3.2 Quantifizierendes Zählen

Gegeben: Menge, gesucht Anzahl der Elemente (Kardinalzahl)

➔ Die Menge M wird zur Kette geordnet (oft simultan mit dem folgenden Schritt): $(M,\prec)$

➔ Die Glieder der Kette werden nummeriert:
1, 2, 3, ... ,n (isomorphe Abbildung zu $(A(n),\prec)$)

$$\begin{array}{rccccccccccc} \text{Kette } (M,\prec) & O & \prec & O & \prec & O & \prec & O & \prec & O & \prec & O \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (A(n),\prec) & & \prec & 2. & \prec & 3. & \prec & 4. & \prec & 5. & \prec & 6. \end{array}$$

Zum Nummerieren von M:

Bijektive und ordnungstreue Zuordnung zwischen Kette $(M,\prec)$ und geeigneter Abschnittskette der natürlichen Zahlen:

Dem Anfangsglied der Kette $(M,\prec)$ wird 1 zugeordnet, dem Nachfolger in M wird jeweils der Nachfolger in ***N*** zugeordnet bis zum letzten Glied der Kette.

➔ Kardinale Wertung: das letzte Glied der Kette ist das n-te, also hat die Menge n Elemente: $| M | = | A(n) | = n$

Definition: $| A(n) | = n$ heißt "*Kardinalzahlprinzip*":

Ergebnis: **Natürliche Zahlen als Namen für Kardinalzahlen**

3.3 Didaktische Aspekte zum quantifizierenden Zählen

Beschreibung des Erwerbs der Zahlwortreihe mittels "Zählprinzipien" der traditionellen Didaktik (vgl. Padberg, Did.d.Ar.)

Eindeutigkeitsprinzip:
die Zuordnung muß bijektiv sein (für jeden Gegenstand genau ein Zahlwort)
insbesondere:
das selbe Element darf nicht mehrmals gezählt werden (injektiv),
jedes Element muß berücksichtigt werden (surjektiv).

Prinzip der stabilen Ordnung:
die Ordnung '$\prec$' in $\boldsymbol{N}$, keine Fehler beim Aufsagen der Zahlwörter

Kardinalzahlprinzip:
$|A(n)| = n$. Das zuletzt genannte Zahlwort im Zählprozeß gibt die Anzahl einer Menge an

Prinzip der Irrelevanz der Anordnung:
Die bei einer zu zählenden Menge M eingeführte Ordnung hat keinen Einfluß auf das Zählergebnis.
Mathematisch: Je zwei Ketten gleicher Länge sind isomorph!

Abstraktionsprinzip:
Die obigen Prinzipien gelten für jede beliebige Menge

4 Operatoraspekt

- Rechnerische Anwendung als Funktion: Wertetabelle

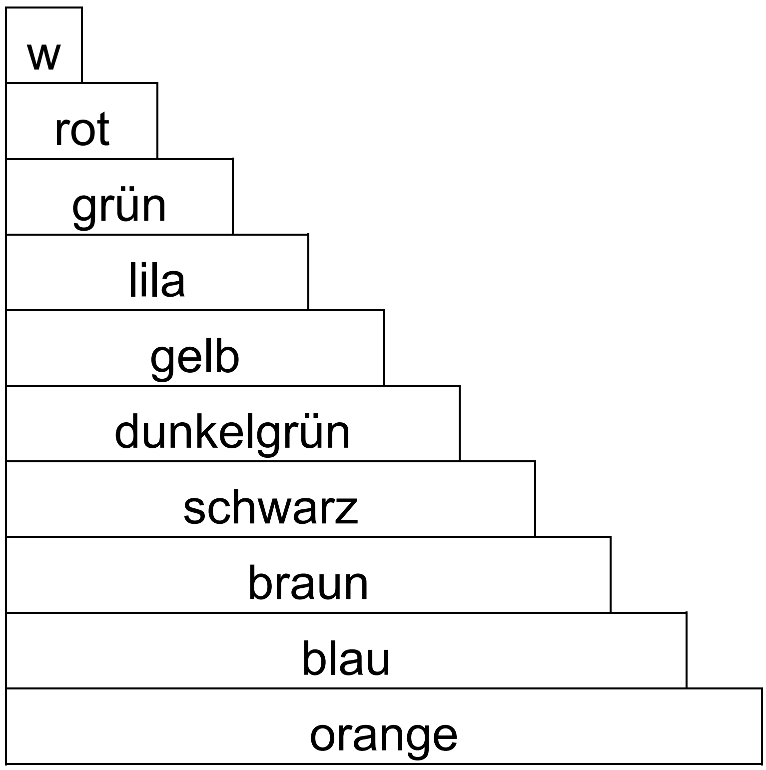
5mal	
2	10
5	25
...	30
8	...
...	...

Schreibform der Einzelzuordnung im
"Operatorbild":

$$\textit{Eingabe} \xrightarrow{\textit{Operator}} \textit{Ausgabe}$$

5 Maßzahlaspekt:

Verdeutlichung des Maßzahlaspekts:
Länge bei den Cuisenaire Stäben



6 Rechenzahlaspekt

6.1 Algebraischer Aspekt

Die natürlichen Zahlen bilden bezüglich der Rechenoperationen eine algebraische Struktur, in der nach gewissen Gesetzen gerechnet werden kann.

$(\boldsymbol{N}, +, \cdot)$ bzw. $(\boldsymbol{N_0}, +, \cdot)$ mit 0

6.1.1 Rechenoperationen (Verknüpfungen) in *N*

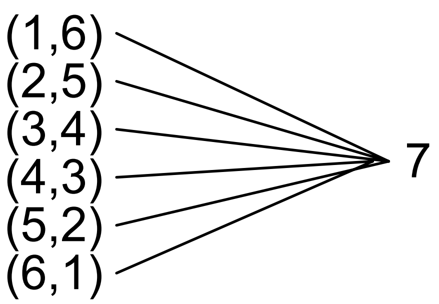
Beispiel Addition:

Struktur: Abbildung (Funktion) von ***N*** x ***N*** nach ***N***

$\oplus$: $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N}$
(a,b) a c = a + b

Jedem geordneten Paar (a,b) natürlicher Zahlen wird eindeutig eine natürliche Zahl c zugeordnet.

