Leonhard Euler

Auszug aus „Allgemeine Untersuchungen über die Sterblichkeit und Vermehrung des Menschengeschlechts“ (1760), 1767 [1]

Quelle: Euler, Leonhard: Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. - in: Leonhardi Euleri, Opera Omnia, Ser.1, Vol.7: Commentationes Algebraicae, hg. von Louis Gustave Du Pasquier, 1923. - S.79-112.
deutsche Übersetzung von Martina Kleinheinrich

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

1. Die Register der Geburten und Todesfälle pro Jahr, die in mehreren Ortschaften jedes Jahr veröffentlicht werden, liefern so viele verschiedene Fragen über die Sterblichkeit und Vermehrung des Menschengeschlechts, daß es zu lang dauern würde, sie alle aufzuzählen. Da aber die einen größtenteils von den anderen abhängen, sind, sobald ein oder zwei Fragen gelöst sind, die übrigen ebenfalls bestimmt. Da die Lösungen aus den erwähnten Registern gewonnen werden müssen, ist zu bemerken, daß diese Register sehr voneinander abweichen gemäß der Vielfalt der Städte, Dörfer und Provinzen, in denen sie erstellt wurden; und aus demselben Grund weichen die Lösungen dieser Fragen sehr voneinander ab gemäß der Register, auf denen sie basieren. Das ist der Grund, weshalb ich mich anbiete, die meisten dieser Fragen hier im allgemeinen zu behandeln ohne mich auf die Ergebnisse zu beschränken, die die Register eines bestimmten Ortes liefern; und folglich wird die Anwendung auf jeden gewünschten Ort leicht sein.

2. Zuerst beobachte ich, daß alle diese Fragen allgemein betrachtet von zwei Hypothesen abhängen; wenn diese bestimmt sind, ist es leicht, aus ihnen die Lösungen aller Fragen zu erhalten. Ich nenne die erste *Hypothese über die Sterblichkeit*, aus der man bestimmt, wieviele einer bestimmten Anzahl Menschen, die zum selben Zeitpunkt geboren wurden, nach jeder Zahl verstrichener Jahre noch leben. Hier geht die Überlegung über die Vermehrung gar nicht in die Rechnung ein, und folglich muß eine zweite Hypothese aufgestellt werden, die ich die *über die Vermehrung* nenne, und mit der ich bezeichne, um wieviel die Zahl aller Menschen zu- oder abgenommen hat im Verlauf eines Jahres. Diese Hypothese hängt daher von der Zahl der Heiraten und der Fruchtbarkeit ab, während die erste auf der Vitalität oder der Lebensfähigkeit, die den Menschen eigen ist, basiert.

---

[1] Euler, Leonhard: Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain, in: Leonhardi Euleri, Opera Omnia, Ser.1, Vol.7: Commentationes Algebraicae, hg. von Louis Gustave Du Pasquier, 1923, S.79-112
deutsche Übersetzung von Martina Kleinheinrich
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

I. Hypothese über die Sterblichkeit

3. Für die erste Hypothese stellen wir uns eine beliebige Anzahl N von Kindern vor, die zur gleichen Zeit geboren seien; und ich bezeichne die Anzahl derjenigen, die nach Ablauf eines Jahres noch leben, mit $(1)N$, derjenigen, die nach Ablauf von zwei Jahren noch leben, mit $(2)N$, von drei Jahren mit $(3)N$, von vier Jahren mit $(4)N$ und so weiter. Dies sind die allgemeinen Zeichen, die ich verwende, um zu bezeichnen, wie die Zahl der zur selben Zeit geborenen Menschen nach und nach abnimmt; die für jedes Klima und jede Lebensweise besondere Werte haben werden. Unterdessen kann man bemerken, daß die mit

$$(1),\quad (2),\quad (3),\quad (4),\quad (5)\quad \text{etc.}$$

bezeichneten Zahlen eine abnehmende Reihe von Brüchen bilden, von denen (1) der größte ist und kleiner als die Einheit; und wenn man diese Ausdrücke bis jenseits von 100 fortsetzt, nehmen sie so stark ab, daß sie fast vollständig verschwinden. Denn, wenn von 100 Millionen Menschen keiner das Alter von 125 Jahren erreicht, dann muß der Ausdruck (125) kleiner als $\frac{1}{100.000.000}$ sein.

