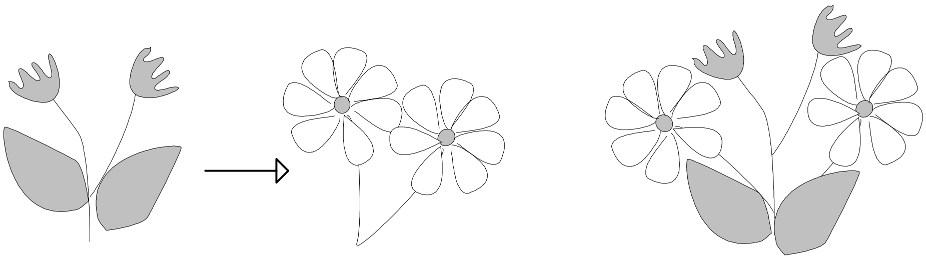
Addition:
Zu den Größen Repräsentanten suchen und diese zusammensetzen
Voraussetzung: Es handelt sich um Größen derselben Größenart.

Beispiel:
Die Summe von Einzelpreisen der Blumen eines Blumenstraußes *bedeutet* den Preis des Blumenstraußes (alle Blumen zusammmen).

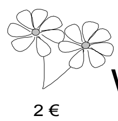
vorher nachher



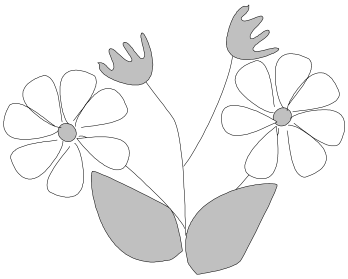
1 € + 2 € = 3 €

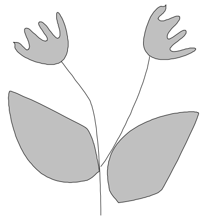
Subtraktion:
Zu der ersten Größe einen Repräsentanten suchen und zur zweiten einen *Teilrepräsentanten*, diesen dann abtrennen (wegnehmen)
Voraussetzung: Es handelt sich um Größen derselben Größenart.

Beispiel:
Eine Blume aus einem Blumenstrauß herausnehmen, wie hoch ist der Preis für den Rest des Straußes?



vorher wegnehmen nachher





3 € - 2 € = 1 €

„Die erlebte Wirklichkeit ... ist das Skelett, an das die Mathematik sich festsetzt“

(Freudenthal 1973, S. 77)

„Die letzten Weihnachtsferien begannen am 23.12.1977, das war der erste Ferientag. Die Weihnachtsferien endeten am 8.1.1978, das war der letzte Ferientag. Wie viele Tage dauerten die Weihnachtsferien?“

$$
\begin{array}{rrr}
 & 23. & 12. \\
- & 8. & 1. \\
\hline
 & 15 & 11.
\end{array}
$$

„Die Ferien dauerten 15 Tage und 11 Stunden.“

Versuchsgruppen Schuljahr/Gruppe	Kindergarten 1. Klasse	2. Kl.	3. Kl.	4. Kl.	3./4. Kl.	5. Kl.
%-Satz von Berechnungsversuchen	10,7	31,7	70,7	54	58,3	45,8

Konkrete Inhalte der ‘Größenlehre’ und Statistik sind:

- **Zählen/Messen/Schätzen als Methoden zum *Gewinnen von Daten* (Messwerten/Größen)**

- **Kennenlernen der Maßsysteme und verankern von Stützpunktwissen über Größen**

- **Modellieren, Zeichnen und Symbolisieren als Methoden des *Darstellens von Daten* (dabei auch ‘Sortenumwandlung’)**

- **Sortieren, Anordnen von Daten, Rechnen mit Größen (auch Mittelwerte bestimmen) als Formen der *Verarbeitung von Daten.***

EEE	EEH	EHH	HHH	HHS	HSS	SSS	SSZ	ZZZ
	EES	EHS		HHZ	HSZ		SZZ	
	EEZ	EHZ			HZZ			
		ESS						
		ESZ						
		EZZ						
	10	+		6	+	3	+	1=20