➔**Gegenüberstellung Verknüpfung und Operator**



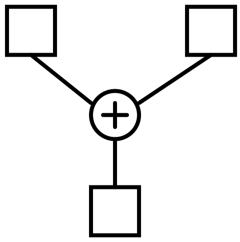
Die Verknüpfung ist **nicht** injektiv wie der Operator

Verknüpfung +	Operator +b
$(a,b) \underset{?}{\overset{+}{\rightleftarrows}} c$	$a \underset{-b}{\overset{+b}{\rightleftarrows}} c$

Schreibformen im Vergleich:

Operation	**Operator**
Verknüpferbild	Operatorbild
Verknüpfungstabelle	Wertetabelle

Verknüpferbild ("Rechenbaum")



Verknüpfungstabelle, Addition in ***N*** :

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	⇒
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
2	3	4								12	...
3	4		6						12	13	...
4	5			8				12		14	...
5	6				10		12		14	15	...
6	7					12		14		16	...
7	8				12		14			17	...
8	9			12		14		16		18	...
9	10		12		14				18	19	...
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...
⇓	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

6.1.2 Rechengesetze in $\boldsymbol{N_0}$

Für alle a,b,c aus $\boldsymbol{N_0}$ **gilt:**

Kommutativgesetze	Assoziativgesetze
$a + b = b + a$	$a + (b + c) = (a + b) + c$
$a \cdot b = b \cdot a$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Distributivgesetze

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\qquad$ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Soweit die Umkehroperationen definiert sind, gilt:
(weitere Distributivgesetze):

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ $\qquad$ $a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c$

$a : c + b : c = (a + b) : c$

$a : c - b : c = (a - b) : c$

Erhaltung der Summe, der Differenz, des Produkts, des Quotienten:

$a - b = (a + c) - (b + c)$ $\qquad$ $a + b = (a + c) + (b - c)$

$a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$ $\qquad$ $a \cdot b = (a \cdot c) + (b : c)$

Zerlegung von Subtrahend und Divisor:

$a - (b + c) = (a - b) - c$ $\qquad$ $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$

Kap II: Üben im Arithmetikunterricht

Richtlinien: *„Üben sichert, vernetzt und vertieft vorhandenes Verständnis, Wissen und Können. Es dient der Geläufigkeit und der Beweglichkeit." „Automatisierende Übungen bauen vielmehr auf einer sicheren Verständnisgrundlage auf. Sie erfolgen nicht zu früh."*

Folgerungen:

"Einsichtiges Üben:

- abwechslungsreich
- in sinnvollen Zusammenhängen
- in spielerischer Form
- in den Lernprozeß einplanen
- geeignete Mittel bereitstellen
- auf die Individualität der Kindes abstimmen"

weiter:

- anwendungs- und strukturorientiert
- Einsicht vertiefen, geistige Beweglichkeit fördern, Sachwissen vermehren

Methoden:

- spielerische Formen
- Arbeitsmittel variieren
- viele verschiedene Gesichtspunkte und Zusammenhänge aufzeigen → Anstrebung einer Übertragungsleistung
- Problemaufgaben, Rätsel

Ziel: positive Einstellung der Kinder zum Üben, das auch Anstrengung erfordert (Wochenplan, freie Arbeit)

Übungsformen	Ziele	theoretischer Hintergrund
(1) Automatisierendes Üben	Grundkenntnisse und elementare Techniken bis zur sicheren Beherrschung einüben	Prinzip des algorithmischen Lernens
(2) Gestuftes Üben	Schrittweiser Ausbau der Fähigkeiten durch Übungen mit sorgfältig gestufter Schwierigkeitssteigerung	Prinzip der Isolierung der Schwierigkeiten
(3) Operatives Üben	Ausbau der Beweglichkeit des Denkens durch Herstellen vielfältiger Beziehungen und Zusammenhänge	Operatives Prinzip
(4) Üben durch Anwenden	Übertragung des Gelernten auf neue Fragestellungen und Situationen	Prinzip der Anwendungsorientierung
(5) Zehn-Minuten-Rechnen	-'warming up' -'wiederholendes Üben --vorbereitendes Üben	Prinzip der Stabilisierung

(3) Operatives Üben

Grundtypen des operativen Übens:
Tauschaufgaben, Probe- oder Umkehraufgaben, Nach-baraufgaben und Zerlegungsaufgaben

Probeaufgaben

13-6=®

Tauschaufgabe

6+7=®

7+6=®

6+6=®
8+6=®
7+5=®
7+7=®

Nachbaraufgaben

7+3+3=®
7+7-1=®
3+4+6=®
6+6+1=®

Zerlegungsaufgaben

(4) Üben durch Anwenden

z.B.
Aufgabe:
Familie Muhr fährt von Hannover nach München. Das sind 627 km. Sie fahren um 7.30Uhr los.
Frage: Wann sind sie in München?

Ingo:

Rechnung: $\begin{array}{r} 730 \\ +627 \\ \hline 1357 \end{array}$

Antwort: Sie sind um 13.57 Uhr in München.

(5) Zehn-Minuten-Rechnen

notwendig für:
- *Vorbereitung auf Einführungen durch Aktualisierungen der notwendigen Vorkenntnisse*
- *Festigung des gerade Gelernten*

gerade gelernt	Übungsaufgaben
Addition mit Zehnerzahlen in Analogie zur Addition einstelliger Zahlen	3+5, 30+50 6+3, 60+30 4+6, 40+60 etc.
Ergänzen zum vollen Hun-derter L: 356, S:356+**44**=400	(a)L: 297, S:297+**3**=300 L: 824, S:824+**76**=900 usw. (b)L: 663 S: **37**
Umwandlungen cm-dm-m-km	L:37,25m S_1: 3725cm S_2: 372,5dm S_3: 0,03725km L: 1,3km S_1: 1300m usw.

Zusammenfassung:
<u>Thesen/Leitideen zum Üben</u>

(1) Einsichtiges Üben

(2) Differenziertes Üben

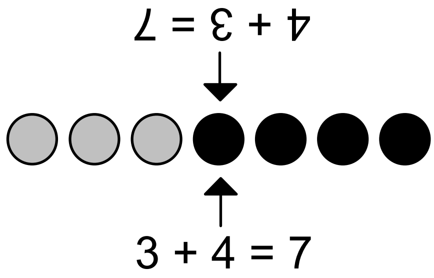
(3) Üben und soziales Lernen

(4) Pädagogische Funktionen des Übens

Literatur zum Üben: Wittmann/Müller: Handbücher produktiver Rechenübungen, Padberg: Didaktik der Arithmetik, Radatz/Schipper: Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.

Kap. III
Rechengesetze als Rechenhilfen

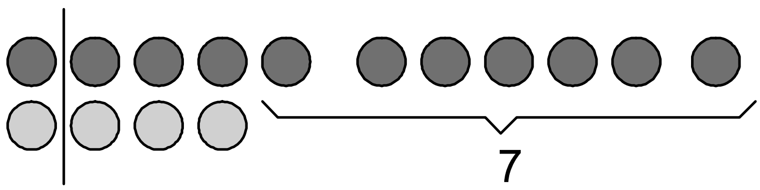
- Zur Lösung von Aufgaben des Typs 3 + 15 in einem Zehner muss die Tauschaufgabe 15 + 3 = 18 herangezogen werden.



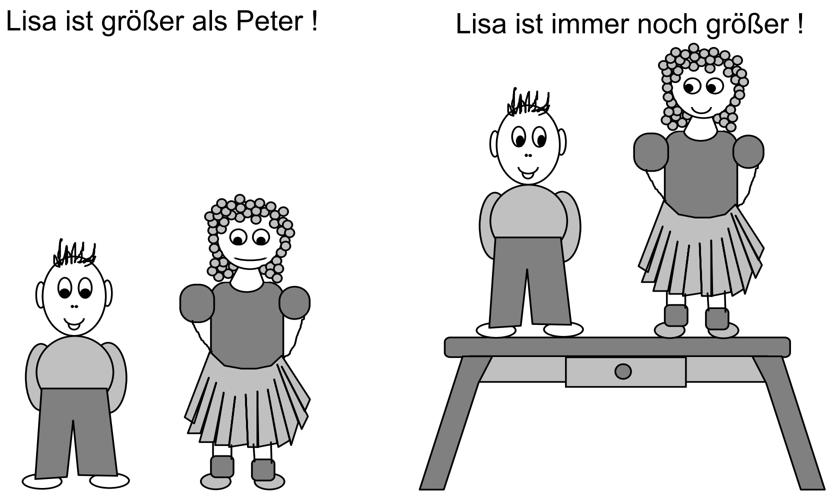
- Gesetz von der Konstanz der Differenz

$$a - b = (a \pm n) - (b \pm n)$$

11 - 4 = ?



