Pierre de Fermat/Blaise Pascal

„Briefwechsel zum Teilungsproblem"
(1654)

Quelle: Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933: Einf. U. Texte/Hrsg.: Ivo Schneider. – Darmstadt: Wiss. Buchges., 1988, S.32-40

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

PASCAL an FERMAT, Montag, den 24. August 1654

Mein Herr,

1. Ich konnte Ihnen mit der letzten Postsendung nicht alle meine Gedanken bezüglich des Spielabbruchproblems bei mehreren Spielern darlegen, und ich habe sogar einigen Widerwillen, dies zu tun, aus Furcht, daß dabei diese wunderbare Übereinstimmung, die zwischen uns war und die mir so teuer war, sich aufzuheben beginnt; denn ich befürchte, daß wir über diesen Gegenstand verschiedener Ansicht sind. Ich will Ihnen alle meine Argumente darlegen, und tun Sie mir den Gefallen, mich zu verbessern, wenn ich irre, oder mich zu bestärken, wenn ich recht habe. Ich bitte Sie darum inständig und aufrichtig, denn ich werde mich nur im Recht fühlen, wenn Sie meiner Ansicht sind.

Wenn nur *zwei* Spieler beteiligt sind, ist Ihre Methode, die auf den Kombinationen beruht, sehr sicher; wenn es aber *drei* sind, glaube ich,. deren Unzulänglichkeit zeigen zu können, es sei denn, Sie handhaben sie auf eine andere, mir noch unbegreifliche Art. Die Methode aber, die ich Ihnen mitgeteilt habe und deren ich mich immer bediene, ist auf alle erdenklichen Bedingungen aller Arten von Teilungsproblemen anwendbar, während die der Kombinationen (deren ich mich nur bei den Spezialfällen bediene, wo sie kürzer ist als die allgemeine) allein für diese Fälle taugt und für die anderen nicht.

Ich bin sicher, daß ich mich verständlich machen kann, aber ich werde ein wenig ausholen müssen, und Sie werden ein wenig der Geduld bedürfen.

2. Dies ist Ihr Vorgehen, wenn es *zwei* Spieler sind:

Wenn zwei Spieler, die auf mehrere Gewinnspiele spielen, sich in der Lage befinden, daß dem ersten *zwei* und dem zweiten *drei* Gewinnspiele fehlen, so muß man, sagen Sie, für die gerechte Aufteilung des Einsatzes schauen, nach wie vielen Partien das Spiel in jedem Fall entschieden sein wird.

Es ist leicht zu überlegen, daß das nach *vier* Partien der Fall sein wird. Daraus schließen Sie, daß man feststellen müsse, wie viele Anordnungen <von Spielausgängen> es bei vier Partien und zwei Spielern gibt, und weiterhin, wie viele Anordnungen den ersten <Spieler> und wie viele den zweiten zum Gewinner machen, und daß man den Einsatz diesem Verhältnis entsprechend teilen müsse.Ich hätte gerade diese Überlegung nur schwerlich verstanden, wenn ich sie mir nicht schon vorher selbst klargemacht hätte; Sie haben sie wohl auch in diesem Sinn niedergeschrieben. Um nun zu sehen, wie viele Anordnungen bei vier Partien und zwei Spielern existieren, muß man sich vorstellen, daß sie mit einem Würfel[1] mit zwei Seiten spielen (weil es nur zwei Spieler gibt), wie bei Wappen oder Zahl,

[1] (S): Idee des"allgemeinen"Würfels von n Seiten, in diesem Fall von zwei Seiten
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

und daß sie vier dieser Würfel werfen (weil sie vier Partien spielen); und jetzt muß man überlegen, wie viele verschiedene Lagen diese Würfel einnehmen können. Das ist leicht zu berechnen: sie können s*echzehn* haben, das ist die zweite Potenz von *vier,* d.h. das Quadrat. Denn stellen wir uns vor, daß eine der Seiten, mit *a* gekennzeichnet, für den ersten Spieler günstig ist und die andere, mit *b*, für den zweiten, dann können diese vier Würfel eine dieser sechzehn Lagen einnehmen:

A a a a	*a a a a*	*b b b b*	*b b b b*
A a a a	*b b b b*	*a a a a*	*b b b b*
A a b b	*a a b b*	*a a b b*	*a a b b*
A b a b	*a b a b*	*a b a b*	*a b a b*
1 1 1 1	1 1 1 2	1 1 1 2	1 2 2 2

Und weil dem ersten Spieler zwei Partien fehlen, lassen ihn alle Lagen mit <mindestens> zwei *a* gewinnen: davon gibt es 11 für ihn; und weil dem zweiten hier drei Partien fehlen, lassen ihn alle Lagen, in denen <mindestens> drei *b* vorhanden sind, gewinnen: davon gibt es also 5. Somit müssen sie den Einsatz im Verhältnis von 11 zu 5 teilen.

Das ist Ihre Methode, wenn es *zwei* Spieler sind; dazu behaupten Sie, daß es falls es mehrere sind, nicht schwer sei, das Teilungsproblem nach der gleichen Methode zu lösen.

3. Dazu habe ich Ihnen zu sagen, mein Herr, daß diese Teilung auf der Basis der Kombinationen für zwei Spieler durchaus richtig und sehr gut ist; aber bei mehr als zwei Spielern ist sie nicht immer richtig, und ich werde Ihnen den Grund für diesen Unterschied nennen.

Ich teilte Ihre Methode unseren Herren mit, gegen die HERR DE ROBERVAL mir gegenüber den folgenden Einwand erhob:

Es sei irrig, sich des Kunstgriffs zu bedienen, die Teilung unter der Voraussetzung vorzunehmen, man spiele *vier* Partien, weil man ja nicht notwendig *vier* Partien spielen müsse, wenn dem ersten *zwei* und dem anderen *drei* fehlten, da man möglicherweise nur *zwei* oder *drei* oder vielleicht wirklich *vier* <Partien> spielte.

Er sehe auch nicht ein, warum man vorgebe, eine gerechte Teilung unter der erkünstelten Voraussetzung vorzunehmen, man spiele vier Partien, weil es ja eine natürliche Spielregel sei, nicht weiterzuspielen, sobald einer der Spieler gewonnen habe, und daß zumindest, wenn dies nicht falsch sei, es nicht bewiesen worden sei, so daß er irgendwie den Verdacht hegte, wir seien einem Trugschluß erlegen.

Ich antwortete ihm daß ich mich nicht so sehr auf diese Methode der Kombinationen stütze, die in der Tat für diesen Fall nicht angebracht ist, als auf meine andere, allgemeine Methode, der nichts entgeht, die in sich schlüssig ist und die genau zur selben Teilung wie die der Kombinationen führt; und darüber hinaus bewies ich ihm die Richtigkeit der Teilung für zwei Spieler mit Hilfe der Kombinationen so:

Ist es nicht.wahr, daß, falls zwei Spieler, die sich in der oben angenommenen Situation befinden, daß dem einen *zwei* und dem anderen *drei* Partien fehlen, sich gütlich einigen, alle *vier* Partien zu spielen, d. h., alle vier zweiseitigen Würfel auf einmal zu werfen, ist es dann nicht wahr, sage ich, daß, wenn sie beschlossen haben, alle vier Partien zu spielen, die Teilung so erfolgen muß, wie wir gesagt haben, nämlich entsprechend der Anzahl der für jeden günstigen Lagen?