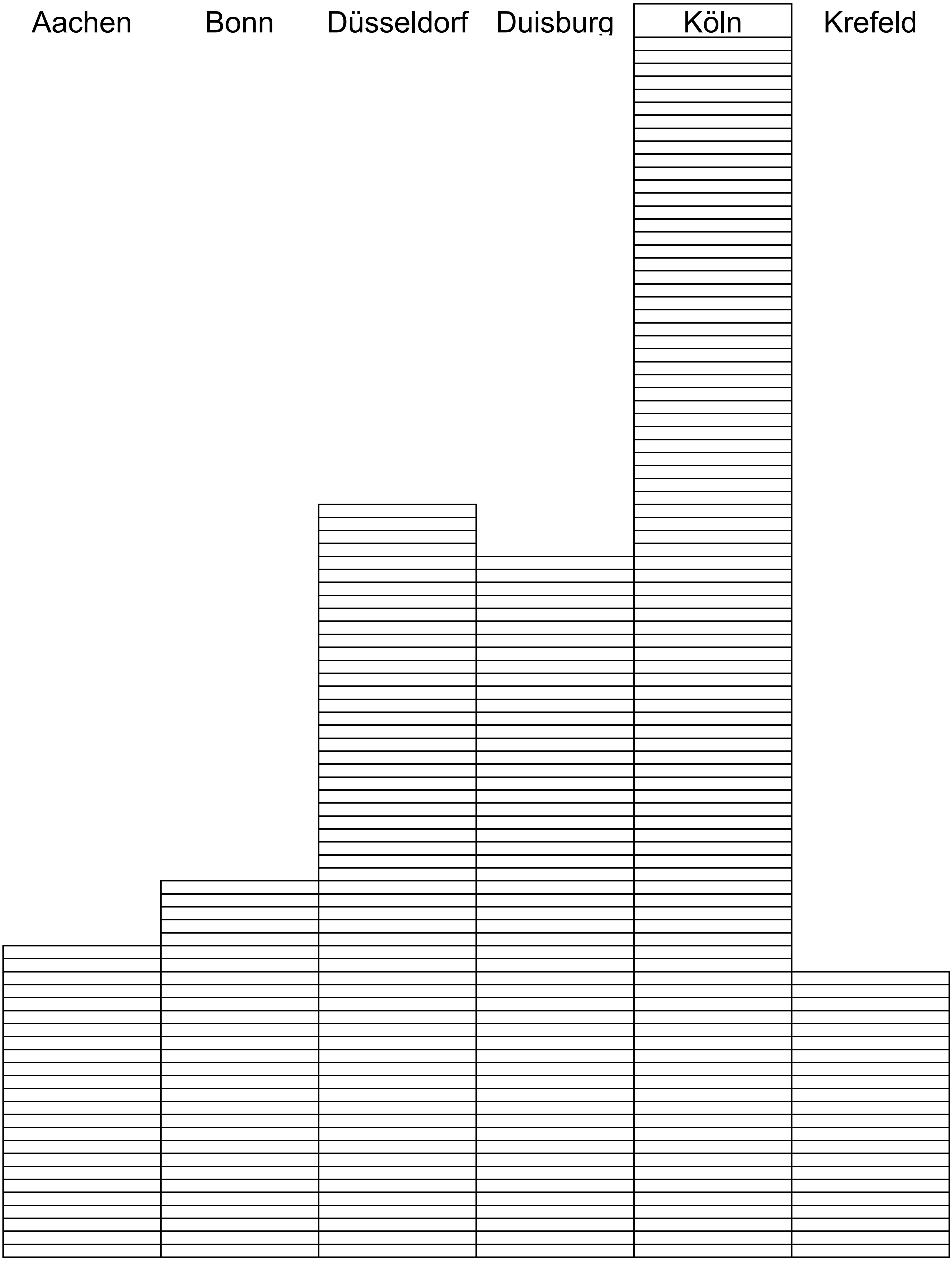
alle Möglichkeiten mit Erdbeereis

alle Möglichkeiten ohne Erdbeereis

Weiterführend:
Und wie viele Möglichkeiten gäbe es bei 5 Sorten und 3 Bällchen oder bei 4 Sorten und 4 Bällchen?

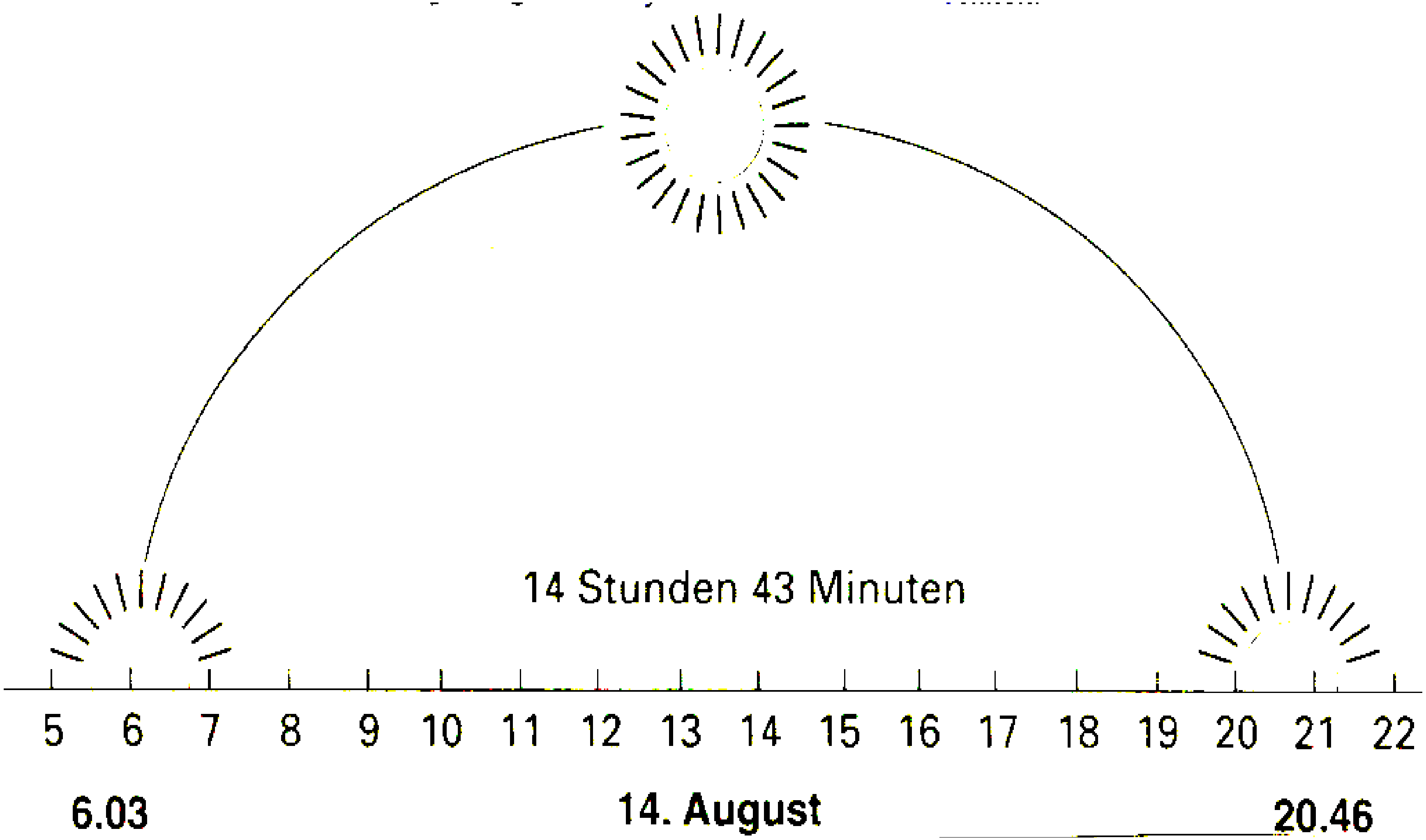
1 cm	Fingernagelbreite, Lesebuchdicke, Höhe eines Spielwürfels
10 cm	Daumen-Zeigefingerspanne, Länge eines Butterpakets, Breite einer Postkarte
1 m	großer Kinderschritt, Höhe der Wandtafel
10 m	4 mal Zimmerhöhe, Länge von zwei Parkplätzen hintereinander
100 m	Länge eines Fußballfeldes, doppelte Länge des Schwimmbeckens im Freibad
1 km	Weg, für den ich etwa 12 Minuten Gehzeit brauche (Entfernung Uni-Fußgängerzone (?)), 2½ mal um das Stadion
1 l	Milchflasche
10 l	großer Eimer
100 l	kleine Regentonne
1 g	Büroklammer
10 g	Brief, Bleistift
100 g	Tafel Schokolade
1 kg	ein Paket Zucker oder Mehl, 4 Stück Butter
1 t	PKW
6 t	Elefant
10 t	LKW
100 t	Lokomotive
130 t	Blauwal