(11 - 1) - (4 - 1) = 10 - 3

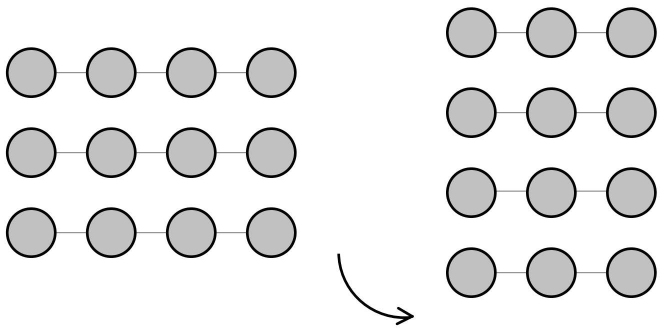


- Gesetz von der Konstanz der Summe (Begründung mit Wendeplättchen)

$$a + b = (a + n) + (b - n)$$

$$9 + 6 = 10 + 5 = 15$$

- Das Kommutativgesetz (Tauschaufgabe) der Multiplikation



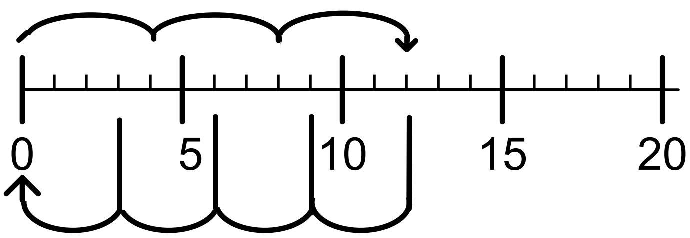
$$3 \cdot 4 \quad = \quad 4 \cdot 3$$

„beziehungstiftende Operation"!!!!!!!

Zur Verdeulichung der Allgemeingültigkeit des Gesetzes

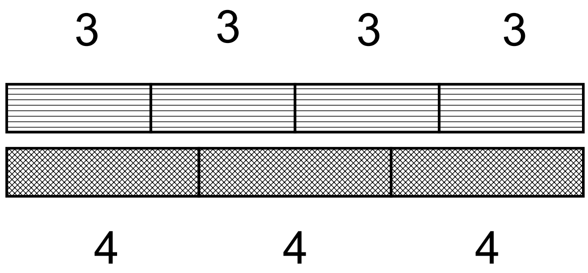
Zahlenstrahl

$4 \cdot 3$



$3 \cdot 4$

Cuisenaire Stäbe



$4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$

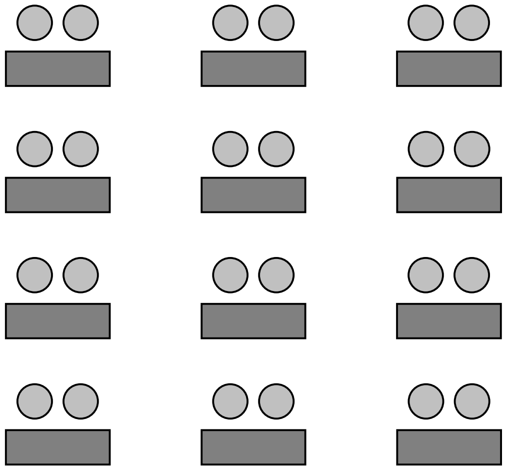
- Das Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz) der Multiplikation

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

hat Bedeutung für die schriftliche Multiplikation:

$$\begin{aligned} 542 \cdot 631 &= 542 \cdot (600+30+1) \\ &= 542 \cdot 600+42 \cdot 30+42 \cdot 1 \\ &= (542 \cdot 6) \cdot 100+(542 \cdot 3) \cdot 10+542 \cdot 1 \end{aligned}$$

- \- Es gibt 4 Reihen und in jeder Reihe sitzen 3·2 Schüler, also 4·(3·2) Schüler.



- Maschinenmodell

$$\underbrace{1 \xrightarrow{\cdot 2} 2 \xrightarrow{\cdot 3} 6} \xrightarrow{\cdot 4} 24$$

$$1 \xrightarrow{\cdot 6} 6 \xrightarrow{\cdot 4} 24$$

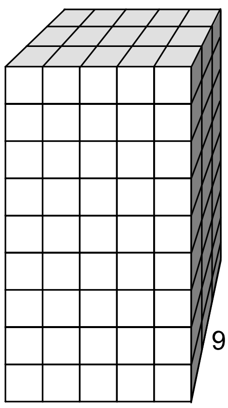
$$(2 \cdot 3) \cdot 4$$

$$1 \xrightarrow{\cdot 2} \underbrace{2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{\cdot 4} 24}$$

$$1 \xrightarrow{\cdot 2} 2 \xrightarrow{\cdot 12} 24$$

$$2 \cdot (3 \cdot 4)$$

- Würfeltürme

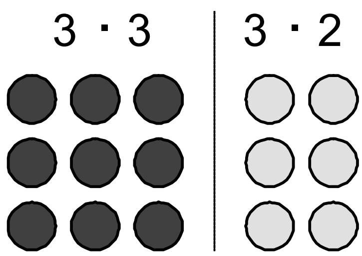


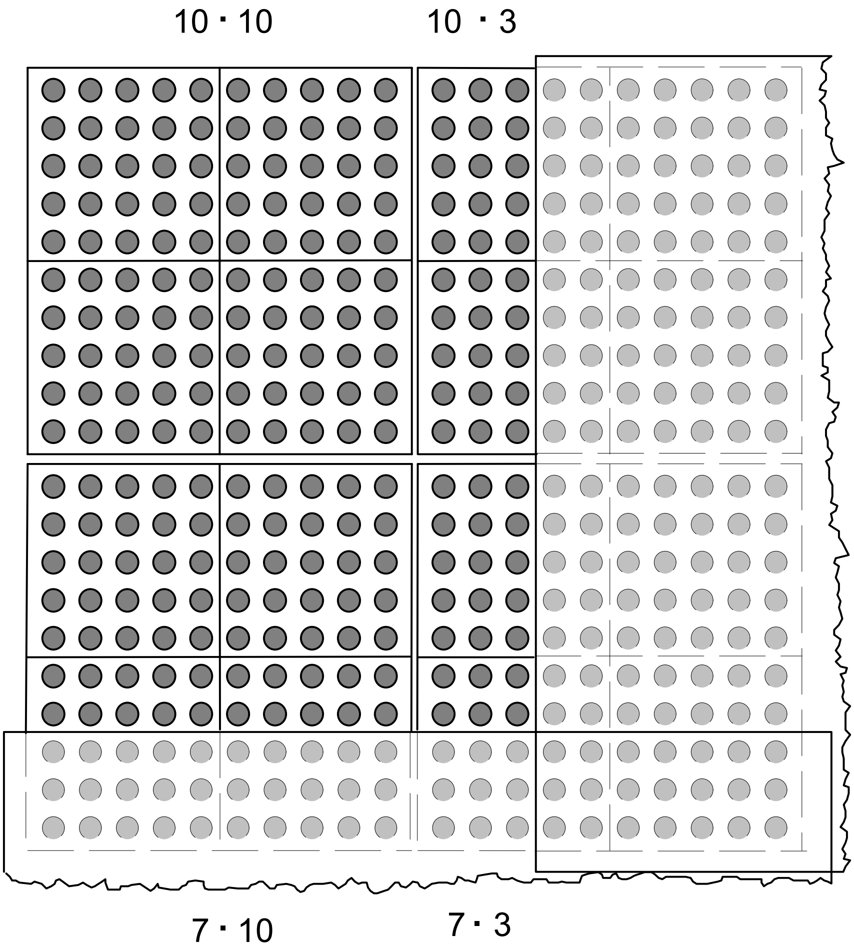
9 · (5 · 3)