4. Hat man für einen bestimmten Ort aus einer genügend großen Anzahl von Beobachtungen die Werte der Brüche (1), (2), (3), (4), etc. bestimmt, dann kann man zahlreiche Fragen beantworten, die man gewöhnlich über die Wahrscheinlichkeit des menschlichen Lebens stellt. Zuerst ist es offensichtlich, daß, wenn die Zahl der zur gleichen Zeit geborenen Kinder $= N$ ist, davon gemäß der Wahrscheinlichkeit jedes Jahr soviele sterben wie diese Tabelle anzeigt:

von	0	bis	1	Jahren	sterben	davon	$N-(1)N$,
„	1	„	2	„	„	„	$(1)N-(2)N$,
„	2	„	3	„	„	„	$(2)N-(3)N$,
„	3	„	4	„	„	„	$(3)N-(4)N$,
„	4	„	5	„	„	„	$(4)N-(5)N$

etc.

Und da von dieser Zahl N noch wahrscheinlich $(n)N$ nach Ablauf von n Jahren leben, muß die Zahl der Todesfälle vor Ende dieser n Jahre $= N-(n)N$ sein. Nach dieser Bemerkung werde ich die Lösung der folgenden Fragen angeben.

1. Frage

5. *Eine gewisse Anzahl Menschen, die alle dasselbe Alter haben, sei gegeben. Finde, wieviele davon nach einer gewissen Anzahl von Jahren wahrscheinlich noch leben.*

Nehmen wir an, es seien M Menschen, die dasselbe Alter m haben, gegeben und man frage, wieviele nach n Jahren wahrscheinlich noch leben. Man setzt

$$M=(m)N,$$

um $N=\dfrac{M}{(m)}$ zu erhalten, wobei N die Anzahl aller gleichzeitig geborenen Kinder bezeichnet, von denen nach m Jahren noch M leben. Nun werden von derselben Anzahl

$m+n$ Jahre nach ihrer Geburt wahrscheinlich noch $(m+n)N$ leben und folglich nach n Jahren seit der vorgegebenen Zeit. Also ist die in der Frage gesuchte Zahl

$$=\frac{(m+n)}{(m)}M\ ;$$

oder nach n Jahren gibt es wahrscheinlich noch soviele Lebende von M Menschen, die zur Zeit alle das Alter m haben.

Also ist es wahrscheinlich, daß von einer Anzahl Menschen, M, alle mit Alter m,

$$\left(1-\frac{(m+n)}{(m)}\right)M$$

vor Ablauf von n Jahren sterben.

2. Frage

6. *Bestimme die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mensch bestimmten Alters nach einer bestimmten Anzahl von Jahren noch lebt.*

•

•

3. Frage

7. *Man fragt nach der Wahrscheinlichkeit, daß ein Mensch bestimmten Alters im Verlauf eines gegebenes Jahres sterben wird.*

Der betrachtete Mensch habe das Alter m und man frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß er das Alter n erreicht, aber daß er stirbt, bevor er das Alter $n+1$ erreicht. Um diese Wahrscheinlichkeit zu bestimmen nehmen wir eine große Anzahl M von Menschen gleichen Alters, und mit $M=(m)N$ und $N=\frac{M}{(m)}$ erhalten wir $\frac{(n)}{(m)}M$ Menschen, die das Alter n erreichen, und $\frac{(n+1)}{(m)}M$, die das Alter $n+1$ Jahre erreichen. Es sterben davon im Verlauf dieses Jahres also wahrscheinlich

$$\frac{(n)-(n+1)}{(m)}M\ ;$$

und folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich der betrachtete Mensch unter dieser Zahl befindet

$$=\frac{(n)-(n+1)}{(m)}.$$

Daher ist offensichtlich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Mensch zwischen den Jahren n und $n+n$ seines Lebens stirbt,

$$=\frac{(n)-(n+n)}{(m)}.$$

Nun ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Mensch an einem bestimmten Tag im vorgegebenen Jahr stirbt,

$$=\frac{(n)-(n+1)}{365(m)}.$$

Wenn die Frage ein neugeborenes Kind betrifft, dann muß man nur 1 anstatt des Bruches (m) schreiben.

