

**Dr. Ute Baltes
Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik**

Mathematik in der Grundschule

**Vorlesung
Lehramt GHRGe
Schwerpunkt Grundschule**

Kapitel 1: Einführung

1.1 Basisliteratur:

Lehrpläne Primarstufe Mathematik (2003), Verlagsgesellschaft Ritterbach, Frechen
Ein Unterrichtswerk Mathematik, z.B.: Die Welt der Zahl, Bd. 1 bis 4, 1992f (Neuaufgabe 1998 Bd. 1 und 2) Schroedel Schulbuchverlag Mathebaum Bd. 1 bis 4, 1993; Schroedel Schulbuchverlag Das Zahlenbuch, Mathematik im 1./ 2./ 3./ 4. Schuljahr; E. Klett Schulbuchverlag 1994ff
H. Radatz/ W. Schipper: Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen; Schroedel Schulbuchverlag 1983
H. Radatz/ K. Rickmeyer: Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen; Schroedel Schulbuchverlag 1991
G. Krauthausen/Petra Scherer: Einführung in die Mathematikdidaktik, Heidelberg; Berlin 2001
Lauter: Methodik der Grundschulmathematik, Donauwörth, 1986
Lauter: Fundament der Grundschulmathematik, Donauwörth, 1991
Padberg: Didaktik der Arithmetik, Reihe Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 7, BI Verlag

1.2 Ergänzungen:

Zeitschriften:

- 1) Sachunterricht und Mathematikunterricht in der Primarstufe (SMP), eingestellt
- 2) Grundschule (GS), Jahresheft zum Mathematikunterricht
z.B. 1991 zum Thema Geometrie
- 3) Die Grundschulzeitschrift
- 4) Mathematische Unterrichtspraxis (MUP)
- 5) Mathematiklehren (ML)
Einzelne Arbeiten zur Primarstufe

Weitere Bücher

J.H. Lorenz/ H. Radatz: Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht; Schroedel Schulbuchverlag 1993

J.H. Lorenz: Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht; Hogrefe Verlag 1992

E.Ch Wittmann/ G.N. Müller: Handbuch der produktiven Rechenübungen:

- Vom Einspluseins zum Einmaleins;
- Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechenverfahren, Klett 1990, 1992

M. Franke, Auch das ist Mathe (Bd. 1 u. 2), Vorschläge für projektorientiertes Arbeiten, Aulis 1995f

G.N. Müller/ E.Ch. Wittmann: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe, Braunschweig 1984