(9 · 5) · 3

- Distributivgesetz

$$3 \cdot (3+2) = 3 \cdot 5$$





Die mehrfache Anwendung des Distributivgesetzes wird auch in dem folgenden Schema (Malkreuz) deutlich:

	10	3	
10	100	30	130
7	70	21	91
	170	51	**221**

Kap. IV
Arten des Rechnens

- Im Lehrplan für die Grundschule wird unterschieden zwischen
  - Zahlenrechnen (mündlichem und halbschriftlichem Rechnen)
  - Ziffernrechnen (schriftliche Rechenverfahren).

Gründe für die Beibehaltung schriftlicher Rechenverfahren als Unterrichtsgegenstand in der Grundschule, trotz ihrer abnehmenden praktischen Bedeutung:

- Ein Kind sollte am Anfang seiner geistigen Entwicklung nicht die Erfahrung machen, einer Maschine ausgeliefert zu sein, sondern seine Kompetenz und Selbständigkeit sollte gestärkt werden.

- Schriftliche Rechenverfahren sind ein erstes Beispiel für Algorithmen; damit ist die Erkenntnis verbunden, kompliziertere Sachverhalte ökonomisch zu bewältigen.

- Zum Verständnis unseres Zahlsystems (Bündelung, Stellenwert)

- Als Verständnisgrundlage für die prinzipielle Arbeitsweise eines Taschenrechners

Kap. V
Stellenwertsysteme, Große Zahlen in der Grundschule

Römische Zahlschrift

Eigene Zeichen für

1	I
5	V
10	X
50	L
100	C
500	D
1000	M

Heutige, international vereinbarte Schreibweise unterliegt vier Regeln:

1. Zuerst Tausender notieren, falls erforderlich, dann ggf. H, Z, E.
2. Falls zu D Hunderter bzw. zu L Zehner bzw. zu V Einer hinzugezählt werden,stehen diese rechts von D, L bzw. V.
3. I, X oder C dürfen nur von demjeweils Fünf- oder Zehnfachen abgezogen werden; man notiert das abzuziehende Zeichen dann unmittelbar links vordem zu vermindernden Zeichen.
4. Unter Beachtung der ersten drei Regeln müssen möglichst wenige Zeichen geschrieben werden.

Beispiel: Darstellungvon 647 518 im Abakus:

	●		●	●		●
$\overline{\mathrm{M}}$	$\overline{\mathrm{C}}$	$\overline{\mathrm{X}}$	M	C	X	I
	●	● ● ● ●	● ●		●	● ● ●

2 Der mathematische Hintergrund von Stellenwertsystemen

Dekadisches Ziffernsystem als Spezialfall der umfassenderen Klasse von Stellenwertsystemen zu beliebigen Basen $b \neq 1$.

Basis eines Stellenwertsystems, $b \in \boldsymbol{N}$, $b>1$.

Stufenzahlen bezüglich b:
$1(=b^0)$, $b(=b^1)$, b^2, b^3, b^4, ...

Aus jeder Stufenzahl b^m erhält man die nachfolgende, indem man b mal b^m zu einem *Bündel* zusammenfaßt ($b \cdot b^m = b^{m+1}$).

<u>*Darstellungssatz:*</u>
Jede natürliche Zahl z läßt sich eindeutig in der Form

$$z=z_m b^m+z_{m-1}b^{m-1}+z_{m-2}b^{m-2}+z_{m-3}b^{m-3}+ \ldots +z_0 b^0$$

darstellen, wobei der Koeffizient z_m der höchsten Potenz von Null verschieden ist und alle Koeffizienten $z_0, \ldots z_m$ nur werte von 0 bis b-1 annehmen.

Zifferndarstellung auf der Basis des Darstellungssatzes:
Den b Zahlen 0,1,...,b-1 entsprechen *Ziffern* (Schreibfiguren): $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{b-1}$;
dann kann z als Ziffernfolge $\alpha_{z_m}, \alpha_{z_{m-1}}, \alpha_{z_{m-2}}, \alpha_{z_{m-3}}, \ldots \alpha_{z_0}$ geschrieben werden.

Dies ist die *Zifferndarstellung* von z im Stellenwertsystem zur Basis b.

<u>Beispiel</u>:
b=2: 35 als Kringelreihe:

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

●● ●● ●● ●● ●● ●● ●● ●● ●● ●● ●● ●● ●● ●● ●●
●● ●● ● 1. Stufe 1

●●●● ●●●● ●●●● ●●●● ●●●● ●●●● ●●●● ●●●● ●● 2. Stufe 1

●●●● ●●●● ●●●● ●●●● ●●●● ●●●● ●●●● ●●●● 3. Stufe 0

●●●●●●●● ●●●●●●●● ●●●●●●●● ●●●●●●●● 4. Stufe 0

●●●●●●●●●●●●●●●● ●●●●●●●●●●●●●●●● 5. Stufe 0

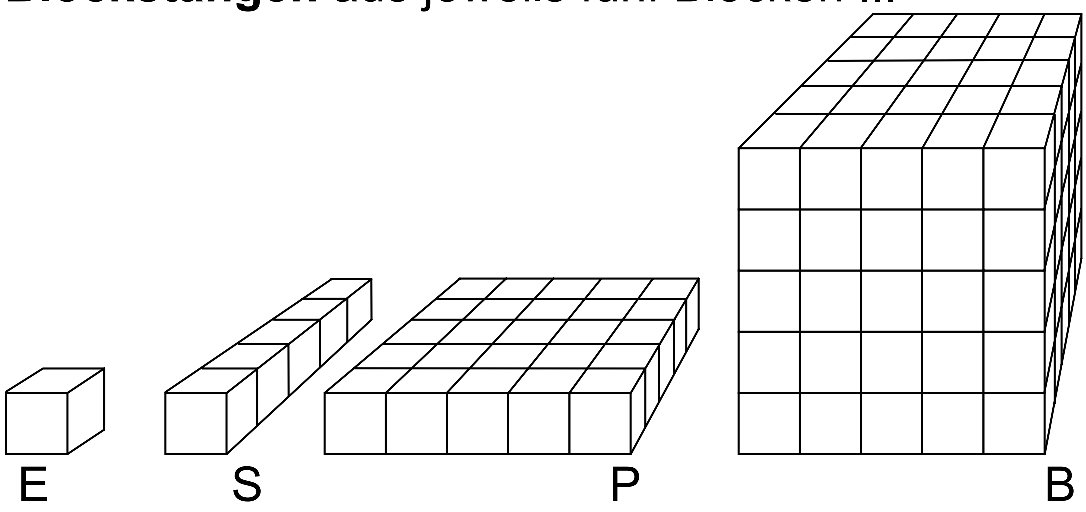
●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●● 6. Stufe 1

Selbsterfahrung d. L.: Arithmetik im 5er-System

Arbeitsmittel als Hilfe:
Alle auch im Dezimalsystem gebräuchlichen Materialien und ikonischen Darstellungen - jeweils dem 5er-System angepaßt!
Speziell nützlich: Systemblöcke, Abakus

Systemblöcke:

Einheiten: Würfel mit 1 cm Kantenlänge
Stangen aus jeweils fünf Einheiten
Platten aus jeweils fünf Stangen
Blöcke aus jeweils fünf Platten
Blockstangen aus jeweils fünf Blöcken ...



