

Paul Schafheitlin  
(1924)

Vorwort zur  
„Vorlesung über das Rechnen mit Differentialen“  
von Johann Bernoulli  
(1691/92)

Quelle: Schafheitlin, Paul (Hrsg.): Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92. Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft. - Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. – 1924

---

Von Johann Bernoulli, der 1667 bis 1748 lebte, erschien wenige Jahre vor seinem Tode eine Abhandlung unter dem Titel: *Lectiones mathematicae de methodo integralium* <sup>[1]</sup>; trotz seines späten Erscheinungsjahres (1742) handelt es sich um eine der ersten mathematischen Arbeiten Bernoullis, die im Jahre 1691 entstanden ist. Sie beginnt in deutscher Übersetzung mit den Worten: „Wir haben im vorhergehenden gesehen, wie die Differentiale der Größen zu bilden sind.“ Ein merkwürdiger Anfang für ein Werk, dem nichts vorangeht! Eine Fußnote sucht eine Aufklärung zu geben: „Die Vorlesungen über Differentialrechnung, die vorangingen, glaubte der Verfasser unterdrücken zu müssen, weil sie völlig in dem weitverbreiteten Buche des Marquis de l'Hospital: Analyse des infinitim petit enthalten sind.“

Es hat sich nun ein lebhafter Streit darüber entsponnen, ob die im Jahre 1696 erschienene Analyse geistiges Eigentum des *Marquis de l'Hospital* oder vielmehr *Johann Bernoullis* sei. *Montucla* <sup>[2]</sup> hat sich auf Bernoullis Seite gestellt, während *Bossut* <sup>[3]</sup> sich sehr energisch zugunsten seines Landsmannes äußert, und auch *Cantor* <sup>[4]</sup> ergreift für Hospital Partei. Eneström <sup>[5]</sup> suchte in mehreren Notizen Klarheit in die Angelegenheit zu bringen durch die Verwertung des in Stockholm aufbewahrten Briefwechsels zwischen Bernoulli und Hospital. In seiner ersten Notiz stellt Eneström fest, daß Bernoulli die Absicht Hospitals, die Analyse zu veröffentlichen, kannte und billigte und nach Empfang des Werkes zu Beginn des Jahres 1697 sich beim Marquis bedankte, ohne dabei irgendwelche Einwendungen, die seine Person betrafen, zu machen. Erst nach Hospitals Tode (1704) trat Bernoulli öffentlich <sup>[6]</sup> mit der Behauptung hervor, daß verschiedene Entdeckungen der Analyse sein geistiges Eigentum wären; schärfer, unter Angabe von Belegstellen, läßt er in einem offenen Brief an *Taylor* <sup>[7]</sup>

---

<sup>[1]</sup> Joh.Bernoulli, *Opera omnia*, Bd.3, Seite 385-558, deutsch unter dem Titel: Die erste Integralrechnung, herausgeg. Von Kowalewski. Leipzig, 1913. Oswalds Klassiker Nr.194.

<sup>[2]</sup> *Histoire des Mathém.*, Bd.2. Paris 1758. S.359.

<sup>[3]</sup> *Histoire générale des Mathém.*, deutsch von Reimer. Bd.2. Hamburg 1804. S.186.

<sup>[4]</sup> *Geschichte d. Math.* Bd.3. Leipzig 1901. S.222-226, 244-250.

<sup>[5]</sup> *Bibliotheca Mathematica*. 1894. S.65-72, 1900 S.514, 1901 S.150, 1912/13 S.349 und 1914 S.177.

<sup>[6]</sup> *Acta Eruditorum*. Leipzig 1704. Joh.Bernoulli, *Opera omnia*. Bd.1. S.403.

<sup>[7]</sup> *Acta Eruditorum*. 1721. Joh.Bernoulli, *Opera omnia*. Bd.2, S.508-511.