Aachen	**244000**
Bonn	**293000**
Düsseldorf	**580000**
Duisburg	**542000**
Köln	**953000**
Krefeld	**222000**

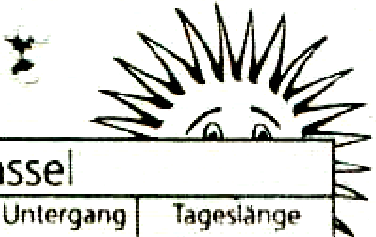


‘Sachrechnen als Lernstoff’

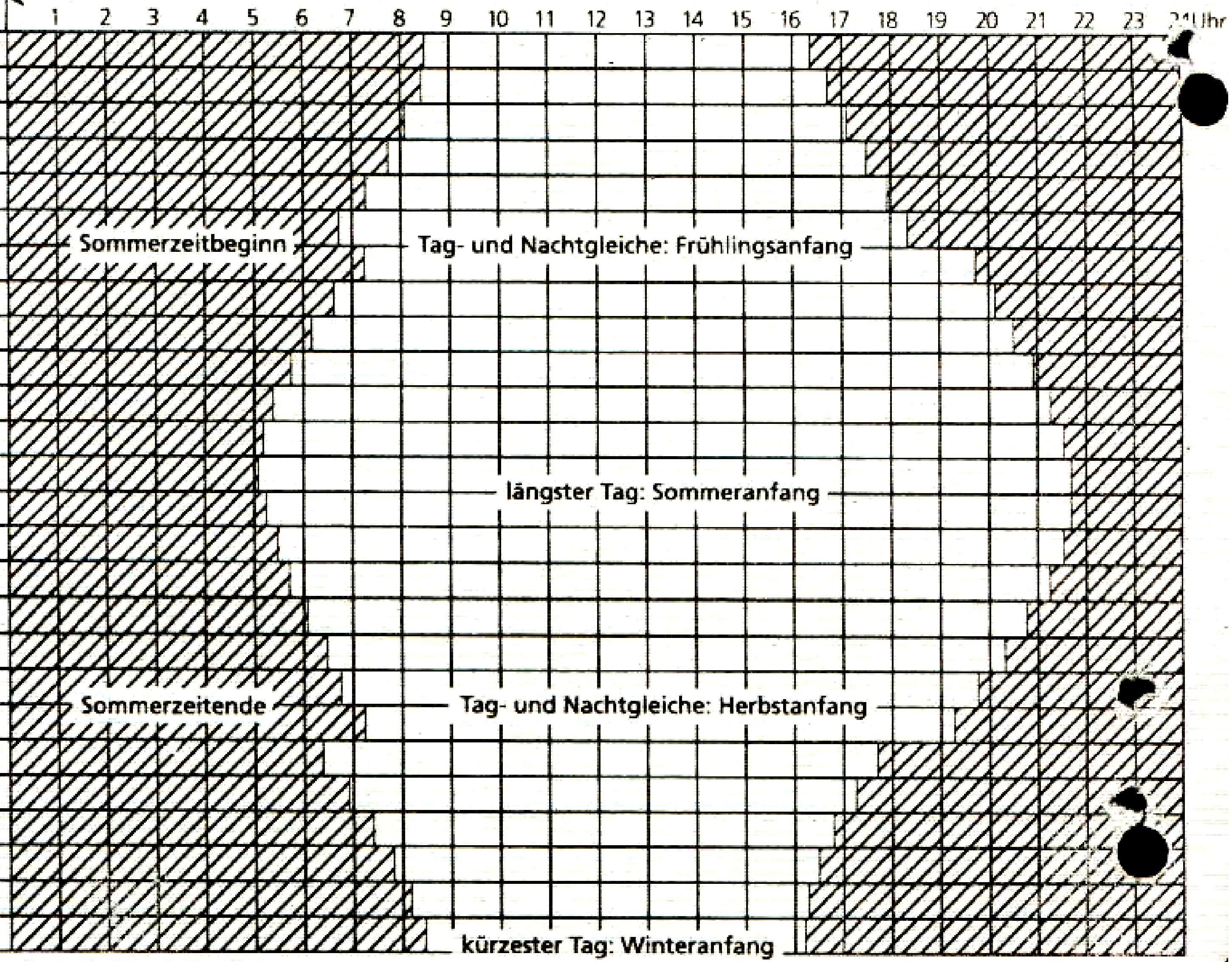
Insgesamt geht es also beim ‘Sachrechnen als Lernstoff’ darum, Wissen über Größen und Fertigkeiten im Umgang mit Größen aufzubauen. Diese Bemühungen ergeben aber nur Sinn, wenn sie im Rahmen einer allgemeineren pädagogischen Zielsetzung erfolgen, nämlich sachrechnerische Fähigkeiten als Beitrag zur Denkentwicklung der Schüler und zur Erschließung ihrer Umwelt anstreben.