Abakus (Register):

Fächersystem für Plättchen mit Stellenwert, Stellenwert in der Kopfzeile notiert.

Bl.-Stange	Block	Platte	Stange	Würfel
●●		●●●●	●●●	●

Im Beispiel dargestellte Zahl: 20431_5

1. Grundidee des Stellenwertsystems:

Gegeben sei eine Menge von "Einheiten", z.B. Würfeln der Systemblöcke.

Prinzip der fortgesetzten Bündelung:

Je 5 Würfel werden zu einer Stange gebündelt (und getauscht) es bleiben maximal 4 einzelne *Würfel*. z.B. 1
Je 5 Stangen werden zu einer Platte gebündelt (und getauscht) es bleiben maximal 4 einzelne *Stangen.* z.B. 3
Je 5 Platten werden zu einem Block gebündelt (und getauscht) es bleiben maximal 4 einzelne *Platten.* z.B. 4
Je 5 Blöcke werden zu einer Block-Stange gebündelt (und getauscht), es bleiben maximal 4 einzelne *Blöcke.* z.B. 0
Wenn die Anzahl der Blockstangen kleiner fünf ist, bricht der Vorgang ab, es bleiben maximal 4 *Blockstangen*. z.B. 2

Stellenwertprinzip:

Dieses Prinzip wird zum Notieren der Anzahl der Menge allein mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 benötigt. Die Wertigkeit der einzelnen Bündelungsstufen wird dabei **durch die Stelle** zum Ausdruck gebracht: Ganz rechts notiert man die Anzahl der Einheiten (Würfel), dann links daneben die Anzahl der Stangen usw. Die Schreibweise ist ohne die Null nicht möglich. (Die Inder definieren sich neuerdings als Erfinder der Null!)

Ergebnis im Beispiel: 20431

Math. Grundlage:

Satz von der Zerlegung mit Rest:
Gegeben sei eine Basis $b \geq 2$ (nat. Zahl). Dann gibt es zu jeder ganzen Zahl z zwei eindeutig bestimmte weitere ganze Zahlen q und r, so dass
$z = q \cdot b + r$, wobei $0 \leq r < b$ gilt.

Der Satz stellt sicher, dass die durch fortgesetzte Bündelung entstehenden Ziffern des b-Systems eindeutig festgelegt sind.

Beweisschritte ($z \geq 0$):

1. Man zeigt, dass es mindestens eine solche Zerlegung gibt.

   Die Folge 0, b, 2b, 3b, ... überschreitet z:
   Daher gibt es ein kritisches q, bei dem $q \cdot b \leq z$, aber $(q + 1) \cdot b > z$ ist. Man definiert $r := z - q \cdot b$.

2. Man beweist, dass keine zwei verschieden Zerlegungen gemäß Aussage des Satzes existieren können.

   Der Satz wird nur für nichtnegative z benötigt. Man beweist zuerst diesen Fall und kann dann bei $z < 0$ hierauf zurückführen.

3. Operationsbegriffe und Gesetze

Die algebraischen Gesetze und die Operationsbegriffe sind systemunabhängig:

Operationsbegriffe (z.B. Zahlen als Kardinalzahlen):

Addition:	hinzufügen, Operator: "Lege 3 dazu!"; zusammenfassen
Subtraktion:	wegnehmen; Operator: "Nimm 3 weg!" passenden Summanden suchen Unterschied feststellen
Multiplikation:	zeitlich sukzessiv: 3mal nacheinander je 4 Dinge holen räumlich simultan: 3mal je 4 Dinge sind gelegt, Feld Operator: "Für 1 gib 4!" kombinatorisch: aus 3 Dingen Sorte A und 4 Dingen Sorte B alle möglichen geordneten Paare (a | b) bilden
Division:	aufteilen: in gleich große Teilmengen zerlegen verteilen: gerecht verteilen passenden Malnehmer suchen Operator: "Für 4 gib 1!"

4. Schrittweises Rechnen auf der Basis von 1+1 und 1·1

Anschauungshilfen wie im Dezimalsystem:
20er Feld, 20er Reihe, 100er-Feld, 100er-Tafel, Punkt-Strich-Quadrat-Darstellung

<u>Basis</u>:
Einspluseins

Bedeutung des 10er-Übergangs bei Addition und Subtraktion, hierbei halbschriftliche Formen möglich

(Beispiele!)

Einmaleins

Verwendung von Stützaufgaben: $1 \cdot a$, $2 \cdot a$, $10 \cdot a$ bei der Gewinnung der Ergebnisse
Das Verdoppeln als Strategie hilft nur, wenn die entsprechende Additionsaufgabe als Fertigkeit beherrscht wird, die Nachbarschaftsbeziehung ist sonst leichter anzuwenden, z.B. Berechnung $4 \cdot 3$:

$2 \cdot 4 = 13$, daher $4 \cdot 4 = 13 + 13 = 31$
$10 \cdot 4 = 40$, daher $4 \cdot 4 = 10 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 40 - 4 = 31$

Basiswissen: $10 - 4 = 1$ und $10 - 1 = 4$ (Rechnen bis 10)

Benutzt: Distributivgesetz (Nachbar): $(n - 1) \cdot a = n \cdot a - 1 \cdot a$

<u>Weiteres (schrittweises) Rechnen</u>:

Umkehraufgaben zu 1+1 und 1·1:

Lösung ohne Anschauungshilfe möglich als Umkehrung:
passenden Summanden oder Malnehmer suchen;
bei Division auch Rückführung auf (wiederholte) Subtraktion

Schrittweises Lösen zweischrittiger einfacher Aufgaben:

Zuerst mit, dann ohne Notieren der Teilaufgaben

Schrittweises Lösen schwierigerer Aufgaben mit Notieren:

"halbschriftliches" Rechnen: Zeilenform, Operatorform

5 Schriftliches Rechnen in vorgeschriebener Normalform

<u>Addition</u>:
Aufgabe: 2132 + 3214

<u>Vorphase</u>: Mit Material (s.o.) handelnd lösen:
legen, zusammenschieben, bündeln (und wechseln), ablesen

<u>Hauptphase</u>: Handlung und Notation schrittweise parallel

Handlungsprotokoll	Schriftliche Notation
➔	
beide Zahlen mit Material untereinander darstellen	Aufgabe korrekt notieren, Zahlen untereinander, Platz für Behalteziffer

		BS	B	P	S	E
2B 1P 3S 2E			2	1	3	2
3B 2P 1S 4E	+		3	2	1	4

Handlungsprotokoll	Schriftliche Notation
➔	
2B 1P 3S 2E	
3B 2P 1S 4E	
Einer zusammenfassen und bündeln, mit wechseln in höheren Stellenwert	Einer addieren