Er stimmte dem zu, und dies ist ja in der Tat überzeugend; aber er leugnete, daß dasselbe noch gelte, wenn man sich nicht verpflichtete, alle *vier* Partien zu spielen. Ich sagte ihm aber darauf:

Ist es nicht klar, daß dieselben Spieler, nicht verpflichtet, <alle> vier Partien zu spielen, sondern willens, mit dem Spiel aufzuhören, sobald einer seine Anzahl <von Gewinnspielen> erreicht hat,. sich ohne Schaden und Nutzen verpflichten können, alle vier Partien zu spielen, ohne daß diese Übereinkunft in irgendeiner Weise ihren Anspruch ändert? Denn wird sich der erste, wenn er die ersten beiden von *vier* Partien gewinnt und damit <insgesamt> gewonnen hat, weigern, noch zwei Partien zu spielen, da er ja nicht in höherem Maß gewonnen hat, wenn er sie gewinnt, und nicht minder gewonnen hat, wenn er sie verliert? Denn diese beiden, die der andere gewonnen hat, genügen diesem nicht, weil er ja drei braucht, und also vier Partien nicht ausreichen, um alle beide die erforderliche Anzahl <von Gewinnspielen> erreichen zu lassen.

Es ist gewiß leicht einzusehen, daß es für den einen wie für den anderen völlig einerlei und gleichgültig ist, ob sie ihr Spiel nach der natürlichen Regel spielen, d.h. dann aufzuhören, sobald einer seine Anzahl erreicht hat, oder ob sie alle vier Partien durchführen. Da also diese beiden Regeln auf dasselbe hinauslaufen, muß die Teilung nach der einen und nach der anderen völlig gleich ausfallen. Sie ist also richtig, wenn sie verpflichtet sind, <alle> vier Partien zu spielen, wie ich gezeigt habe; also ist sie auch im anderen Fall richtig.

Sehen Sie, wie ich das bewiesen habe; achten Sie bitte darauf, daß dieser Beweis auf der Gleichwertigkeit der zwei Regeln, der wirklichen und der fingierten, beruht bezüglich zweier Spieler, und daß nach der einen und nach der anderen immer derselbe gewinnt, und, wenn der eine nach der einen gewinnt oder verliert, er auch nach der anderen gewinnen oder verlieren wird, sowie daß niemals beide <gleichzeitig> ihre Anzahl <von Gewinnspielen> erreichen.

4. Benutzen wir dasselbe Verfahren bei *drei* Spielern unter der Voraussetzung, daß dem ersten *eine,* dem zweiten *zwei* und dem dritten *zwei* Partien fehlen. Um die Teilung nach der obigen Methode der Kombinationen vorzunehmen, muß man zunächst herausfinden, nach wie vielen Partien das Spiel entschieden sein wird, sowie wir es im Fall von zwei Spielern gemacht haben. Das wird bei *drei* <Spielen> der Fall sein, denn <spätestens> nach drei Partien muß die Entscheidung notwendigerweise gefallen sein.

Man muß jetzt feststellen, wie viele Anordnungen <von Spielausgängen> es bei drei Partien und drei Spielern gibt und wie viele für den einen, wie viele für den anderen und wie viele für den letzten günstig sind, und man muß diesem Verhältnis entsprechend das Geld verteilen, ebenso wie, man es im Fall von zwei Spielern gemacht hat.

Es ist leicht zu erkennen, wie viele Kombinationen es insgesamt gibt: Es ist die dritte Potenz von 3, also ihre Kubikzahl 27. Denn wenn man *drei* Würfel auf einmal wirft (weil man drei Partien spielen muß), von denen jeder *drei* Flächen aufweist (weil es drei Spieler sind), die eine gekennzeichnet mit *a*, günstig für den ersten, eine andere mit *b* für den zweiten und eine weitere mit *c* für den dritten, so können. offensichtlich diese drei gleichzeitig geworfenen Würfel 27 verschiedene Lagen einnehmen, nämlich:

a a a	*a a a*	*a a a*	*b b b*	*b b b*	*b b b*	*c c c*	*c c c*	*c c c*
a a a	*b b b*	*c c c*	*a a a*	*b b b*	*c c c*	*a a a*	*b b b*	*c c c*
a b c	*a b c*	*a b c*	*a b c*	*a b c*	*a b c*	*a b c*	*a b c*	*a b c*
1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1	1	1 1 1	1	1
	2		2	2 2 2	2		2	
		3			3	3	3	3 3 3

Nun fehlt aber dem ersten nur *eine* Partie: also sind alle Lagen mit <mindestens> einem *a* für ihn; das sind also 19.