4. Frage

8. *Bestimme das Alter, das ein Mensch bestimmten Alters hoffen kann zu erreichen, so daß es gleichwahrscheinlich ist, daß er vorher oder nachher stirbt.*

Der betrachtete Mensch habe das Alter m, und dasjenige, das er hoffen kann zu erreichen, sei z, das zu bestimmen ist. Nun ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er dieses Alter erreicht, $=\frac{(z)}{(m)}$, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er vor diesem Zeitpunkt stirbt, $=1-\frac{(z)}{(m)}$. Da die eine und die andere Wahrscheinlichkeit gleich sein sollen, erhalten wir also diese Gleichung

$$\frac{(z)}{(m)}=1-\frac{(z)}{(m)},$$

und folglich $(z)=\frac{1}{2}(m)$, woraus leicht die Zahl z bestimmt werden kann, sobald man durch Beobachtungen die Werte aller Brüche

(1), (2), (3), (4), (5), (6) etc.

bestimmt hat, denn man wird denjenigen finden, (z), der gleich der Hälfte des gegebenen Bruches (m) ist.

Hat man diese Zahl z bestimmt, dann nennt man das Intervall $z-m$ *Lebenskraft* eines Menschen mit Alter m.

5. Frage

9. *Bestimme die Leibrente, die es gerecht ist, Menschen beliebigen Alters jährlich bis zu ihrem Tod zu bezahlen für einen Betrag, den sie zuvor aufgebracht haben.*

•
•

6. Frage

10. *Bestimme die Größe dieser Renten, wenn die Betroffenen neugeborene Kinder sind und die Auszahlung der Leibrente nicht beginnen soll, bevor sie ein bestimmtes Alter erreicht haben.*

•
•

11. Alle diese Fragen lassen sich folglich leicht beantworten, sobald man die Werte der Brüche (1), (2), (3), (4) etc. kennt, die sowohl vom Klima als auch der Lebensweise abhängen; außerdem hat man noch zu bemerken, daß diese Werte verschieden sind für die beiden Geschlechter, so daß man nichts im allgemeinen bestimmen kann. Man versteht aber leicht, daß, um sie aus den Beobachtungen zu folgern, eine große Anzahl nötig ist, die sich über alle Arten von Personen erstrecken; und in dieser Hinsicht darf man sich nicht der Register der Leibrenten bedienen, die mit den Kindern jenseits von einem Jahr beginnen. Denn erstens kann man diese Kinder nicht als neugeboren betrachten, und die meisten sind ohne Zweifel schon den Gefahren der ersten Monate entkommen; und folglich kümmert man sich nicht sehr oft um die Kinder mit schwächlicher Veranlagung, so daß man die Kinder, für die man die Leibrenten anlegt, als ausgewählt betrachten muß. Also sind die Werte unserer Brüche (1), (2), (3) etc., die man aus der Registern der Leibrenten erhält, unweigerlich zu groß, besonders in Hinblick auf die ersten Jahre. Unterdessen, da es nun einmal vielmehr nötig ist, die Renten über solche Register festzusetzen als über die wahre Sterblichkeit, füge ich die Werte unserer Brüche, wie man sie aus den Beobachtungen von Herrn Kersseboom erhält, bei.[2]

[2] Tabelle von Kersseboom am Ende des Textes angegeben

(1)	=	0,804	(25)	=	0,552	(49)	=	0,370	(73)	=	0,145
(2)	=	0,768	(26)	=	0,544	(50)	=	0,362	(74)	=	0,135
(3)	=	0,736	(27)	=	0,535	(51)	=	0,354	(75)	=	0,125
(4)	=	0,709	(28)	=	0,525	(52)	=	0,345	(76)	=	0,114
(5)	=	0,688	(29)	=	0,516	(53)	=	0,336	(77)	=	0,104
(6)	=	0,676	(30)	=	0,507	(54)	=	0,327	(78)	=	0,093
(7)	=	0,664	(31)	=	0,499	(55)	=	0,319	(79)	=	0,082
(8)	=	0,653	(32)	=	0,490	(56)	=	0,310	(80)	=	0,072
(9)	=	0,646	(33)	=	0,482	(57)	=	0,301	(81)	=	0,063
(10)	=	0,639	(34)	=	0,475	(58)	=	0,291	(82)	=	0,054
(11)	=	0,633	(35)	=	0,468	(59)	=	0,282	(83)	=	0,046
(12)	=	0,627	(36)	=	0,461	(60)	=	0,273	(84)	=	0,039
(13)	=	0,621	(37)	=	0,454	(61)	=	0,264	(85)	=	0,032
(14)	=	0,616	(38)	=	0,446	(62)	=	0,254	(86)	=	0,026
(15)	=	0,611	(39)	=	0,439	(63)	=	0,245	(87)	=	0,020
(16)	=	0,606	(40)	=	0,432	(64)	=	0,235	(88)	=	0,015
(17)	=	0,601	(41)	=	0,426	(65)	=	0,225	(89)	=	0,011
(18)	=	0,596	(42)	=	0,420	(66)	=	0,215	(90)	=	0,008
(19)	=	0,590	(43)	=	0,413	(67)	=	0,205	(91)	=	0,006
(20)	=	0,584	(44)	=	0,406	(68)	=	0,195	(92)	=	0,004
(21)	=	0,577	(45)	=	0,400	(69)	=	0,185	(93)	=	0,003
(22)	=	0,571	(46)	=	0,393	(70)	=	0,175	(94)	=	0,002
(23)	=	0,565	(47)	=	0,386	(71)	=	0,165	(95)	=	0,001
(24)	=	0,559	(48)	=	0,378	(72)	=	0,155			