14 Stunden 43 Minuten
5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
6.03
14. August
20.46

Tageslängen im Jahreslauf



Kassel				
Datum	**Aufgang**	**Untergang**	**Tageslänge Std**	**Min**
1. Jan.	8.27	16.23	7	56
15. Jan.	8.21	16.42	8	21
29. Jan.	8.06	17.05	8	59
12. Feb.	7.42	17.31	9	49
26. Feb.	7.15	17.56	10	41
12. März	6.45	18.20	11	35
26. März	7.13	19.44	12	31
9. April	6.41	20.07	13	26
23. April	6.12	20.30	14	18
7. Mai	5.45	20.54	15	09
21. Mai	5.24	21.14	15	50
4. Juni	5.09	21.32	16	23
18. Juni	5.05	21.41	16	36
2. Juli	5.10	21.41	16	31
16. Juli	5.23	21.32	16	09
30. Juli	5.42	21.14	15	32
13. Aug	6.03	20.49	14	46
27. Aug.	6.25	20.21	13	56
10. Sept.	6.48	19.49	13	01
24. Sept.	7.10	19.18	12	08
8. Okt.	6.33	17.46	11	13
22. Okt.	6.57	17.16	10	19
5. Nov.	7.21	16.50	9	29
19. Nov.	7.45	16.29	8	44
3. Dez.	8.06	16.17	8	11
17. Dez.	8.22	16.14	7	52



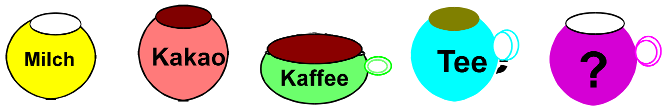
München

Datum	Aufgang	Untergang	Tages Std.	länge Min.
1. Jan.	8.04	16.30		
15. Jan.	7.59	16.47		
26. März	7.06	19.35		
18. Juni	5.13	21.16		
2. Juli	5.28	21.17		

Hamburg

Datum	Aufgang	Untergang	Tages Std.	länge Min.
1. Jan.	8.37	16.10		
15. Jan.	8.28	16.31		
26. März	7.14	19.44		
18. Juni	4.50	21.51		
2. Juli	4.56	21.52		

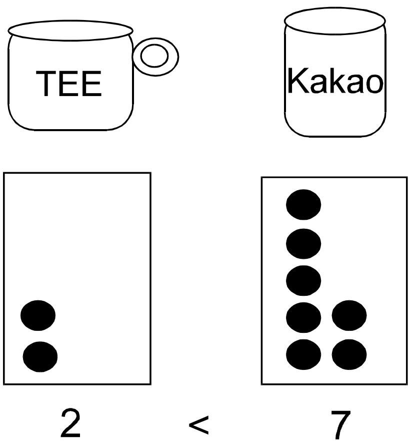
Ein mögliches konkretes Vorgehen wäre die Befragung der Klasse:
„Was trinkst du am liebsten morgens zum Frühstück?"



Möglicherweise müssen sich die Kinder schweren Herzens für eines entscheiden.
In der Klasse entstehen nun Grüppchen, und es muss diskutiert, verglichen und gezählt werden!

*„Wozu gehören viele, wenige, sehr viele, vielleicht fast alle?
Warum ist wohl ... so beliebt? Wie viele Teetrinker, Milchtrinker, ... haben wir? Ist die Zahl der Kakaotrinker viel größer als die Zahl der Teetrinker? usw."*

Mit Feldern und Plättchen kann die Situation modelliert und sprachlich und symbolisch dargestellt werden, z.B.:



„nur 2 Teetrinker, aber 7 Kakaotrinker!“; „viel weniger Teetrinker als Kakaotrinker“; großer Unterschied in den Zahlen, hier nur 2 dort 7!“.

Hier kann der Lehrer die normierte Sprache einführen:

$$2 < 7$$

Begriffliche Zusammenhänge in realen Situationen (Beispiele)

Eigenschaftsbegriff 'Primzahl'

Gruppe(Menge) von Kindern, die beim Sport in *gleich starke* Riegen(Teilmengen) aufgeteilt werden sollen.

z.B. 17 Kinder ⇒ entweder Einer-Riegen oder eine Siebzehner-Riege

'Stellenwertsystem'

Verpackungssituation: 10 einzelne Eier werden zu je einer 10er-Packung von Eiern, 10 10er-Packungen je zu einer 100er-Kiste usw. zusammengefaßt.