Zwei Partien fehlen dem zweiten: also sind alle Lagen mit <mindestens> zwei *b* für ihn; das sind also 7.

Zwei Partien fehlen dem dritten: also sind alle Lagen mit <mindestens> zwei *c* für ihn; das sind also 7.

Wenn man daraus schlösse, daß man jedem <einen Anteil> im Verhältnis von 19, 7, 7 geben müßte, täuschte man sich gewaltig, und ich kann nicht glauben, daß Sie das so machen würden, denn es gibt einige Würfe wie z.B. *abb,* die gleichzeitig für den ersten und den zweiten günstig sind, weil der erste hier das von ihm benötigte *a* findet und der zweite die ihm noch fehlenden zwei *b;* desgleichen zählt *acc* für den ersten und den dritten.

Also darf man diese gleichzeitig für zwei <Spieler> günstigen Würfe nicht zählen, als ob sie für jeden den Gesamteinsatz wert wären, sondern nur die Hälfte. Denn beim Wurf *acc* hätten der erste und der dritte gleiches Anrecht auf den Einsatz, weil jeder die <erforderliche> Anzahl aufweist, würden also das Geld zu gleichen Teilen teilen; beim Wurf *aab* jedoch gewinnt der erste allein. Man muß deshalb die Berechnung folgendermaßen vornehmen:

Es gibt 13 Lagen, die dem ersten den Gesamteinsatz, 6, die ihm den halben Einsatz sichern, und 8, die für ihn nichts wert sind; wenn also der Gesamteinsatz eine Pistole ist, gibt es 13 Würfe, deren jeder für ihn eine Pistole wert ist,6 Würfe, deren jeder ihm $\frac{1}{2}$ Pistole sichern, und 8, die nichts wert sind.

Man muß also im Fall der Teilung bei Spielabbruch multiplizieren

13 mit einer Pistole, macht 13
6 mit einer halben, macht 3
8 mit null, macht 0

Summe ... 27 Summe 16

und die Summe der Werte, 16, durch die Summe der Lagen, 27, dividieren, was den Bruch 16/27 ergibt; das gehört dem ersten im Fall der Teilung bei Spielabbruch, nämlich 16 Pistoles von 27.

Die Anteile des zweiten und des dritten Spielers bei Spielabbruch findet man ebenso:

Es gibt	4 Lagen, die für ihn 1 Pistole wert sind: multiplizieren Sie ..	4
Es gibt	3 Lagen, die für ihn $\frac{1}{2}$ Pistole wert sind: multiplizieren Sie..	$1\frac{1}{2}$
Und	20 Lagen, die für ihn nichts wert sind.....................................	0
Summe........	27 Summe	$5\frac{1}{2}$

Also gehören dem zweiten Spieler 5 Pistoles und eine halbe von 27 und dem dritten ebenso viele, und diese drei Anteile, nämlich $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ und 16, ergeben zusammen 27.

5. So, scheint mir, muß das Teilungsproblem mit Hilfe der Kombinationen nach Ihrer Methode gelöst werden, es sei denn, Sie haben etwas anderes für dieses Problem, was ich nicht wissen kann. Wenn ich mich nicht irre, ist aber diese Lösung des Teilungsproblems nicht richtig.

Der Grund dafür ist die falsche Annahme, nämlich, daß man auf jeden Fall *drei* Partien spielt, während es die natürliche Regel dieses Spiels ist, daß man nur so lange spielt, bis einer der Spieler die Anzahl der ihm noch fehlenden, Gewinnspiele erreicht hat, in welchem Fall das Spiel aufhört.

Es ist nicht so, daß es nicht vorkommen könnte, daß man drei Partien spielt, aber es kann auch vorkommen, daß man nur eine oder zwei spielt und zwangsläufig keine weitere.