erklären, daß die Grundlagen und der Stoff der Analyse zum größten Teil von ihm herrührten. Schließlich ist dahin jene oben erwähnte Fußnote zu zählen. In allen diesen Veröffentlichungen wird nirgends Hospital selbst verunglimpft; in seinen privaten Briefen dagegen läßt Bernoulli seinem Unmut über den Marquis freien Lauf und zwar nicht erst nach dessen Tode, wie Eneström meint, sondern bald nach Empfang seines Exemplars der Analyse. Nachdem er in einem Briefe vom 8. Februar 1698 an *Leibniz*<sup>[8]</sup> darüber geklagt hat, daß der bekannte Mathematiker *Ozanam* sich mit fremden Federn früher einmal geschmückt hat, fährt er fort: „Das aber ist die ländliche Angewohnheit fast aller Franzosen; auch ich habe (unter uns gesagt) etwas Derartiges bei dem Marquis de l'Hospital erfahren, der vor einigen Jahren bei Huygens aus meinen Untersuchungen eitlen Ruhm ergatterte. Ich hatte es etwas später erfahren; ich verzieh es gern und zwar so, daß es schien, als ob ich gewußt hätte, was er Huygens geschrieben hatte. Nicht viel aufrichtiger handelte er mir gegenüber, als er kürzlich seine Analyse herausgab. Zugegeben, daß er in der Vorrede bekennt, mir vieles zu schulden, aber dieses Bekenntnis ist allzu unbestimmt und wird dadurch nicht besser, daß der Rezensent des Werkes im Pariser Journal des Scavans jenes Bekenntnis aus einer großmütigen Bescheidenheit hervorgegangen ihm unterstellt; wäre er wirklich bescheiden gewesen, hätte er Erasmus Bartholinus nachahmen sollen, der offen aussagte, daß er alles in seinem Werk aus Schootens Mathematik gelernt habe. Hospital ist nicht mit größerem Rechte als Verfasser seines Werkes anzusprechen; denn alles mit Ausnahme weniger Seiten (das sage ich Dir ins Ohr und keinem andern) hat er teils von mir geschrieben bekommen, teils in die Feder diktiert, teils auch, nachdem ich Paris verlassen hatte, durch Briefe, worüber von mir Beweise in Fülle bewahrt werden und zu geeigneter Zeit veröffentlicht werden können, die auch vor der Veröffentlichung des Werkes verschiedene Freunde gesehen und einen guten Teil davon abgeschrieben haben, und besonders besitze ich Briefe von Hospital an mich, die bezeugen, wie viel mir zuzusprechen ist. Sein Hauptverdienst ist, dass er in Ordnung brachte und säuberlich französisch verfaßte, was ich ihm unordentlich teils lateinisch, teils französisch auseinandergesetzt hatte. Aus eigenem, wie gesagt, hat er nicht mehr hinzugefügt, als was 3 oder 4 Seiten füllt. Aber ich möchte nicht, daß Du ihm etwas mitteilst darüber, was ich im Vertrauen auf Deine Verschwiegenheit Dir übermittelt habe; sonst würde seine freundschaftliche Gesinnung gegen mich ins Gegenteil zweifellos umschlagen.“

Auf die Frage Eneströms, wie der Widerspruch in Bernoullis Dankbrief mit diesen Vorwürfen zu erklären sei, möchte ich folgendes anführen. In der Vorrede zur Analyse sagt Hospital: „Übrigens erkenne ich an, viel den Aufklärungen der Herren Bernoulli zu schulden, besonders des jungen, der jetzt Professor in Gröningen ist. Ich habe mich ohne weiteres ihrer Entdeckungen und derer des Herrn Leibniz bedient. Daher bin ich damit einverstanden, daß sie alles, was ihnen beliebt, für sich in Anspruch nehmen, indem ich mich damit begnügen, was sie mir gütigst lassen wollen.“ Durch diese lobende Erwähnung war zunächst jedenfalls Bernoulli befriedigt und schrieb darauf den erwähnten Dankbrief. Inzwischen war im Journal des Scavans<sup>[9]</sup> eine begeisterte Lobpreisung der Analyse erschienen, in der es zum Schlusse heißt: „Schließlich ist der Verfasser weit entfernt von jener Sorte Schriftsteller, die dem Publikum nur verhüllt die Gedanken anderer geben ohne jemanden zu zitieren außer vielleicht einige Alte, die niemals mehr Ansprüche erheben können. Was ihn anbetrifft, so läßt er in seinem Vorwort allen denen Gerechtigkeit widerfahren, die über die behandelten Gegenstände Entdeckungen gemacht haben mit solcher Aufrichtigkeit und Bescheidenheit, daß er sich von seinem ganzen Buche nur das zuschreibt, was sie selbst ihm zugestehen wollen.“

---

<sup>[8]</sup> Leibnizens mathematische Schriften, herausgeg. Von Gerhardt. Bd.3. Halle 1856. S.480.