324 Eier: 3 Hunderterkisten plus 2 Zehnerpackungen plus 4 Einzelne

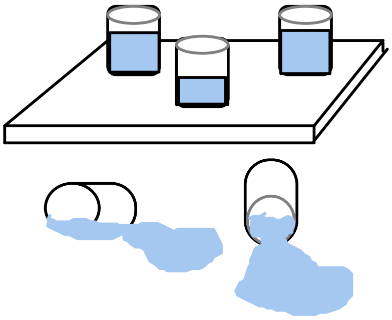
Gesetz von der 'wiederholten Subtraktion a-b-c = a-(b+c)

„Soll ich nacheinander zwei Zahlen subtrahieren (abziehen), so kann ich statt dessen auch deren Summe auf einmal subtrahieren."

Beim Geldausgeben:

Es ist für den Endbetrag egal, ob ich von meinem ursprünglichen Betrag von 89 DM zuerst hier 18 DM und dann dort 25 DM oder auf einmal 18 DM + 25 DM = 43 DM ausgebe,

also 89 - 18 - 25 = 89-43



Wenn z.B. ein Kind der 1. Klasse dieses Bild
mit dem Subtraktionssatz 5-2 = 3 verbinden soll, so muß es neben dem Verständnis der Alltagssituation (Von einem Tablett fallen Gläser herunter, vielleicht weil der Kellner angerempelt wurde) auch arithmetisches Wissen heranziehen, in die Situation hineinsehen.

Eine Alltagssituation läßt sich natürlich um so besser für mathematische Inhalte ausnutzen, je mehr sie begrifflich ausgebeutet werden kann und nicht nur einen eng umgrenzten, singulären und unbeweglichen Sachverhalt darstellt.
Die 'Gläserunfall-Situation' z.B. steht für viele Subtraktionserfahrungen:
Je mehr Gläser herunterfallen, desto weniger bleiben oben stehen. (Je größer die Zahl ist, die subtrahiert wird, desto kleiner ist das Ergebnis bei fester Ausgangszahl.)
Wenn wir für jedes heruntergefallene Glas ein neues auf das Tablett stellen, dann haben wir wieder so viele wie vorher (Umkehraufgabe; Zusammenhang von Subtraktion und Addition z.B. 5 -2 = 3 $\leftrightarrow$ 3 + 2 = 5) usw.

Sachrechnen als Lernprinzip bedeutet die Ausnutzung von Bezügen zur Realität für das Lernen mathematischer Begriffe und Verfahren, um die Motivation der Schüler für das Lernen zu erhöhen, ihr Verständnis zu fördern und ihre Kenntnisse und Fertigkeiten besser zu verankern und zu stabilisieren.

Mathematisieren einer Sachsituation:

1. Situation wahrnehmen, Muster erkennen, durch Zählen, Messen, Schätzen Daten (Meßwerte, Größen) gewinnen, Fragen entwickeln,

2. Modell entwerfen, evtl. weitere Daten beschaffen, Daten durch Zeichnungen, Skizzen oder in Tabellen übersichtlich darstellen,

3. im Modell Informationen durch Anordnen und Sortieren von Daten, Rechnen mit Größen, ... verarbeiten, Fragen im Modell lösen,

4. gewonnene Modellösung auf die Situation zurückübertragen und bewerten, Tragweite des Modells erkunden.

Stufe 1: *„Welche Aufgaben, welche Fragen könntest du hier stellen? Was fällt auf? Hast du eine Erklärung“*

Stufe 2: *„Was ist die Hauptsache? Wie hängen die Sachen untereinander zusammen? Wie kannst du dir den Zusammenhang klar machen? Wie kannst du die Sache darstellen?“*

Stufe 3: *„Wie kannst du möglichst geschickt das Ergebnis, die Ergebnisse abschätzen/bestimmen/ausrechnen/zeichnen/darstellen...?“*

Stufe 4: *„Wo gibt es so etwas Ähnliches? Wo kannst du das Gelernte auch noch benutzen? Was kannst du jetzt auch besser verstehen?“*

Heurismen:

- Texte gliedern, verdeutlichende Skizze anlegen, Skizzen deuten,
- Tabellen herstellen und lesen,
- eine Situation umdeuten,
- eine Vermutung testen,
- ein Ergebnis abschätzen usw.

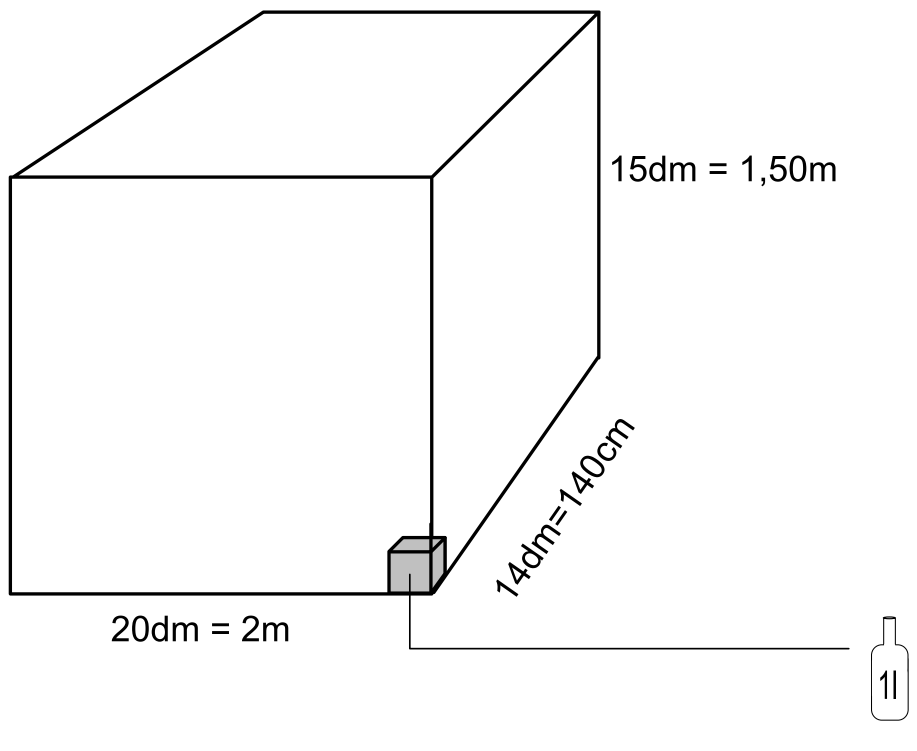
Sachkundliche Situationen nach verschiedenen Gesichtspunkten:

- Authentizität (unmittelbar aus dem Leben gegriffen - fingiert, frisiert (fiktiv)),
- Zugänglichkeit (direkt beobachtbar - durch Medien vermittelt),
- Reichhaltigkeit (offen für viele verschiedene Fragestellungen - eingeengt auf eine Frage),
- Lebensnähe (direkt im Leben verwertbar - eher von theoretischem Interesse),
- Schwierigkeit bei der Modellbildung (erfordert mehrere Umstrukturierungen - läßt sich auf Routinefall reduzieren).

Zusammenfassung:
Umwelterschließendes Sachrechnen ist nicht ein methodisches Detail, sondern ein anpruchsvolles, voraussetzungsreiches didaktisches Programm, in das tiefere Dimensionen pädagogischen Arbeitens eingehen: die übergeordneten Ziele des Mathemaikunterrichts (sein möglicher Beitrag zur Entfaltung der Kreativität und zur Sensibilisierung für die Probleme unserer Welt) und das Bild, das man vom Menschen und menschliches Lernen hat.

- Wieviel Wasser verbraucht denn eine Person pro Woche, Monat, Jahr?

Der wöchentliche Wasserverbrauch für einen 4-Personen Haushalt beträgt 4200 l, das sind 4200 l-Flaschen, mehr als 10 Badewannen voll, ... , 4200 l entsprechen 4200 Würfel (10cmx10cmx10cm), das ergibt einen Wasserquader von 2 m Länge, 1,40 m Breite und 1,50 m Höhe. Die Maße des Quaders gibt der Lehrer vor, die Kinder begründen dann die Maße.



- Welche Bedeutung hat das Wasser für das Leben der Menschen?
- Sauberes Wasser ist immer schwerer zu bekommen; welche Möglichkeiten gibt es Wasser einzusparen?
- Wasser sparen spart auch Geld. Wie hoch ist die Jahres-rechnung für einen 4-Personen Haushalt?

Das Thema bietet viele weitere Aspekte.

	Zwei Züge fahren				
Gegebene Daten ordnen	wo ab?	wann ab?	wohin?	wie schnell?	wie lange?
	von einem Bahnhof	zur gleichen Zeit	in entgegengesetzte Richtungen	der eine 80km pro Std, der andere 60km pro Std	1 1/2 Stunden lang
	Ort	Zeitpunkt	Zielrichtung	Geschwindigkeit	Zeitspanne
Einzelwissen, Alltagswissen erinnern	von derselben Stelle	zum selben Zeitpunkt	nach Osten, bzw. nach Westen	in einer Stunde eine 80 (60) km lange Fahrtstrecke	eine ganze Stunde und noch eine halbe dazu
Gesetzeswissen erinnern	Die Entfernung voneinander wird mit der Zeit größer. Entfernung besteht aus 2 Teilen: Weglänge des einen Zuges plus Weglänge des anderen von der Ausgangsstelle			Wenn man weiß, wie schnell und wie lange etwas fährt, kann man die Fahrtstrecke ausrechnen.	
Datenverarbeitung hinsichtlich der Fragestellung	Entfernung der Züge ist Fahrtstrecke des einen plus Fahrtstrecke des anderen Zuges			Nach 1 1/2 Std hat der eine Zug 80km+40km=120km, der andere 60km+30km=90km zurückgelegt.	
Frage	?Wie weit sind die beiden Züge nach 1 1/2 Stunden voneinander entfernt?				
Gesuchte Lösung	120km + 90km = 210km Die Züge sind nach 1 1/2 Stunden 210km voneinander entfernt.				

AUFGABE

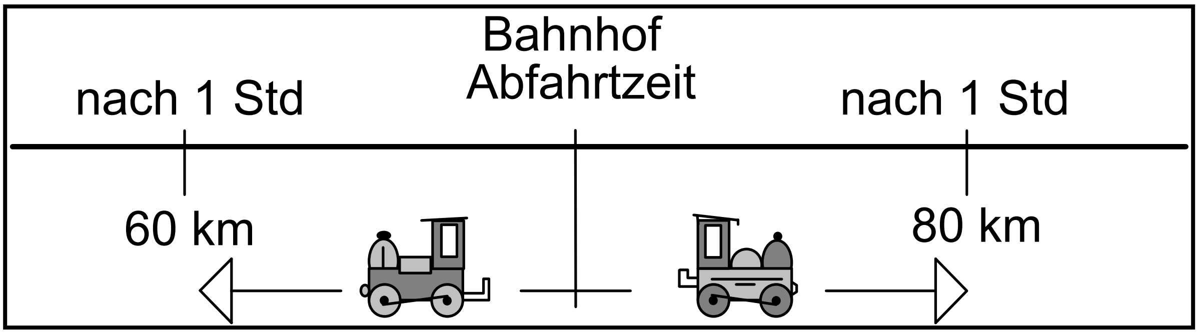
Auf einem Bahnhof fahren zur gleichen Zeit zwei Züge ab. Sie fahren in entgegengesetzte Richtungen. Der eine fährt pro Stunde 80 km, der andere fährt pro Stunde 60 km. Wie weit sind die beiden Züge nach $1^1/_2$ Stunden Fahrtzeit voneinander entfernt?

richtige Lösung	falsche Lösung	kein Lösungsversuch
357 (32%)	659 (59%)	104 (9%)

Hauptfehler:

Anzahl	Fehlerursache	Rechnung
166	Differenzbildung mit Fahrtzeitbeachtung	120km - 90km = 30km
67	Differenzbildung ohne Fahrtzeitbeachtung	80km - 60km = 20km
36	Angabe einer Fahrtstrecke	120km oder 90km
77	willkürliche Zahlenmanipulationen	80km + 60km = 140km $90 \cdot 80$km - $90 \cdot 60$km = 1800km 4800km = $80 \cdot 60$km 12600km = $90 \cdot 140$km ...