Aber woher kommt es, fragt man, daß man bei dieser Konstellation nicht dieselbe erkünstelte Voraussetzung zugrundelegen darf wie im Fall von zwei Spielern? Hier ist der Grund:

In der tatsächlichen Spielsituation kann nur einer dieser drei Spieler gewinnen; denn die Regel besagt, daß das Spiel aufhört, sobald einer gewonnen hat. Bei der fingierten Regel aber können zwei die <erforderliche> Anzahl von Gewinnspielen erreichen, dann nämlich, wenn der erste das eine ihm fehlende und einer der beiden anderen die zwei ihm fehlenden gewinnt; denn sie werden nicht eher drei Partien gespielt haben; wohingegen bei zwei Spielern die fingierte und die wahre Regel bezüglich der Gewinnsituation der Spieler gänzlich übereinstimmen. Das macht aber den ungeheuren Unterschied zwischen der fingierten und der wahren Regel aus.,

Wenn die Spieler in der angenommenen Situation, d.h. wenn dem ersten *eine* Partie, dem zweiten *zwei* und dem dritten *zwei* fehlen, sich gütlich darauf einigen, alle *drei* Partien zu spielen, und daß jeder, der die ihm fehlende Anzahl erreicht hat, den gesamten Einsatz nimmt, falls er sie als einziger erreicht hat, oder daß sie zu gleichen Teilen teilen, wenn zwei sie erreicht haben, dann muß *in diesem Fall* die Teilung so vorgenommen werden, wie ich es eben gemacht habe, daß der erste 16, der zweite 5 1/2 und der dritte 5 1/2 von 27 Pistoles erhält, und das ist nach obiger Voraussetzung in sich beweiskräftig.

Wenn sie aber einfach nach der Regel spielen, daß man nicht notwendig drei Partien spielt, sondern nur, bis einer von ihnen seine Gewinnspiele gemacht hat, und dass dann das Spiel ohne die Möglichkeit für einen anderen, dahin zu gelangen, aufhört, dann stehen dem ersten 17 Pistoles, dem zweiten 5 und dem dritten 5 von 27 zu.

Das findet man mit meiner allgemeinen Methode, durch die auch festgelegt wird, daß nach obiger Voraussetzung dem ersten 16, dem zweiten 5 1/2 und dem dritten 5 1/2 zustehen, ohne sich der Kombinationen zu bedienen, denn sie funktioniert überall automatisch und problemlos.

6. Dies, mein Herr, sind meine Vorstellungen über diesen Gegenstand, bezüglich dessen ich Ihnen gegenüber keinen anderen Vorteil habe als den, viel mehr darüber nachgedacht zu haben; aber das bedeutet für Sie nur wenig, da ja Ihre ersten Einsichten viel tiefer gehen als meine andauernden Anstrengungen.

Ich möchte nicht versäumen, Ihnen meine Gründe dafür darzulegen, warum ich auf Ihr Urteil warte. Ich glaube Ihnen mit Obigem klargemacht zu haben, daß die Methode der Kombinationen bei zwei Spielern <nur> zufällig gültig ist genauso, wie sie es manchmal auch bei drei Spielern ist, etwa dann, wenn einem *eine* Partie fehlt, einem anderen *eine* und einem dritten *zwei*, weil in diesem Fall die für die Beendigung des Spieles erforderliche Anzahl von Partien nicht ausreicht, um zwei gewinnen zu lassen;[2] aber sie ist nicht allgemein und auch nicht immer richtig, außer für den Fall, daß man genau eine bestimmte Anzahl von Partien spielen muß.

So fürchte ich, da Sie nicht über meine Methode, sondern nur über die der Kombinationen verfügten, als Sie mir das Teilungsproblem bei mehreren Spielern vorlegten, daß wir über diesen Gegenstand verschiedener Meinung sind.

Ich bitte Sie inständig, mir mitzuteilen, wie Sie bei der Lösung dieses Teilungsproblems vorgehen. Ihre Antwort werde ich mit Respekt und Freude aufnehmen, selbst wenn Ihre Meinung meiner widerspricht.