		BS	B	P	S	E
2B 1P 3S			2	1	3	2
3B 2P 1S 11E = **1S** + **1E**	+		3	2	1	4
					1	
						1

➔

Stangen zusammenfassen und bündeln (mit wechseln)

2B 1P
3B 2P 10S = **1P + 0S** **1E**

Stangen addieren

	BS	B	P	S	E
		2	1	3	2
+		3	2	1	4
			1	1	
				0	1

➔

Platten zusammenfassen und bündeln (mit wechseln)

2B
3B **4P 0S 1E**

Platten addieren

	BS	B	P	S	E
		2	1	3	2
+		3	2	1	4
			1	1	
			4	0	1

➔

Blöcke zusammenfassen und bündeln (mit wechseln)

10B = 1BS + **0B** **4P 0S 1E**

Ergebnis: **1BS 0B 4P 0S 1E**

Blöcke addieren

	BS	B	P	S	E
		2	1	3	2
+		3	2	1	4
			1	1	
	1	0	4	0	1

<u>Subtraktion</u>:
Aufgabe: 441 – 223 Frage: "Wie groß ist der Unterschied?"

Vorphase: Unterschied mit Material legen. Entfällt im Beispiel wegen vorgeschriebenen Ergänzungsverfahrens mit Verbot der "Borgetechnik". Gleiches Vergrößern künstlich, Rechentrick!

Hauptphase: Handlung und Notation schrittweise parallel

Handlungsprotokoll	Schriftliche Notation
➔	
beide Zahlen mit Material untereinander darstellen	Aufgabe korrekt notieren, Platz für Behalteziffer
	B P S E
4P 4S 1E	4 4 1
2P 2S 3E	– 2 2 3
➔	
Einer ergänzen: nicht möglich; lege 10E zur oberen und 1S zur unteren Menge: "Erweitern" der Aufgabe	Einer ergänzen, **vorher** 10E zur oberen, 1S zur unt. Zahl: **Rechentrick!**
	B P S E
4P 4S 1E 10E	4 4 1^{10}
2P 2S 1S 3E	– 2 2 3
	1
3E	3
➔	
Stangen ergänzen:	Stangen ergänzen
	B P S E
4P 4S 1E 10E	4 4 1^{10}
2P 2S 1S 3E	– 2 2 3
	1
1S 3E	1 3
➔	
Platten ergänzen:	Platten ergänzen

4P	4S	1E	10E
2P	2S 1S	3E	
2P	**1S**	**3E**	

$$
\begin{array}{rcccc}
 & B & P & S & E \\
\hline
 & & 4 & 4 & 1^{10} \\
- & & 2 & 2 & 3 \\
 & & & {}^{1} & \\
\hline
 & & 2 & 1 & 3
\end{array}
$$

<u>Multiplikation</u>:

Aufgabe: 3 · 243 (Malnehmer einstellig)

Vorphase: Mit Material lösen: 243 darstellen, Einer, Stangen, Platten je mit 3 vervielfachen (für eines gib drei), bündeln mit wechseln, Ergebnis ablesen

Hauptphase: Handlung und Notation schrittweise parallel, Stellenwertordner nur am Anfang.

Handlungsprotokoll	Schriftliche Notation
➔	
Zahlen mit Material darstellen, Operator auf Karte: 3•	Aufgabe korrekt notieren, **Malnehmer an 2. Stelle**
	B P S E
2P 4S 3E	2 4 3 • 3
	B P S E
➔	
Einer verdreifachen	Einer mit 3 malnehmen
	B P S E
2P 4S 14E = 1S + **4E**	2 4 3 • 3
	B P S E
	1
	4
➔	
Stangen verdreifachen, Nur Stangen der Ausgangsmenge	Stangen 3mal nehmen
	B P S E
2P 22S = 2P + 2S 1S **4E**	2 4 3 • 3
⇒ 2P 2P **3S** **4E**	B P S E
	2 1
	3 4
➔	
Platten verdreifachen, Nur Platten der Ausgangsmenge	Platten 3mal nehmen
	B P S E

11P = 1B + 1P $\qquad$ 2P **3S 4E**

$\Rightarrow$ **1B 3P 3S 4E**

2	4	3	•	3	
	B	P	S	E	
		2	1		
	1	3	3	4	

Malnehmer zweistellig: 23 · 243
Zerlegen des Operators 23 erforderlich (Distr. u. Ass.-Gesetz):
23 · 243 = 10 · (2 · 243) + 3 · 243
Schritte: (1) Malnehmen mit 2; das Ergebnis mit 10
(2) Malnehmen mit 3
(3) Ergebnisse (1) und (2) addieren

2	4	3	.	2	3	Kommentar zur Rechnung
		1	1			
	1	0	4	1		2mal

2	4	3	.	2	3	
		1	1			
	1	0	4	1	0	2mal, Ergebnis 10mal

2	4	3	.	2	3	
		1	1			
	1	0	4	1	0	2mal, Ergebnis 10mal
			2	1		
		1	3	3	4	3mal

2	4	3	.	2	3	
		1	1			
	1	0	4	1	0	2mal, Ergebnis 10mal
			2	1		
		1	3	3	4	3mal
		1				
	1	2	2	4	4	zusammenrechnen

<u>Division</u>:

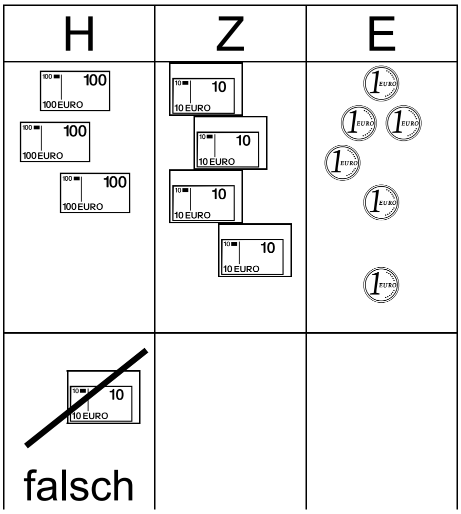
Aufgabe: 4324 : 3

Vorphase: Mit Material handelnd lösen:
Deutung als Verteilen (3 gleich große Teilmengen erzeugen);
möglich auch: Anwenden des Operators "für 3 gib 1" (Register)
Ablauf (Systemblöcke)
➔Zahl mit Material legen: 4B 3P 2S 4E
➔Blöcke verteilen, Rest festellen:
Zu verteilen: 4B
für 4B verteilt an 3: **jeder erhält 1B**; übrig bleibt 1B = 10P
➔Platten verteilen, Rest festellen:
Zu verteilen: 13P
13P verteilt an 3: **jeder erhält 2P**, denn 3 · 2P = 11P;
übrig bleiben 2P = 20S
➔Stangen verteilen, Rest festellen:
Zu verteilen: 22S
22S verteilt an 3: **jeder erhält 4S**, denn 3 · 4S = 22S;
übrig bleiben keine Stangen
➔Einzelne verteilen, Rest festellen:
Zu verteilen: 4E
4E verteilt an 3: **jeder erhält 1E**, **übrig bleibt 1E**
Ergebn.: 1B 2P 4S 1E, Rest 1E ("müßte noch vert. werden")

Hauptphase:
Handlung und Notation schrittweise parallel, Notation zunächst mit Stellenwerten, später wegfallend.