Da nun aber diese Tabelle aufgrund ausgewählter Kinder aufgestellt wurde, die bereits einige Monate seit ihrer Geburt überlebt haben, muß man, wenn man sie auf alle neugeborenen Kinder einer Stadt oder Provinz anwenden will, alle diese Zahlen um einen gewissen Teil vermindern, um der großen Sterblichkeit Rechnung zu tragen, der die Kinder sogleich nach ihrer Geburt unterworfen sind. Aber wir erhalten diese Korrektur besser aus den Beobachtungen, die bereits die Vermehrung enthalten, die ich sogleich betrachten werde.

II. Hypothese über die Vermehrung

12. Es ist das Prinzip der Fortpflanzung, auf dem diese Hypothese beruht und demzufolge es ersichtlich ist, daß, wenn jedes Jahr genausoviele Kinder geboren werden wie Menschen sterben, die Anzahl aller Menschen immer dieselbe bleiben wird und es keine Vermehrung geben wird. Wenn aber die Anzahl der jährlich geborenen Kinder die der Toten übersteigt, liefert jedes Jahr eine Zunahme der Anzahl der Lebenden, die gleich ist dem Überschuß der Geborenen über die Toten. Folglich wandelt sich diese Zunahme in eine Abnahme um, sobald die Anzahl der Toten die der Geborenen übersteigt. Daher haben wir drei Fälle zu betrachten: den ersten, in dem die Anzahl der Menschen immer konstant bleibt; den zweiten, in dem sie jährlich zunimmt; und den dritten, in dem sie jährlich abnimmt. Wenn also M die Anzahl aller gegenwärtig lebenden Menschen bezeichnet und mM die Anzahl derjenigen, die im folgenden Jahr leben, dann tritt der erste Fall für $m = 1$ ein, der zweite für $m > 1$ und der dritte für $m < 1$, so daß alle diese Fälle im allgemeinen Koeffizienten m enthalten sind.

13. Hat man nun das Prinzip der Fortpflanzung bestimmt, dann ist es ersichtlich, daß die Anzahl der Kinder, die im Verlauf eines Jahres geboren werden, in einem bestimmten Verhältnis zur Anzahl aller lebenden Menschen stehen muß. Daraus ergibt sich, daß, wenn die

Anzahl der Lebenden immer dieselbe bleibt, jedes Jahr die gleiche Anzahl Kinder geboren wird; und wenn die Anzahl der Lebenden zu- oder abnimmt, muß die Anzahl der Geburten auf dieselbe Art zu- oder abnehmen. Folglich kann man daraus bestimmen, ob die Anzahl aller Menschen immer gleich bleiben wird oder ob sie zunehmen oder abnehmen wird, indem man die Anzahl aller Geburten während mehrerer aufeinanderfolgender Jahre vergleicht - je nachdem, ob diese Zahl konstant bleibt oder zu- oder abnimmt. Fügt man dem das Prinzip der Sterblichkeit hinzu, dann ist außerdem klar, daß die Anzahl der Sterbenden während eines Jahres in einem bestimmten Verhältnis sowohl zur Anzahl der Lebenden als auch zur Anzahl der Geborenen stehen muß.