Ich bin etc. ...[3]

---

[2] (ARNOLD): Zwar ist das Ergebnis beider Methoden eine Teilung im Verhältnis 4:4: 1, aber PASCALS Argument ist falsch: Nach der fingierten Regel müssen *zwei* Partien gespielt werden, und dabei können die Fälle *ab* und *ba* mit Gewinn für den ersten und für den zweiten Spieler eintreten.

[3] (S): Dieser Brief überkreuzt sich mit einem Brief von FERMAT an PASCAL, datiert vom 29. August 1654 (Oeuvres de Fermat Bd. II, Nr. LXXIII, S. 307-310). Jener Brief enthält die Feststellung, daß FERMAT unabhängig von PASCAL zu denselben oder ähnlichen Ergebnissen gelangt ist wie dieser in seinem >Traité du triangle arithmétique< (gedruckt 1654, veröffentlicht Paris 1665). Außerdem gibt FERMAT die richtige Lösung für das Teilungsproblem im Fall von drei Spielern, wenn dem ersten noch ein und den beiden anderen noch jeweils zwei Spiele zum Gesamtgewinn fehlen, nämlich 17:5:5, allerdings noch ohne Beweis. Der Rest des Briefes enthält zahlentheoretische Probleme.

FERMAT an PASCAL, Freitag, den 25. September 1654[4]

Mein Herr,

1. Fürchten Sie nicht, daß unsere Übereinstimmung verloren geht, Sie haben sie ja selbst im Glauben, sie zu zerstören, bestätigt, und mir scheint, daß Sie mit Ihrer Antwort an Herrn DE ROBERVAL auch für mich geantwortet haben.

Ich nehme das Beispiel mit den drei Spielern, von denen dem ersten eine und jedem der beiden anderen zwei Partien fehlen; das ist der Fall, den Sie mir entgegenhalten.

Ich finde hier nur 17 für den ersten <günstige> Kombinationen und 5 für jeden der beiden anderen; denn, wenn Sie vorbringen, daß die Kombination *acc* für den ersten und für den dritten gut ist, so denken Sie anscheinend nicht mehr daran, daß, sobald einer der Spieler gewonnen hat, alles, was sich danach ereignet, nichts mehr nützt. Da nun diese Kombination den ersten gleich mit der ersten Partie zum Gewinner gemacht hat, was liegt daran, daß der dritte darauf zwei gewinnt, da es ja nichts nützte, selbst wenn er dreißig, gewönne?

Das kommt daher, daß, wie Sie so treffend bemerkt haben, die Annahme einer durch eine bestimmte Anzahl von Partien gegebenen Spieldauer nur dazu dient, die Regel zu vereinfachen und (meiner Meinung nach) alle Möglichkeiten gleich zu machen, oder noch verständlicher, um alle Brüche auf den gleichen Nenner zu bringen.

Schließlich, um weitere Zweifel Ihrerseits auszuschließen, wird es, wenn Sie im vorliegenden Fall eine Spieldauer von *vier* statt von *drei* Partien annehmen, nicht nur 27 Kombinationen, sondern 81 geben, und man wird prüfen müssen, wie viele Kombinationen den ersten zum Gewinner einer Partie machen, bevor einer der anderen zwei gewonnen hat, und wie viele einen der beiden anderen zum Gewinner von zwei Partiien machen, bevor der erste eine gewonnen hat. Sie werden finden, daß es für den Gewinn des ersten 51 Kombinationen und für den Gewinn jedes der beiden anderen 15 sind, was auf dasselbe Verhältnis hinausläuft.

So werden Sie, wenn Sie nun fünf oder eine beliebige andere Anzahl von Partien annehmen, immer drei Zahlen im Verhältnis von 17, 5, 5 finden.

Daher bin ich auch berechtigt zu sagen, daß die Kombination *acc* nur für den ersten und nicht für den dritten und *cca* nur für den dritten und nicht für den ersten günstig ist, und daß somit meine Methode der Kombinationen bei drei Spielern genauso gilt wie bei zweien und allgemein bei allen Anzahlen <von Spielern>.