	B	P	S	E	B P S E	Verteilen der
	4	3	2	4	: 3 = 1 2 4 1 + 1 : 3	Blöcke
–	3					
	1	3				Platten
–	1	1				
		2	2			Stangen
	–	2	2			
			0	4		Einzelne
			–	3		
				1		Rest Einzelne

Bündeln erfordert zugleich Wechseln
(anschauliche Hilfe für die Kinder)



➔Malnehmer Zehnerzahl, 20mal als "2mal, dann das Ergebnis 10mal"

Verdeutlichung des Assoziativgesetzes der Multiplikation:
z.B. verkürztes Feld bei 20 · 243:
OOO...OOO (z.B. für 243)
OOO...OOO (z.B. für 243)
2mal
OOO...OOO (z.B. für 243)
OOO...OOO (z.B. für 243)
4mal
OOO...OOO (z.B. für 243)
OOO...OOO (z.B. für 243)
6mal

... usw. bis

20mal

Ergebnis:
20 · 243 = 10mal (2· 243)
Malnehmen mit 10 als selbständiger Schritt, Null wird stets geschrieben,
Zusammenhang zwischen Malnehmen mit 10 und "Nullanhängen" anschaulich begründen (Rechengeld, Systemblöcke)

Große Zahlen und Zehnersystem

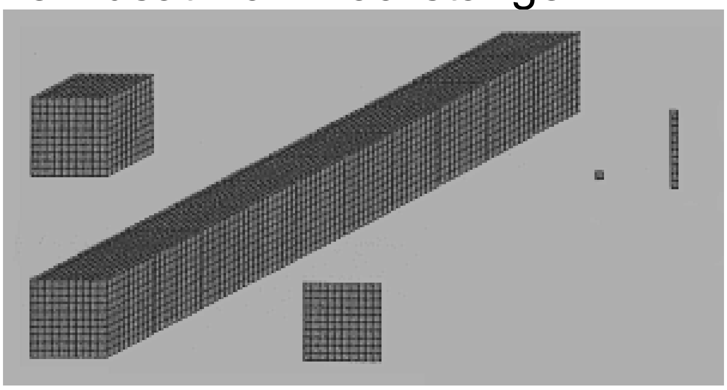
1. Stufen der Zahlerfassung und Anschauungsmittel

① Klasse 3: Bereich bis 1 000:
Aufbau *deutlicher Mengenvorstellungen* bis 1 000 als Basis für *formalere Systemvorstellung* bei größeren Zahlen

Anschauungsmittel:
1 000er Feld aus 10 Hunderter-Feldern
Ikonische Darstellung: Punkt-Strich-Quadrat
Rechengeld
Meterstab als Zahlenstrahl bis 1 000, Einheit 1 mm
10-Meter-Band als Zahlenstrahl bis 1000, Einheit 1 cm
Im Heft:
10 cm als Zahlenstrahl bis 1 000, nur noch Zehner genau erfaßbar
System-Blöcke: Einzelnes, Stange, Platte, Block; noch konkret-handelnd verwendbar
abstraktere Form: Piktogramm, z.B. 1 Symbol für 100

② Klasse 4: bis 1 000 000 (und darüber)

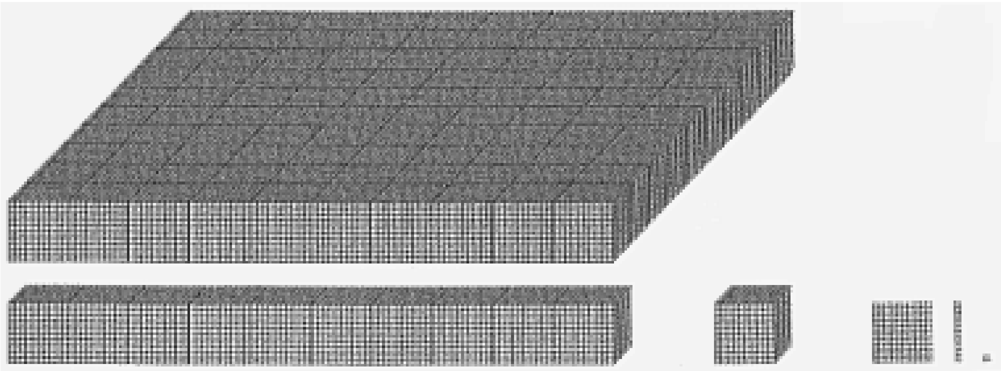
bis 10 000:
Piktogramme mit größerer Symboleinheit
Ikonische Darstellung: Punkt-Strich-Quadrat-Streifen
10-Meter-Band als 10 000 mm
im Heft: 10 cm als Zahlenstrahl bis 10 000
System-Blöcke: zusätzlich Blockstange



über 10 000:

Mengen dieser Anzahl *nur noch als Vielfaches einer noch vorstellbaren Menge zu erfassen*

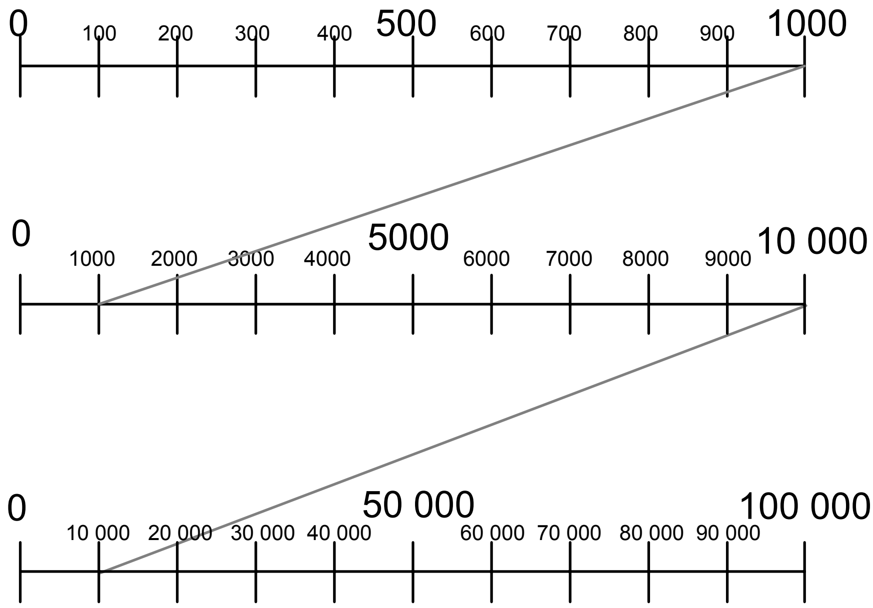
System-Blöcke



Piktogramme mit größerem Wert der Symboleinheit

10 cm als Zahlenstrahl bis 100 000

Zahlenstrahl-Lupe



analog bis 1 Million

Die Lupe stellt die Beziehung her zum durchgearbeiteten Bereich bis 1 000.

Stellentafel bis $\geq$ 1 000 000

HM	ZM	M	HT	ZT	T	H	Z	E
		3	2	1	9	1	0	3

Neue Abkürzungen einführen: ZT HT M ZM HM
Hinweis: Nach DIN ist als Abkürzung für Million "Mio." vorgeschrieben. Dies ist für die Grundschule unpraktisch, wird daher meist *nicht verwendet*!