14. Da diese beiden Prinzipien der Sterblichkeit und der Fortpflanzung unabhängig voneinander sind und da ich bereits das erste unabhängig vom zweiten betrachtet habe, kann man auch das zweite vorstellen ohne dabei das erste damit zu vermischen. Nimmt man also für die Anzahl der gleichzeitig Lebenden M an, dann kann man für die Anzahl der Kinder, die in einem Jahr geboren werden, aM setzen, so daß a das Maß für die Fortpflanzung bzw. die Fruchtbarkeit ist. Aber es ist schwer, aus diesen Annahmen Folgerungen über die Vermehrung und die anderen Phänomene, die von ihnen abhängen, zu erhalten. Diese Überlegung wird verständlicher werden, wenn wir in unsere Rechnung zunächst die Anzahl der Kinder einführen, die jährlich geboren werden, und aus der wir durch Hinzunahme der Hypothese über die Sterblichkeit den Wert von a bestimmen können. Also hängt die Anzahl der Geburten gleichzeitig von den beiden Hypothesen über die Sterblichkeit und über die Fruchtbarkeit ab; und daraus kann man schließlich ohne Schwierigkeiten die Lösung aller anderen Fragen finden, die man gewöhnlich bei der Behandlung dieses Themas stellt.

15. So wie ich annehme, daß das Gesetz der Sterblichkeit immer dasselbe bleibt, werde ich eine ähnliche Konstanz der Fruchtbarkeit annehmen; und zwar so, daß die Anzahl der jährlich geborenen Kinder proportional zur Anzahl aller Lebenden ist. Folglich wird man jedes Jahr dieselbe Anzahl Geburten haben, wenn die Anzahl der Lebenden dieselbe bleibt; und wenn die Anzahl aller Lebenden zu- oder abnimmt, nimmt die Anzahl der jährlichen Geburten auf dieselbe Art zu oder ab.
Sei nun N die Anzahl der Kinder, die im Verlauf eines Jahres geboren werden, und nN diejenige der im folgenden Jahr geborenen Kinder; da die Ursache für die Änderung der Anzahl N nach nN weiterbesteht, muß von einem beliebigen Jahr zum folgenden die Anzahl der Geburten im Verhältnis 1 zu n zunehmen. Folglich werden im dritten Jahr n^2N, im vierten n^3N, im fünften n^4N usw. geboren; oder anders ausgedrückt bilden die Anzahlen der jährlichen Geburten eine geometrische Reihe, die entweder zu- oder abnimmt oder konstant bleibt, je nachdem ob $n > 1$ oder $n < 1$ oder $n = 1$.

16. Wir nehmen nun an, daß in einer Stadt oder Provinz die Anzahl der in diesem Jahr geborenen Kinder $= N$ sei und die derjenigen, die im nächsten Jahr geboren werden, $= nN$ usw. gemäß dieser Progression:

	Zahl der Geburten
gegenwärtig	N,
nach einem Jahr	nN,
nach zwei Jahren	n^2N,
nach 3 Jahren	n^3N,
nach 4 Jahren	n^4N

etc.,

und wenn wir annehmen, daß nach 100 Jahren keiner der Menschen, die gegenwärtig leben, noch lebt, dann wird es nach 100 Jahren keine anderen Lebenden geben als die, die noch von diesen Geburten leben. Nimmt man die Hypothese über die Sterblichkeit hinzu, dann kann man die Anzahl aller Menschen bestimmen, die nach 100 Jahren leben werden. Und da in diesem Jahr $n^{100}N$ geboren werden, kann man das Verhältnis der Geburten zur Anzahl aller Lebenden bestimmen.

17. Um dieses zu verdeutlichen betrachten wir, wieviele Menschen nach 100 Jahren von den Geburten der vorhergehenden Jahre noch leben.

	Zahl der Geburten	Nach 100 Jahren leben davon noch
gegenwärtig	N	$(100)\ N$
nach 1 Jahr	nN	$(99)nN$
nach 2 Jahren	n^2N	$(98)n^2N$
nach 3 Jahren	n^3N	$(97)n^3N$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
nach 98 Jahren	$n^{98}N$	$(2)n^{98}N$
nach 99 Jahren	$n^{99}N$	$(1)n^{99}N$
nach 100 Jahren	$n^{100}N$	$n^{100}N$

Folglich ist die Anzahl der Lebenden nach 100 Jahren

$$=n^{100}N\left(1+\frac{(1)}{n}+\frac{(2)}{n^2}+\frac{(3)}{n^3}+\frac{(4)}{n^4}+\frac{(5)}{n^5}+\dots\right).$$