<sup>[9]</sup> Année 1696. S.424-428. Paris.

Besonders auffällig ist beim Vergleich dieser Schlussworte der Besprechung mit Hospitals entsprechender Bemerkung im Vorwort, daß geflissentlich der Name Bernoulli vermieden worden ist. Während in der Besprechung die Leistungen von Huygens, Leibniz und anderen namentlich erwähnt werden, fehlt auch sonst völlig der Name Bernoulli. Das mußte den von seinem Werte sehr überzeugten Johann empfindlich kränken und darauf erfolgte der empörte Brief an Leibniz. Warum aber die dringende Bitte, verschwiegen zu sein und die Sorge vor des Marquis Feindschaft? Zu jener Zeit tobte zwischen Johann und seinem älteren Bruder Jakob ein lebhafter wissenschaftlicher Streit, der leider auch das familiäre Verhältnis beider Brüder sehr trübte, und der zuerst in den Leipziger Akten, dann vorwiegend im Journal des Scavans geführt wurde und dieser Zeitschrift stand Hospital und sein Freundeskreis nahe. Da Johanns Stellung in diesem Streite durch seine Prahlgerei und Heftigkeit etwas erschüttert war, so mußte ihm daran liegen, die Pariser Mathematiker nicht gegen sich einzunehmen und da der Streit erst mit dem Tode Jakobs (1705) endete, der kurz nach dem des Marquis erfolgte, so ergibt sich ungezwungen sein Schweigen, das nicht darin gesucht werden muß, daß nach Hospitals Tode keiner die Vorwürfe Bernoullis widerlegen konnte, wie Cantor meint und wie Eneström sich ähnlich in seinem ersten Artikel äußert. Die mehrfach bewiesene Eitelkeit und Prahlgerei Bernoullis gibt zweifellos dieser Möglichkeit Nahrung; dagegen aber sprechen die wörtlich zitierten Äußerungen Hospitals in vielen Briefen an Johann, die dieser in dem Schreiben an Taylor anführt. In seiner Notiz von 1901 kommt Eneström auf den Taylorbrief zu sprechen und es müssen daher diese Zitate als unbedingt richtig angenommen werden, sonst hätte Eneström, dem der Briefwechsel zur Verfügung stand, sicher auf ihre Ungenauigkeit hingewiesen.

Was nun den Inhalt der Analyse anbetrifft, so ist sie in zehn Abschnitte geteilt: der erste enthält die Regeln der Differentiation algebraischer Ausdrücke, der zweite Tangentenkonstruktionen, der dritte die Bestimmung der Maxima und Minima, der vierte die Ermittelung der Wende- und Rückkehrpunkte, der fünfte die Eigenschaften der Evolventen, der sechste und siebente die Auffindung der Kata- und Diakaustiken, der achte die Enveloppen, der neunte die Ermittelung unbestimmter Formen und der letzte Anwendungen zur Auffindung mehrfacher Gleichungswurzeln und ähnliches.

Aus dem Briefwechsel ergibt sich nun, daß größere Teile von Abschnitt 2, 4 und 5 und völlig Abschnitt 8 und 9 von Bernoulli herühren, die Abschnitte 6, 7 und 10 geben nur Anwendungen der Differentialrechnung auf Dinge, die schon durch Tschirnhaus, Descartes und Hudde größtenteils bekannt waren. Daher gibt Eneström auch in seiner letzten Notiz das geistige Eigentumsrecht an den letzten 140 Seiten der Analyse für Hospital preis und will ihm nur noch das der ersten 40 Seiten retten.

Darüber nun könnte nur Bernoullis Differentialrechnung Aufschluß geben, die er nach der eingangs erwähnten Bemerkung zur Integralrechnung unterdrückt hat. „Wo ist, fragt Cantor, die Handschrift von Bernoulli unterdrückten Vorlesungen über Differentialrechnung? Hat er Sorge dafür getragen, daß die Handschrift der Integralrechnung erhalten blieb, trotzdem sie unter seinem Namen gedruckt ist, so hätte er doppelt für die Erhaltung der ihm entwendeten Differentialrechnung sorgen müssen, wenn sie wirklich vorhanden war.“ Aus der letzten Wendung geht hervor, daß Cantor der Eitelkeit Bernoullis eine direkte Unwahrheit zutraut. Nun ist aber durch Eneström schon 1901 festgestellt worden, daß diese Differentialrechnung tatsächlich vorhanden war und ich kann jetzt hinzufügen, daß sie noch existiert.