J. Floer: Mathematik für Kinder, Arbeitskreis Grundschule 1982

H. Winter: Mathematik entdecken, Scriptor Verlag 1987

W. Oehl: Der Rechenunterricht in der Grundschule, Schroedel 1962

H. Aebli: Grundformen des Lehrens, Stuttgart 1963

Chr. Selter / H. Spiegel: Wie Kinder rechnen. Klett 1997

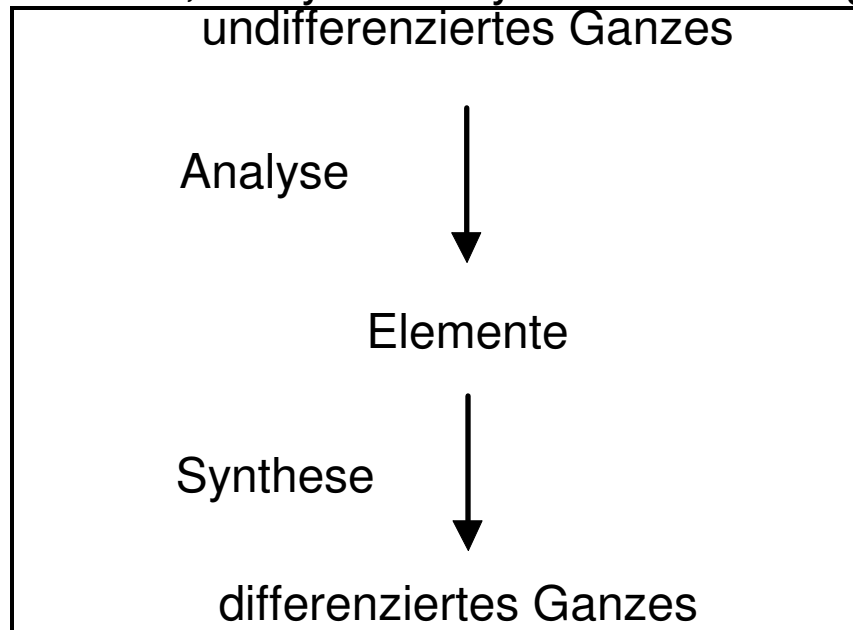
3.3 Rechenunterricht im 20. Jahrhundert

J. Wittmann (1885 - 1960):

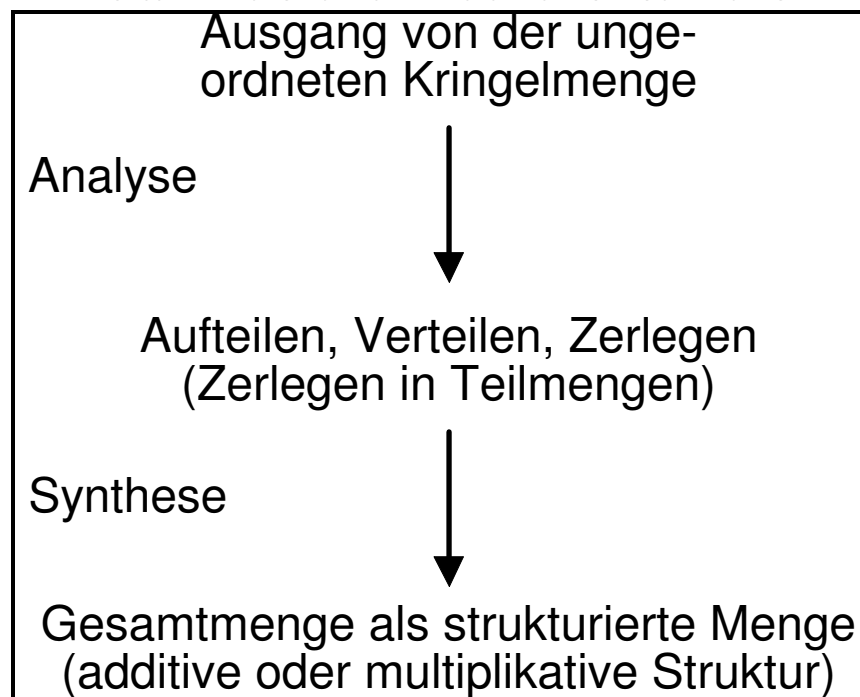
Begründer des ganzheitlichen Rechenunterrichtes

Basis: Gestaltpsychologie, z.B. Max Wertheimer, Produktives Denken

ganzheitliches, analytisch - synthetisches Vorgehen:



"Ganzheitlicher Rechenunterricht"



Phasen des ganzheitlichen Anfangsunterrichtes:

- I. Pränumerisches Arbeiten mit Mengen
- II. Erstes Rechnen
 - Schon sofort: Malnehmen und Aufteilen
 - Zahlen bis 100
 - Ganzheit des Rechenbereichs bis 100

Beispiel:

Eine Menge von 12 Plättchen wird in Male zu 3 aufgeteilt.

Ergebnis: $12 = 4 \textcircled{3} \text{ (} \textcircled{3} \text{ "Male mit 3 drin")}$

Verkürzt: $12 = 4 \ 3$

Kritik:

- Zu starke Betonung des "Figural-Anschaulichen"
- Eigentümliche Schreib- und Sprechweise

Beispiele:

$3 \cdot 4$ als $3 \textcircled{4}$ (3 Male mit 4)

$12 : \textcircled{4} = 3 \bigcirc$ (12 aufgeteilt in Male mit 4 ergibt 3 Male)

$8 - 5 = 3$ (sprich: 8 weg 5 ergibt 3)

- Menge und Zahl werden nicht klar genug unterschieden.
J. Wittman spricht von der doppelten Freiheit der Menge bezüglich Ordnung und Qualität der Glieder.
 - Ordnung:
Die Ordnung gehört in der Tat nicht zur Menge.
 - Qualität der Elemente:
Änderungen bei den Elementen sind bereits Mengenänderungen, "die Menge 4" gibt es z.B. nicht!