18. Die Terme dieser Serie verschwinden schließlich aufgrund der Hypothese über die Sterblichkeit; und da die Anzahl aller Lebenden in einem bestimmten Verhältnis zur Anzahl der Geburten im Verlauf eines Jahres steht und die Vermehrung von einem Jahr zum nächsten wie 1 zu n angenommen wurde, erhalten wir dieses Verhältnis. Denn wenn die Anzahl aller Lebenden $=M$ ist und die Anzahl aller Kinder, die von diesen in einem Jahr gezeugt werden, $=N$ gesetzt wird, erhalten wir

$$\frac{M}{N}=1+\frac{(1)}{n}+\frac{(2)}{n^2}+\frac{(3)}{n^3}+\frac{(4)}{n^4}+\frac{(5)}{n^5}+\dots$$

Folglich, wenn wir das Verhältnis $\frac{M}{N}$ kennen und dem die Hypothese über die Sterblichkeit oder die Werte der Brüche (1), (2), (3), (4) etc. hinzufügen, dann ist durch diese Gleichung das Verhältnis der Vermehrung, $1:n$, von einem Jahr zum anderen bestimmt. Jedoch erkennt man gut, daß diese Bestimmung nicht im allgemeinen durchgeführt werden kann; wenn man aber für jede einzelne Hypothese über die Sterblichkeit das Verhältnis $\frac{M}{N}$ für mehrere Werte von n berechnet und daraus eine Tabelle erstellt, dann wird es leicht sein, für jedes Verhältnis $\frac{M}{N}$, das ein Ausdruck für die Fruchtbarkeit ist, die jährliche Zunahme aller Lebenden zu bestimmen, die dieselbe ist wie die der Geburten.

19. Nehmen wir an, daß die Hypothese über die Sterblichkeit oder die Brüche

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4),\ (5)\ \text{etc.}$$

bekannt seien ebenso wie die Hypothese über die Fruchtbarkeit oder das Verhältnis aller Lebenden, M, zur Zahl der Kinder, N, die von ihnen innerhalb eines Jahres gezeugt werden;

man wird daraus erkennen, ob die Anzahl der Lebenden unveränderlich bleibt oder ob sie zu- oder abnehmen wird. Denn wenn wir die Anzahl aller Lebenden im folgenden Jahr $=nM$ setzen und diejenige der gegenwärtig Lebenden $=M$, dann muß man den Wert von n aus der gefundenen Gleichung

$$\frac{M}{N}=1+\frac{(1)}{n}+\frac{(2)}{n^2}+\frac{(3)}{n^3}+\frac{(4)}{n^4}+\frac{(5)}{n^5}+\ldots$$

bestimmen. Angenommen die Lösung dieser Gleichung ist bekannt, dann ist es egal, ob man die Fruchtbarkeit $\frac{M}{N}$ oder die Vermehrung $1:n$ kennt, die eine ist durch die andere festgelegt durch die Hypothese über die Sterblichkeit.

1. Frage

20. *Die Hypothesen über die Sterblichkeit und die Fruchtbarkeit seien gegeben. Wenn man die Anzahl aller Lebenden kennt, dann bestimme, wieviele es in jedem Alter gibt.*

Sei M die Anzahl aller Lebenden und N die Anzahl der Kinder, die von ihnen in einem Jahr gezeugt werden; durch die Hypothese über die Sterblichkeit kennt man das Verhältnis der jährlichen Zunahme $1:n$. Nun ist bei bekanntem n aber leicht aus §17 zu schließen, daß unter der Anzahl M

N neugeborene Kinder,

$\frac{(1)}{n}N$ im Alter von einem Jahr,

$\frac{(2)}{n^2}N$ im Alter von zwei Jahren,

$\frac{(3)}{n^3}N$ im Alter von 3 Jahren,

$\frac{(4)}{n^4}N$ im Alter von 4 Jahren

und allgemein

$\frac{(a)}{n^a}N$ im Alter von a Jahren

sind. Die Summe von allen diesen Zahlen ist aber insgesamt $=M$.