Durch die Liebenswürdigkeit des Vorstehers der Manuskriptensammlung, Herrn Dr. Roth, erlangte ich einen Einblick in die mathematischen Handschriften der Basler Universitätsbibliothek und fand darin eine Schrift: Johannis Bernoulli's Lectiones de calculo differentialium.

In diesem Manuskript, im Format eines gewöhnlichen Schreibheftes, umfaßt die Differentialrechnung 38 Seiten; der Rest ist der eingangs erwähnten Integralrechnung gewidmet, und zwar umfaßt er die ersten elf Lektionen. Die bisher noch nicht veröffentlichte

Differentialrechnung wurde im Jahre 1922 im Urtext bei Gelegenheit des dreihundertjährigen Jubiläums der Familie Bernoulli ins Basler Bürgerrecht von mir bekanntgegeben<sup>[10]</sup>. Die vorliegende Schrift ist eine möglichst wortgetreue deutsche Übersetzung.

Beim Vergleich dieser Handschrift mit der Analyse des Marquis de l'Hospital ergibt sich, daß Bernoulli mit seinen Ansprüchen im wesentlichen recht hat. Hospitals durchaus nicht zu unterschätzendes Verdienst ist ein pädagogisches; wie Bernoulli an Leibniz schrieb, hat der Marquis das, was ihm Bernoulli in nicht immer einwandfreier und krauser Form darbot, durch klare, und gewählte Ausdrucksweise und geschickte Umarbeitung dem Verständnis nahegebracht.

In der Bernoullischen Handschrift erkennt man sofort das Skelett, das Hospital in den ersten vier Abschnitten seines Buches mit Fleisch und Blut umgeben hat. Die im ersten Abschnitt der Analyse gegebenen Regeln sind, abgesehen von einigen Umstellungen, denen des Manuskripts entlehnt, einige Beispiele sogar buchstäblich genau, so die Berechnung von

$$d \frac{\sqrt[3]{ax + x^3}}{\sqrt{xy + y^2}}$$

; im zweiten Teil bei den Beispielen zur Tangentenbestimmung sind wesentliche

Abweichungen in der Darstellungsart vorhanden, aber die behandelten Kurven sind in beiden Schriften dieselben mit geringen Ausnahmen. Ähnlich ist es im dritten Abschnitt bei der Bestimmung der extremen Werte. Abgesehen von der ganzen Anlage zeigen in diesem Abschnitt drei Beispiele die völlige Abhängigkeit Hospitals von Bernoulli, nämlich § 59, 60, 61, die der Handschrift, als Aufgabe 16, 19, 20, entnommen sind.

Der Abschnitt 4 zeigt wieder auffallende Ähnlichkeit mit Bernoullis Handschrift.

Aus alledem ergibt sich, daß neben manchem inhaltlich Neuem die Abhängigkeit Hospitals von Bernoulli unzweifelhaft feststeht, so daß man begreift, wenn dieser mit der allgemeinen Wendung in der Vorrede der Analyse nicht einverstanden war und die bekannten Proteste erhob.

Da die Basler Handschrift keinerlei Datum aufweist, so könnte jemand den Einwurf machen, daß sie erst nach dem Erscheinen der Analyse (1696) angefertigt worden sei. Abgesehen davon, daß obige Bemerkung in der Vorrede der Analyse dagegenspricht, lassen sich verschiedene andere Gründe angeben, die die Entstehungszeit der Handschrift vor dem Erscheinen der Analyse notwendig machen.

Erstens ist der Ausdruck und die Formelschreibung Bernoullis an vielen Stellen erheblich schwerfälliger und ungelenker als die Hospitals; ich weise z. B. auf Seite 14 dieser Übersetzung hin und auf die Schreibart höherer Potenzen von Wurzeln usw. durch Vorsetzung der Zeichen ?, C, QQ siehe Anmerkung 15; über den Ausdruck „Sinusversus“ und die damit zusammenhängende schwerfällige Fassung eines Satzes vgl. Anmerkung 38.