2. Sie konnten bereits aus meinem vorhergehenden Brief[5] ersehen, daß ich keinen Zweifel an der richtigen Lösung des Problems bei drei Spielern hatte, von der ich Ihnen die drei entscheidenden Zahlen 17, 5 und 5 mitgeteilt hatte. Aber weil Herr <DE> ROBERVAL sich vielleicht freut, eine Lösung ohne eine zusätzliche Annahme zu sehen, die außerdem in vielen Fällen die Lösungswege abzukürzen vermag, sei sie hier für das vorliegende Beispiel angeführt:

Der erste kann entweder mit einer einzigen oder mit zwei oder mit drei Partien gewinnen.

---

[4] (Hrsg. TANNERY): Antwort auf den Brief vom 24. August 1654.

[5] (S): ln diesem Brief an PASCAL vom 29. August 1654 hatte FERMAT, wie schon früher bemerkt, lediglich die richtige Lösung in dem diskutierten Fall von drei Spielern ohne Beweis angegeben.

Wenn er mit einer einzigen Partie gewinnt, muß er mit einem Würfel, der drei Seiten hat, die <für ihn> günstige beim ersten Wurf werfen. Ein einziger Würfel weist drei Möglichkeiten auf: dieser Spieler besitzt also 1/3 der Gewinnmöglichkeiten, wenn man nur eine Partie spielt.

Wenn man deren zwei spielt, kann er, auf zwei Arten gewinnen, entweder wenn der zweite Spieler die erste und er die zweite oder wenn der dritte die erste und er die zweite <Partie> gewinnt. Nun weisen . aber zwei Würfel 9 Möglichkeiten auf; dieser Spieler besitzt also 2/9 der Gewinnmöglichkeiten, wenn man zwei Partien spielt.

Wenn man deren drei spielt, kann er nur auf zwei Arten gewinnen, entweder wenn der zweite die erste, der dritte die zweite und er die dritte oder wenn der dritte die erste, der zweite die zweite und er die dritte <Partie> gewinnt; denn wenn der zweite oder der dritte Spieler die beiden ersten gewönne, gewönne dieser und nicht der erste Spieler das Spiel. Nun weisen aber drei Würfel 27 Möglichkeiten auf; also besitzt der erste Spieler 2/27 der Gewinnmöglichkeiten, wenn man drei Partien spielt.

Die Summe der Gewinnmöglichkeiten für den ersten Spieler ist folglich 1/3, 2/9, 2/27, das macht zusammen 17/27.

Die Methode ist also richtig und allgemeingültig in allen Fällen, so daß, ohne Zuhilfenahme einer zusätzlichen Annahme, die für jede Anzahl von Partien vorliegenden Kombinationen die Lösung enthalten und das einsichtig machen, was ich am Anfang gesagt habe, daß nämlich die Ausdehnung auf eine bestimmte Anzahl von Partien nichts anderes bedeutet, als die verschiedenen Brüche auf den gleichen Nenner zu bringen. Das war in wenigen Worten das ganze Geheimnis, das uns zweifellos wieder in gutes Einvernehmen, setzen wird, weil wir beide nur die logisch begründete Wahrheit suchen.[6] ...

---

[6] (S): In einem dritten und abschließenden Abschnitt beschäftigt sich FERMAT mit zahlentheoretischen Problemen, die, wie der diese Diskussion abschließende Antwortbrief PASCALS vom 27. Oktober 1654 (Nr. LXXV; Oeuvres de Fermat Bd. 11, S. 314) bestätigt, außerhalb PASCALS Interessen lagen.

FERMAT hat in einem Brief an PASCAL vom 25. Juli 1660 (Nr. CVII; Oeuvres, de Fermat Bd, II, S. 450) nochmals versucht, mit PASCAL persönlich in Kontakt zu kommen; PASCAL hat diesen Versuch in seinem Antwortbrief vom 10. August 1660 (Nr. CVIII - Oeuvres de Fermat Bd. II, S. 450-452) endgültig abgewürgt mit der Bemerkung, daß die Mathematik für ihn nur noch ein Handwerk darstelle, für das er keine zwei Schritte mehr gehen würde.