A. Fricke (1913-1986):

Fricke erkennt die Bedeutung der Ergebnisse Piagets für das Mathematiklernen. Einige Kennzeichen des "operativen Unterrichts" nach Fricke:

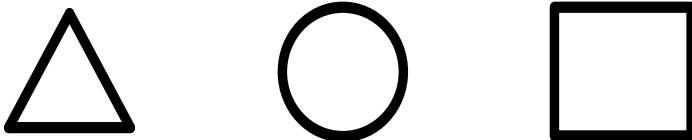
- Betonung der Tatanschauung (handelndes Lernen)
Operatives Denken durch "Handelndes Lernen" fördern
- Cuisenaire-Stäbe (Farben-Stäbe) im Anfangsunterricht als Handlungsmedium
- Betonung des Beziehungswissens
- Operative Gesamtbehandlung: zeitliche Nähe von Operation und Gegenoperation im Stoffplan

Das operative Prinzip ist bis heute anerkannt.

3.4 Neue Mathematik (ca. 1969 - 1985)

Einige Merkmale:

- "Logische" Plättchen als grundlegendes Anschauungsmittel (Klasse 1)



- Mengenbegriff als zentraler Begriff
- Kardinalzahl als Klassenbegriff für Mengen

Mathematisch orientierte Reform:

- Mengenlehre einschließlich Symbolik als *Basis des Rechnens*
- Überbetonung des Kardinalzahlbegriffs
- Überbetonung mathematischer Strukturen (Gesetze)
- Vernachlässigung der Rechenfertigkeit
zu wissen, daß $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$ ist, war im Prinzip wichtiger, als zu wissen, wieviel es ist!

Kritik:

Unzureichende Umsetzung in der Schule

Mangelnde Integration in den traditionellen Unterricht (Bruch!)

Mathematiklernen stark auf strukturelle Ziele ausgerichtet

Vernachlässigung der Anwendungsorientierung

Das Konzept wurde 1985 zurückgezogen, dabei wurden auch viele positive Aspekte in Frage gestellt, z.B.:

- Verwendung von Merkmalplättchen zur Denkschulung
- Einbeziehung nichtdezimaler Systeme
- Verwendung des Mengenbegriffs zur Untersuchung von Zahlenmengen

Diese Themen sind zumindest für leistungsstarke Kinder im Förderunterricht sinnvoll und auch mit dem heutigen Lehrplan 'verträglich'.

Geblichen sind u.a.:

- Bis dahin unbekannte Diagrammtypen (Baum-, Operator-, Rechteck-Diagramm)
- Betonung der Rechengesetze
- Herausarbeitung von Zahleigenschaften wie Primzahl, gerade Zahl
- Die Kleiner- und Größerrelation mit den Zeichen $<$, $>$
- Das Prinzip der Strukturorientierung
- Eine fachlich korrekte Sprechweise insbesondere für die Zeichen $+$, $-$, $=$

Hinweis zum Mengenbegriff:

G. Cantor (1845-1918) erklärte "Menge als Zusammenfassung M von bestimmten *wohlunterschiedenen* Objekten ... zu einem Ganzen". Die Formulierung soll sicherstellen, daß jeweils eindeutig feststeht, welche Objekte zur Menge M gehören.

Wenn dies anschaulich gewährleistet ist, können auch Ansammlungen von gleichartigen Plättchen oder gezeichneten Kreisen als Mengen bezeichnet werden. Kurz:

Menge als Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen, wobei eindeutig feststeht, welche Objekte dazugehören

Plättchen als „Denkzeug“

Aufgabe:

Ein Bassin kann durch 2 Hähne mit Wasser gefüllt werden. Wenn der eine allein geöffnet ist, braucht er 3 Stunden zum Füllen. Der andere benötigt allein 5 Stunden. Nach wieviel Stunden und Minuten ist das Bassin gefüllt, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind?

A) Lösung mit algebraischen Methoden

Variable einführen

Gleichung aufstellen

Gleichung lösen, Zeit in Std. u. Min. ausdrücken

B) Lösung mit Plättchen

Idee: Füllmenge Wasser mit Plättchen darstellen

Füllen durch Hahn 1 durch eine Handlung darstellen, wieviel Plättchen nimmt man für die Füllung?

Füllen durch Hahn 2 durch eine Handlung darstellen, wieviel Plättchen nimmt man für die Füllung?

Wieviel Plättchen braucht man, um den gleichzeitigen Einlauf des Wassers aus beiden Hähnen darzustellen?

Bewertung:

Die B) zugrundeliegende Handlung simuliert den realen Vorgang und erlaubt die schrittweise Findung der Lösung durch „Denkhandeln“.