- allgemeines, unspezifisches Alltagswissen:
  "Bahnhof", "Zug", "abfahren", "voneinander", ...
- mathematisch-physikalisch durchsetztes Wissen:
  "80 (60) km pro Stunde", "zur gleichen Zeit", "Fahrtzeit"
- geometrisch durchsetztes Wissen:
  "entgegengesetzte Richtungen", "voneinander entfernt", ...
- spezifisches mathematisches Wissen:
  "$1\,^1/_2$Std = 1Std + $^1/_2$Std", "80km ist eine Längenangabe", ...
- Rechenfertigkeiten:
  Teilen durch 2, Vervielfachen mit $1\,^1/_2$, Addieren, ...
- Verständnis der Situation:
  Einzelheiten dürfen nicht beziehungslos nebeneinander bestehen bleiben, sondern müssen als strukturierte Ganzheit im Hinblick auf die Fragestellung aufgebaut werden.



Aufgabe
"Rolf und Manuela bewerfen sich mit Schneebällen. 18 fliegen daneben, 12 treffen. Rolf wird häufiger getroffen, als Manuela. Von wie vielen Schneebällen kann Rolf getroffen worden sein?"
3 Lösungen, die bei einem Test sehr häufig genannt wurden:

$$12 + 18 = 30 \; ; \; 12 : 2 = 6 \; ; \; \frac{12 + 6}{2} = 9$$

Aufgabe
In der Klasse 2b sind 26 Schüler. Davon sind 17 Mädchen.
Frage: Wie viele Kinder sind es?
Rechnung: 26 - 17 = 9
Antwort: Es sind 9 Mädchen.

Gründe für die mageren Erfolge des traditionellen Sachrechnens:

1. Es gab eine ausschließliche Beschränkung auf Rechenfälle des Lebens, die direkt mit den 4 Grundrechenarten zu lösen waren. Eine solche Einschränkung erlaubte es natürlich nicht, die wirkliche Vielfalt der Umwelt zu erfassen.

2. Die Umweltsituationen waren vorsortiert in Textaufgaben zum Addieren, Ergänzen, Zerlegen, Subtrahieren, Malnehmen, ... Die Schüler hatten daher kaum Gelegenheit, über eine Sachsituation wirklich nachzudenken, es war ja schon alles vorgegeben.

3. Vorherrschend waren Text und Rechnung. Die Möglichkeiten bildlicher Darstellung wurden in der Schulpraxis viel zu wenig genutzt.

4. Man erkannte nicht, daß der Gebrauch mathematischer Methoden und Begriffsbildungen, behutsam eingeführt, ein wirkungsvolles Hilfsmittel sein kann. So wurden u.a. weder Platzhalter (Variablen) verwendet noch die Eigenschaften proportionaler Zuordnungen thematisiert.

Chancen für die Förderung sachrechnerischer Fähigkeiten durch Lebensnähe mathematisher Kontexte

- Durch eine Anbindung an die Erfahrung der Kinder wird das Verstehen der Sachsituation und die Kommunikation darüber wesentlich erleichtert.

- Je näher der Unterricht am Denken und Fragen der Kinder bleibt, desto eher werden sie bereit sein, sich auf das Thema einzulassen.

- Es erleichtert eine Einbettung des Mathematikunterrichts in die Gesamtentwicklung des Kindes; Mathematik wird nicht als "Fremdkörper" empfunden.

- Gewohnheiten, Verfahren, Begriffe werden im Sinne Piagets nur wirklich assimiliert, wenn sie sich erproben können, sonst bleiben sie wirkungslos. Das hauptsächliche Testmaterial der Grundschüler liefert aber gerade deren Umwelt.

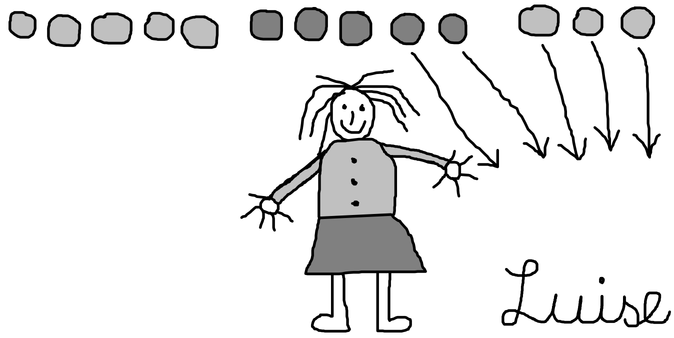
<u>Bearbeitungshilfen bei der Auseinandersetzung mit dem Text einer Sachaufgabe</u>