Schreibweise (*Ziffernform*):
3 219 103 (Dreiergruppierung mit Lücke, kein Punkt!)

Sprechweise:
Der niedrigste Stellenwert der jeweiligen Gruppe liefert die Bezeichnung
"3 **Millionen** 219 **Tausend** 103"

Sprechform schreiben lassen:
3 M 219 T 103

Übersetzung von/in Ziffernform, Sprechform, Stellentafel

- **Umwandeln von Stufenzahlen**

  a) einstufig

  1H = $\boxed{}$ Z

  1H = $\boxed{}$ E

  b) zweistufig

  3T 2H = $\boxed{}$ H

  3H 4Z = $\boxed{}$ Z

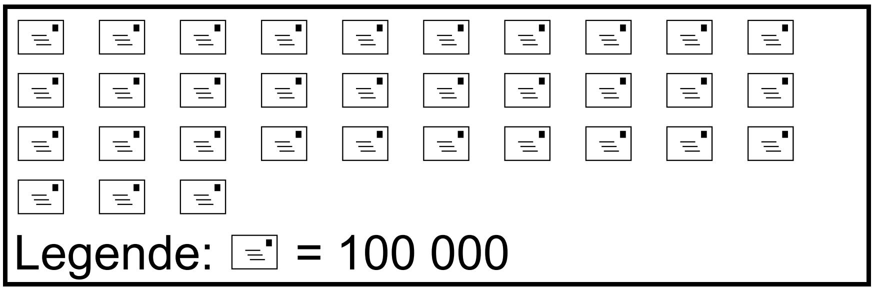
  5Z 2E = $\boxed{}$ E

  c) dreistufig

  1T 3H 4Z = $\boxed{}$ Z

analog mit größeren Stufenwerten

z.B. Piktogramm für 3 259 103 Briefe:



- **Ordnungsübungen**

Zahlen würfeln, die größte Zahl gewinnt!
Normaler Würfel, gut geeignet auch: Ziffernwürfel 0 bis 9
z.B. Drei Kinder würfeln je 6mal, schreiben Wert nach Wahl in eine Stellentafel

Setze das richtige Zeichen (< >) z.B.

2 518 $\boxed{}$ 2 630

Der höchste Stellenwert mit ungleichen Ziffern entscheidet !!

- **Schrittweises Ergänzen zum nächsten Tausender (ZT, HT)**

z.B. Zeilenform

3 122 + $\boxed{}$ = 4 000

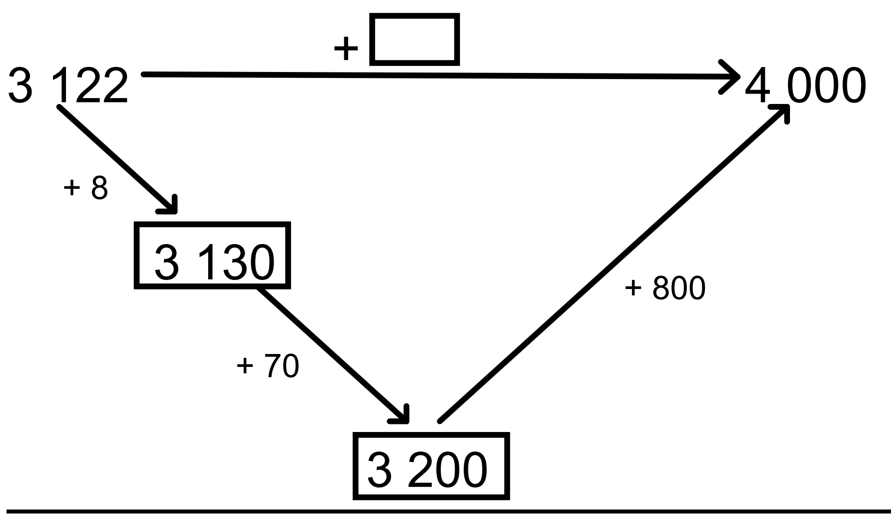
---

3 122 + 8 = 3 130
3 130 + 70 = 3 200
3 200 + 800 = 4 000

---

3 122 + 878 = 4 000

alternativ: Operatorbild



- **Division (ohne Rest):**

5 384 : 8

5 384	:	8			Wähle eine zu 8 passende
4 800	:	8	=	600	Hunderterzahl
584					
560	:	8	=	70	Zehnerzahl
24	:	8	=	3	(Einerzahl)
5 384	:	8	=	673	

- **Division (mit Rest):**

5 388 : 8

5 388	:	8			Wähle eine zu 8 passende
4 800	:	8	=	600	Hunderterzahl
588					
560	:	8	=	70	Zehnerzahl
28					
24	:	8	=	3	Einerzahl
4				REST	
5 384	:	8	=	673 + 4 : 8	

Division mit Rest (Versch. Schreibweisen)

Vor- und Nachteile verschiedener Schreibweisen bei der Division mit Rest

(a) Restschreibweise

13:5=2 Rest 3

Contra:

Vorwurf: *mathematisch nicht exakt*:

- Gleichheitszeichen wird nicht korrekt im Sinne der mathematischen Identität benutzt:
  linker Ausdruck in **N** nicht definiert,
  rechter Ausdruck mehrdeutig: 2<2 Rest 3≤2,75
- Verstoß gegen *Transitivität des Gleichheitszeichens*:
  13:5=2 Rest 3 und 15:6=2 Rest 3,
  also 13:5=15:6

Pro:

- Gleichheitszeichen wird *dynamisch* im Sinne der *Aufgabe-Ergebnis-Vorstellung* verwendet →Beschreibung eines Handlungsablaufes
- *kontextsensitiver* Ausdruck
- nahtloser Übergang zur Bruchschreibweise möglich
- Division als *eigenständige Rechenoperation* bleibt erkennbar.
- gewöhnlich im *außerschulischen Umfeld*

(b) Zerlegungsschreibweise
13:5, 13=5·2+3
mathematisch exakt, aber

- *fehleranfällig*: z.B. statt 13=5·2+3 erscheint 13:5=2+3
  →kontraproduktiv
  Schreibaufwand durch Umschreiben in multiplikative Form
- *Ergebnis nicht eindeutig erkennbar*, da in der Mitte der Aufgabe
- Lösung von *Sachaufgaben* erfordert eindeutiges Erkennen der zugrundeliegenden Rechenoperationen. Bei der Zerlegungsschreibweise ist aber nicht mehr erkennbar, dass dividiert wurde.
- nur benutzbar bis zur 6. Klasse, dann Bruch- also Divisionsschreibweise
- Division *nicht mehr als eigenständige Rechenoperation* bleibt erkennbar.
- Kenntnis von *Punkt-vor-Strich-Regel* notwendig

(c) Divisionsschreibweise

13:5=2+3:5 oder 13:5=2+(3:5)

Pro:

- Division *als eigenständige Rechenoperation* bleibt erkennbar.
- *Ergebnis und Aufgabe* klar getrennt
- gute Vorarbeit für Bruchschreibweise

Contra:

- Die beiden Divisionszeichen sind verwirrend
- Lösung enthält neue, unlösbare Aufgabe
- komplizierter Term
- *Punkt-vor-Strich-Regel* oder zusätzliche Klammern notwendig