupte, daß er auch nicht auf *AD* liegt.

Wenn dies möglich wäre, sei er *M*; und wieder werde *BM* verbunden, und der Großkreis parallel zur trennenden Kreislinie werde genommen, sein Mittelpunkt sei *M*.

Dann läßt sich wie zuvor beweisen, daß der Winkel [mit dem Großkreis gebildet] *BMA* ein rechter ist.

Doch das ist auch der Winkel *BAM*, was unmöglich ist.

Daher liegt der Mittelpunkt des Mondes, wenn dieser halbiert ist, nicht auf *AD*.

Er liegt zwischen *AB* und *AD*.

Wiederum behaupte ich, daß er außerdem innerhalb des Umfangs BD liegt.

Denn, wenn dies möglich ist, liege er außerhalb, in *N;*

und man vollführe dieselbe Konstruktion.

Dann läßt sich beweisen, daß der Winkel *BNA* ein rechter ist; daher ist *BA* größer als *AN*.

Doch ist *BA* gleich *AE;*

daher ist *AE* außerdem größer als *AN*: welches unmöglich ist.

Daher liegt der Mittelpunkt des Mondes, wenn dieser halbiert ist, nicht außerhalb des Umfangs *BED*.

In ähnlicher Weise läßt sich beweisen, daß er auch nicht auf dem Umfang *BED* selbst liegt.

Daher liegt er innerhalb dieses Umfangs.

Daher usw.

[11] Gemeint ist ein zum Großkreis paralleler Kreis, welcher so nah am Großkreis liegt, daß er mit unserer Wahrnehmung nicht vom Großkreis zu unterscheiden ist.

AUSSAGE 7

Die Entfernung der Sonne von der Erde ist größer als 18 mal, aber kleiner als 20 mal die Entfernung des Mondes von der Erde.

Siehe Figur 25

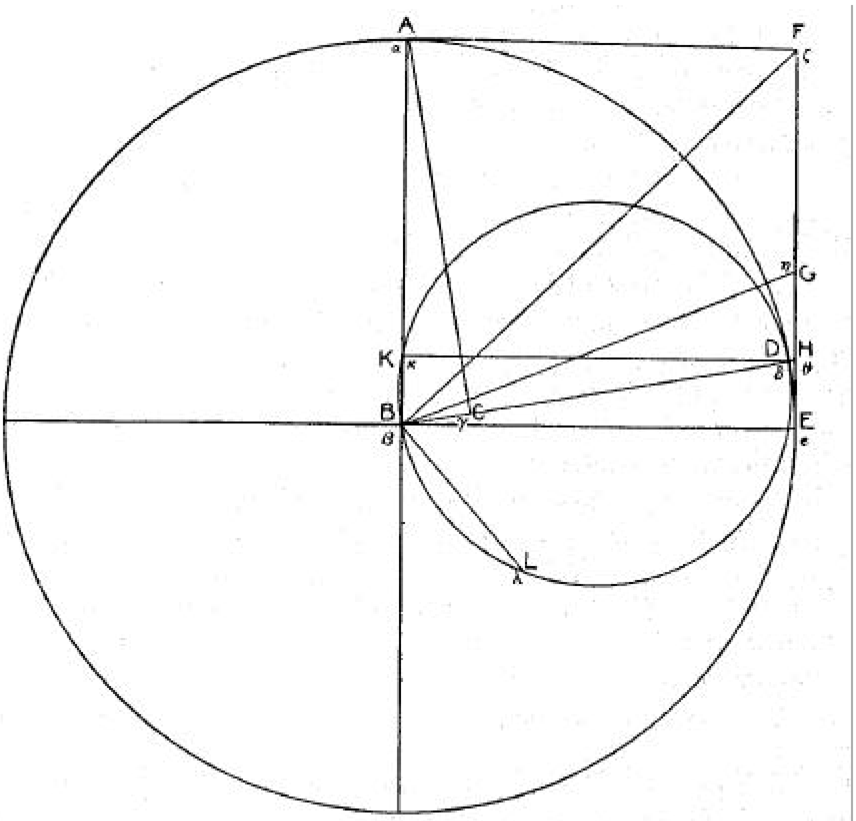

Fig. 25.

A sei der Mittelpunkt der Sonne, *B* der Mittelpunkt der Erde.
A und *B* werden verbunden und *AB* erzeugt bzw. verlängert.
C sei der Mittelpunkt des Mondes, wenn er halbiert ist;
eine Ebene werde durch *AB* und *C* gelegt, und der Schnitt, den sie in der Kugel macht, auf der sich der Mittelpunkt der Sonne bewegt, sei der Großkreis *ADE.*
AC, CB werden verbunden und *BC* werde auf *D* verlängert.
Dann, weil der Punkt *C* im Mittelpunkt des Mondes ist, wenn dieser halbiert ist, ist der Winkel *ACB* ein rechter.
BE werde von *B* im rechten Winkel zu *BA* gezogen;
dann ist der Umfang *ED* ein Dreißigstel des Umfangs *EDA;*
denn, der Hypothese zufolge, ist die Entfernung des Mondes, wenn dieser uns halbiert erscheint, um ein Dreißigstel eines Quandranten kleiner als ein Quadrant [Hypothese 4].
Daher ist der Winkel *EBC* ebenfalls ein Dreißigstel eines rechten Winkels.