„Heute wollen wir nicht gleich rechnen, sondern

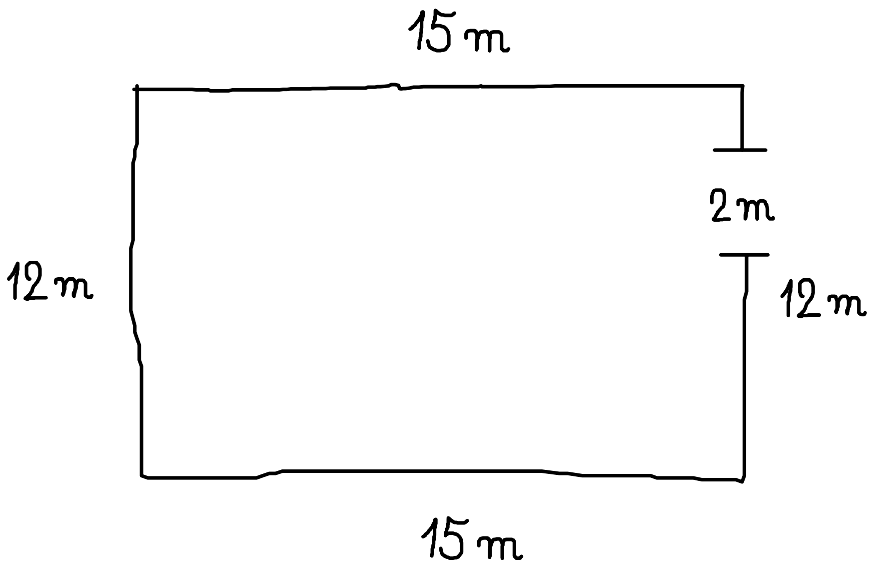
- *erzählen erst einmal den Inhalt einer Sachaufgabe mit eigenen Worten.“*
- *spielen die Sachsituation.“*
- *verkürzen den Text.“*
- *schmücken den Text aus.“*
- *unterstreichen oder markieren im Text.“*
- *überprüfen die Angaben.“*
- *bestimmen überflüssige Angaben.“*
- *ergänzen fehlende Angaben.“*
- *bestimmen **‘nur’** die Operation bei einfachen Sachaufgaben.“*
- *ändern Zahlen oder Maßzahlen.“*
- *erfinden selbst Rechengeschichten oder Sachaufgaben.“*
- *ändern Gegenstände oder Personen.“*
- *ändern den Sachverhalt (und kehren die Operationen um).“*
- *übertragen in Tabellenform.“*
- *zeichnen eine Skizze zu einer Sachaufgabe.“*
- *suchen Fehler in einer gerechneten Aufgabe.“*
- *schätzen das Ergebnis vorher (berechnen im Überschlag).“*

Situationstyp	Operation	Beispiel
Wachsen von a um b	$a + b = x$	Der Urlaub sollte 17 Tage dauern, er wurde um 5 Tage verlängert.
Wachsen von a auf b	$a + x = b$	Im August hatten wir 315 Kinder in unserer Schule, im Dezember waren es 329.
Wachsen um a auf b	$x + a = b$	Das Sparguthaben von Jörg stieg im Laufe des vergangenen Jahres um 128DM auf jetzt 753DM.
Vergleichen von a mit b	$a - b = x$ $b - a = y$	Der Feldberg im Schwarzwald ist 1493m hoch, die Zugspitze in den Al-pen 2962m.
Verkleinern (Verändern) von a auf den b-ten Teil	$a : b = x$	Unser Klassenraum ist 6,40m breit. Beim Zeichnen des Klassenraums auf die Wandtafel nehmen wir davon den 10. Teil (Maßstab 1:10).
Messen von a durch (mit) b	$a : b = x$	200 Flaschen Sprudel sollen in Kästen von je 12 eingeordnet werden.
Verteilen von a auf b	$a : b = x$	Marinas Schulweg ist 1350m lang, dazu brauchte sie heute 15min Zeit zum Gehen.
Vermehren (Verändern) der Summe von a und b auf das c-fache	$c \cdot (a + b) = x$ $c \cdot a + c \cdot b = x$	Petras Vater arbeitet täglich 8 Stunden lang im Büro und für Hin- und Rückweg braucht er zusammen täglich 1Stunde 20Minuten.

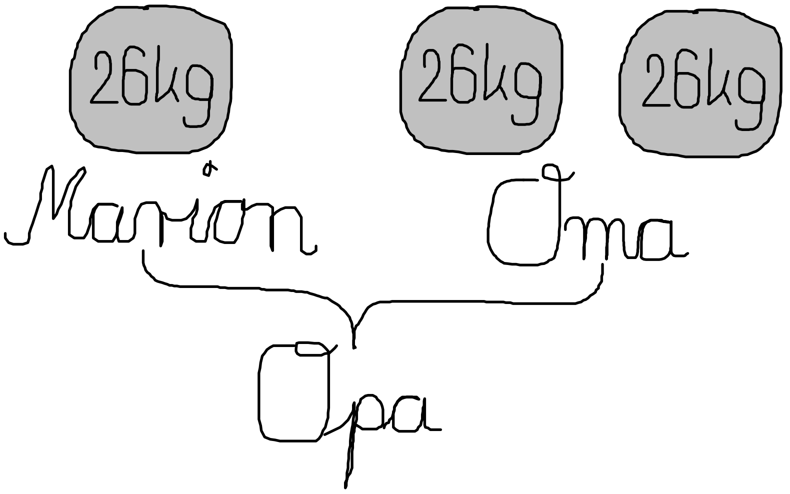
"Elke hat 13 Murmeln. Sie gibt Luise 5 Murmeln ab."



"Ein rechteckiger Garten soll eingezäunt werden. Der Garten ist 15m lang und 12m breit. Auf einer kurzen Seite des Gartens ist ein Tor von 2m Breite vorgesehen."



"Marion wiegt 26kg. Oma wiegt doppelt soviel. Opa wiegt so viel wie Oma und Marion zusammen."



Sonnenschein in einer Juliwoche