1.2 Entwicklung des Denkens

Sensomotorische Phase	0 - 1,5 Jahre
Vorbegriffliches Denken	1,5 - 4 Jahre
Anschauliches Denken	4 - 7 Jahre
Konkret-operatives Denken	7 - 12 Jahre
Übergang zum formalen Denken	ab 12 Jahren

Bedeutung für die Grundschule:

Phasen 3 und 4, speziell der Übergang 3 → 4
Übergang 4 → 5 zur Abgrenzung

Kennzeichen 3 → 4:

Die Anschauungsbindung bleibt, aber die Fähigkeit zum vorstellenden Operieren bildet sich aus.

Operationen werden beweglich, insbesondere *reversibel* und *komponierbar*.

Kennzeichen 4 → 5:

Anschauungsbindung geht zurück, auch nur sprachlich gegebene Prämissen können analysiert werden (hypothetisches Denken).

Solche Leistungen sind im Einzelfall auch schon bei Grundschulkindern möglich.

1.3 Folgerung für den Unterricht: Operatives Prinzip

Aspekte des operativen Prinzips im Überblick:

- Betonung der Tatanschauung
- Stufen der Verinnerlichung einer Operation
- Formen der Darstellung (Repräsentation) von Wissen
- Der Zusammenhang zwischen den Stufen der Verinnerlichung und den Formen der Darstellung
- Lernen und Erarbeiten in Zusammenhängen
- Operatives Üben
- Operative Begriffsbildung
- Der Unterrichtsplan im operativen und nichtoperativen Unterricht

Stufen der Verinnerlichung: e - i - v
--

Das Operieren auf vorstellender Ebene erfordert die Vorstellung der Objekte *und* der Handlungen an ihnen.

effektives Tun	enaktiv
zeichnerisch unterstützte Vorstellung	ikonisch
a) zeichnerisches Handeln (Bewegen als Durchstreichen und Neuzeichnen)	
b) Momentbild der Handlung:	
Beispiel: Verteilen von 12 Bonbons an 4 Kinder	

Das Kind muß sich den die Zustände verbindenden Vorgang vorstellen!

vorstellendes Operieren	vorstellend
-------------------------	-------------

- Formen der Darstellung (Repräsentation) von Wissen als Formen der Kommunikation

Formen der Repräsentation:

e - i - s

Handlungswissen: enaktiv

Jemand kann durch eine Handlung ausdrücken, was er meint.

Bildwissen: ikonisch

Jemand kann durch eine Skizze ausdrücken, was er meint.

Symbolisiertes Wissen: symbolisch

Jemand kann sein Wissen symbolisch wiedergeben:

- Umgangssprache
- Fachsprache, mathematische Zeichen

Wechsel der Darstellungsform: *Intermodaler Transfer*

- Lernen in Zusammenhängen

Gestaltung des Unterrichts unter Beachtung der Beweglichkeitsmerkmale von Piaget-Operationen:

- Keine isolierende *Erarbeitung* verwandter Operationen
- Operatives *Üben*

- Operative Begriffsbildung

Lehren eines Begriffs nicht durch 'Definition' (verbale Beschreibung)

Das Kind lernt den Begriff durch Ausführen von Handlungen, durch die ein Repräsentant des Begriffs erzeugt wird. Das erste Wissen vom Begriff ist ein Handlungswissen!

Neuere Kognitionspsychologie: Begriffe werden in Form von Prototypen (Repräsentanten) im Gedächtnis abgelegt.

- *Unterrichtsplan* im operativen bzw. nichtoperativen Unterricht Lernziel: Zwei verwandte Operationen: Op1, Op2 (n. Aebli)

im operativen Unterricht

Einführung:	Op1	Op2	Konkretes Problem der Lebenswirklichkeit (LW)
Durcharbeitung (Begriff nach Aebli) erste Anwendung	Op1	Op2	Wiederholung der Einführung in veränderter Situation, 'quasi' - Einführung
Fertigkeitsübung:	Op1	Op2	isolierend: Auswendiglernen
Operatives Üben	Op1	Op2	Üben in Zusammenhängen
Anwendung	Op1	Op2	gemeinsame Anwendung

im nichtoperativen Unterricht

Einführung:	Op1	konkretes Problem der LW
Fertigkeitsübung:	Op1	Auswendiglernen
Anwendung:	Op1	Anwendung nur Op1
Einführung:	Op2	konkretes Problem der LW
Fertigkeitsübung:	Op2	Auswendiglernen
Anwendung:	Op2	Anwendung nur Op2
Anwendung:	Op1 Op2	"Vermischte" Aufgaben