Das Parallelogramm werde vervollständigt und *BF* sei verbunden.

Dann ist der Winkel *FBE* die Hälfte eines rechten Winkels.

Der Winkel *FBE* werde durch die Gerade *BG* halbiert; daher ist der Winkel *GBE* ein Viertel eines rechten Winkels.

Aber der Winkel *DBE* ist auch ein Dreißigstel eines rechten Winkels;

daher ist das Verhältnis des Winkels *GBE* zum Winkel *DBE* dasselbe wie 15 zu 2;

denn, wenn ein rechter Winkel als in 60 gleiche Teile unterteilt betrachtet wird, umfaßt der Winkel *GBE* 15 solcher Teile und der Winkel *DBE* 2.

Da *GE* zu *EH* ein größeres Verhältnis hat, als der Winkel *GBE* zu *DBE,*[12]

steht *GE* zu *EH* in einem größeren Verhältnis als 15 zu 2.

Sodann, weil *BE* gleich *EF* ist, und der Winkel in *E* ein rechter, ist das Quadrat über *FB* das Doppelte des Quadrats über *BE.*

Aber, weil sich das Quadrat über *FB* zum Quadrat über *BE* verhält wie das Quadrat über *FG* zum Quadrat über *GE;*

ist daher das Quadrat über *FG* das Doppelte des Quadrats über *GE.*

Nun ist 49 weniger als das Doppelte[13] von 25,

so daß das Quadrat über *FG* zu dem Quadrat über *GE* in einem größeren Verhältnis steht, als 49 zu 25;

daher steht auch *FG* zu *GE* in einem größeren Verhältnis als 7 zu 5.

Daher steht, *componendo, FE* zu *EG* in einem größeren Verhältnis als 12 zu 5, das heißt, als 36 zu 15.

Doch es ist auch bewiesen worden, daß *GE* zu *EH* ein größeres Verhältnis hat als 15 zu 2,

daher hat, *ex aequali, FE* zu *EH* ein Verhältnis größer als 36 zu 2, das heißt, von 18 zu 1;

daher ist *FE* größer als 18 mal *EH.*

Und *FE* ist gleich *BE;*

daher ist *BE* auch größer als 18 mal *EH;*

daher ist *BH* viel größer als 18 mal *HE.*

Da sich aber *BH* zu *HE* so verhält, wie *AC* zu *BC,* wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke;

ist *AB* folglich auch größer als 18 mal *BC.*

---

12 wegen $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} > \frac{\alpha}{\beta}$, wenn $\beta < \alpha < 90°$ mit $\alpha = \angle$ GBE und $\beta = \angle$ HBE. Sei GE senkrecht zu BE und schneide BH inH. (Siehe Figur 26) Der Kreis mit B als Mittelpunkt und BH als Radius trifft BG in P und BE (verlängert) in Q.

$$\frac{\Delta GBH}{\Delta HBE} > \frac{Sektor\ \ PBH}{Sektor\ \ HBQ} \quad also \quad \frac{GH}{HE} > \frac{\angle GBH}{\angle HBE} \quad und \quad \frac{GE}{HE} > \frac{\angle GBE}{\angle HBE}$$

13 Unter Benutzung der pythagoreischen Approximation von $\sqrt{2}$ durch 7/5

Und *AB* ist der Abstand von der Sonne zur Erde, während *CB* der Abstand vom Mond zur Erde ist; daher ist der Abstand von der Sonne zur Erde größer als 18 mal der Abstand des Mondes von der Erde.
Wiederum behaupte ich, daß er auch kleiner ist als 20 mal diese Entfernung.
Denn wenn man *DK* parallel zu *EB* durch *D* zieht, und den Kreis *DKB* um das Dreieck *DKB* beschreibt, dann ist *DB* sein Durchmesser, weil der Winkel in *K* ein rechter ist.
Fügen wir *BL*, die Seite eines Sechsecks in den Kreis ein. Dann, da der Winkel *DBE* ein Dreißigstel eines rechten Winkels ist, ist auch der Winkel *BDK* ein Dreißigstel eines rechten Winkels;
daher ist der Umfang *BK* ein Sechzigstel des Gesamtkreises.
Aber *BL* ist ebenfalls ein Sechstel des ganzen Kreises.
Daher ist der Umfang *BL* zehn mal der Umfang *BK*.
Und der Umfang *BL* steht zum Umfang *BK* in einem Verhältnis, das größer als das ist, daß die Gerade *BL* zu der Geraden *BK* hat.[14]
Daher ist die Gerade *BL* weniger als zehn mal die Gerade *BK*.
Und *BD* ist das Doppelte von *BL*;
daher ist *BD* geringer als zwanzig mal *BK*.
Doch da *BD* sich zu *BK* wie *AB* zu *BC* verhält;
ist *AB* folglich auch geringer als zwanzig mal *BC*.
Und *AB* ist die Entfernung der Sonne von der Erde, während *BC* die Entfernung die Entfernung des Mondes von der Erde ist;
Daher ist die Entfernung der Sonne von der Erde weniger als zwanzig mal die Entfernung des Mondes von der Erde.
Zuvor wurde schon bewiesen, daß sie größer als achtzehn mal diese Entfernung ist.

14 nach Ptolemäus