Zweitens tritt mehrfach bei der Handschrift eine geniale Unachtsamkeit zutage, wodurch Ungenauigkeiten und Flüchtigkeitsfehler hervorgerufen sind, die Hospital verbessert hat. Die zweite Art, die Aufgabe 19 zu lösen, führt auf eine Gleichung dritten Grades, die Bernoulli ungelöst stehen läßt, da er offenbar übersehen hat, daß sie die einfache Wurzel  $x = b$  zuläßt, während Hospital (Nr.60, Seite 51) dies erkannt hat und demgemäß mit Hilfe einer Gleichung zweiten Grades die Aufgabe löst. Bei Aufgabe 21 sucht Bernoulli den Wendepunkt der Kurve, die jetzt als Versiera bezeichnet wird; die im Texte dabei gezeichnete Figur ist aber falsch, während Hospital sie richtig entworfen hat (Nr.68, Fig.58). Bei der letzten Aufgabe, den Wendepunkt der parabolischen Spirale zu bestimmen, haben die beiden letzten Glieder der Gleichung fünften Grades, auf die die Aufgabe führt, das falsche Vorzeichen, während Hospital (Nr.73, Seite 68) die Gleichung richtig angibt. Über die Aufgabe 5 vergleiche Anmerkung 24.

---

<sup>[10]</sup> Verhandlungen der Naturforsch. Gesellschaft in Basel. Bd.34, S.1-12.

Drittens möchte ich noch darauf hinweisen, daß in dem Heft, das die Differentialrechnung enthält, unmittelbar darauf, wie schon erwähnt wurde, ein Teil der Integralrechnung folgt. Aus ihr geht hervor, daß Bernoullis Abhandlung vor dem Jahre 1694, also vor dem Erscheinen der Analyse (1696), abgefaßt sein muß. Denn dort findet sich die unrichtige Angabe, daß das Integral von  $dx: x$  unendlich ist, während er 1694 den Wert des Integrals richtig als  $\log x$  angegeben hat<sup>[11]</sup>.

Schließlich ist noch ein kleiner Umstand zu erwähnen. Von den drei anfangs angeführten Postulaten Bernoullis übernimmt Hospital in wörtlicher französischer Übersetzung die beiden ersten, nicht aber das dritte; denn in der Differentialrechnung werden nur die beiden ersten, das dritte erst in der Integralrechnung gebraucht. Als ein zusammenhängendes Ganze schwebten offenbar Bernoullis Geiste beide Rechnungen vor, deren notwendige Voraussetzungen im Gegensatz zu den bisherigen Rechnungsarten dem Leser gleich zu Anfang klar gemacht werden müssen. Hospital betrachtet die Integralrechnung als eine Fortsetzung, die er ausdrücklich von seiner Betrachtung ausschließt, und demnach läßt er absichtlich jenes dritte Postulat weg.

In dem von Bernoulli selbst verfaßten Abriß seines Lebens erwähnt er, daß die Untersuchungen über Infinitesimalrechnung, die von ihm dem Marquis im Winter 1691/92 vorgetragen worden sind, von einem Freunde aufgeschrieben wurden. Um Mißverständnissen vorzubeugen, bemerke ich, daß die aufgefundene Schrift von der Hand Nicolaus (I) Bernoulli herrührt, der 1687 geboren wurde. Unmöglich also kann die vorliegende Schrift jene Niederschrift aus dem Jahre 1691 sein. Nicolaus besuchte seinen Onkel Johann 1705 in Gröningen, um sich von ihm in die Mathematik einführen zu lassen und ich nehme an, daß er damals diese Abschrift von jenen Vorlesungen Johans angefertigt hat; hätte er mündliche Unterweisungen Johans zu Papier gebracht, so würde die Handschrift anders ausgefallen sein, z. B. jene falsche Ansicht über das Integral von  $dx: x$  hätte Johann 1705 nicht mehr äußern können.

Die am Schlusse der Übersetzung angefügten Anmerkungen dienen vorwiegend zum Vergleich mit den entsprechenden Stellen in Hospitals „Analyse“. Zur Erleichterung habe ich einige Stellen von Hospitals Werk wörtlich angegeben.

Berlin, Ostern 1924.

Paul Schafheitlin.

---

<sup>[11]</sup> Acta Eruditorum. 1694. S.437ff. Joh.Bernoulli, Opera omnia, Bd.1, S.126