2. Frage

21. *Es seien dieselben Größen gegeben. Bestimme die Anzahl der Menschen, die in einem Jahr sterben.*

Sei M die Anzahl der Menschen, die gegenwärtig leben, darin enthalten die Kinder, die in diesem Jahr geboren werden, deren Anzahl $=N$ sei; der Quotient $\frac{M}{N}$ bestimmt die jährliche Zunahme, die $1:n$ sei. Daher wird die Anzahl der Lebenden im nächsten Jahr $=nM$ sein, die die Anzahl der Neugeborenen $=nN$ enthält. Die anderen, deren Anzahl $nM-nN$ ist, sind diejenigen, die noch vom vorhergehenden Jahr leben, deren Anzahl $=M$ ist; daraus folgt, daß

$$(1-n)M+nN$$

gestorben sind. Wenn also die Anzahl der Lebenden $=M$ ist, dann sterben davon im Verlauf eines Jahres $(1-n)M+nN$ während in derselben Zeit N Kinder geboren werden.

3. Frage

22. *Es sei sowohl die Anzahl der Geburten als auch die der Begräbnisse, die im Verlauf eines Jahres stattfinden, bekannt. Bestimme die Anzahl aller Lebenden und ihre jährliche Zunahme für eine gegebene Hypothese über die Sterblichkeit.*

Sei N die Anzahl der Geburten und O die Anzahl der Begräbnisse, die in einem Jahr stattfinden; ferner setzen wir die Anzahl aller Lebenden $= M$ und die jährliche Zunahme $= 1 : n$. Die vorhergehende Antwort liefert uns die Gleichung

$$O = (1-n)M + nN \,.$$

Die Hypothese der Sterblichkeit liefert aber

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \dots$$

Substituiert man aus der ersten Gleichung

$$M = \frac{O - nN}{1-n}$$

in die andere Gleichung, dann erhält man

$$\frac{O-N}{N(1-n)} = \frac{N-O}{N(n-1)} = \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \dots,$$

woraus man den Wert von n bestimmen muß.

•
•

23. Beweis: Zahl der Todesfälle $\begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix}$ Zahl der Geburten $\Rightarrow n \begin{pmatrix} < \\ = \\ > \end{pmatrix} 1$

•
•

4. Frage

24. *Die Anzahl der Geburten und der Begräbnisse eines Jahres sei gegeben. Bestimme, wieviele von jedem Alter unter den Toten sind.*

Sei N die Anzahl der während eines Jahres geborenen Kinder und O die Anzahl der Gestorbenen; aus der vorhergehenden Frage erhält man die Anzahl aller Lebenden, M, und die Zunahme von einem Jahr zum anderen $1 : n$. Daraus bestimmen wir, wieviele Menschen jeden Alters sowohl in diesem Jahr als auch im nächsten Jahr leben.

Anzahl	dieses Jahr	nächstes Jahr
der Neugeborenen	N	nN
im Alter von einem Jahr	$\frac{(1)}{n} N$	$(1) N$
im Alter von zwei Jahren	$\frac{(2)}{n^2} N$	$\frac{(2)}{n} N$
im Alter von drei Jahren	$\frac{(3)}{n^3} N$	$\frac{(3)}{n^2} N$
etc.		etc.

Daraus ist ersichtlich, daß im Verlauf dieses Jahres sterben:

	Anzahl der Toten
unterhalb eines Jahres	$(1-(1))\,N$,
zwischen 1 und zwei Jahren	$((1)-(2))\dfrac{N}{n}$,
zwischen 2 und 3 Jahren	$((2)-(3))\dfrac{N}{n^2}$,
zwischen 3 und 4 Jahren	$((3)-(4))\dfrac{N}{n^3}$,
zwischen 4 und 5 Jahren	$((4)-(5))\dfrac{N}{n^4}$

etc.,

•

•

25. Bestimmung der Altersstruktur der Toten eines Jahres aus der Anzahl der Geburten, n und der Hypothese über die Sterblichkeit ((1), (2), (3),...)

•

•

5. Frage

26. *Sei die Anzahl aller Lebenden bekannt, ebenso die Anzahl aller Geburten und Todesfälle jeden Alters im Verlauf eines Jahres. Bestimme das Gesetz der Sterblichkeit.*

Sei M die Anzahl aller Lebenden, N diejenige der Geburten und O die der Begräbnisse im Verlauf eines Jahres; daher kennt man die jährliche Zunahme

$$n = \frac{M - O}{M - N}.$$

Sei ferner aus der vorhergehenden Frage die Anzahl der Toten in diesem Jahr

unterhalb eines Jahres	$\alpha = (1-(1))\,N$,
zwischen 1 und zwei Jahren	$\beta = ((1)-(2))\dfrac{N}{n}$,
zwischen 2 und 3 Jahren	$\gamma = ((2)-(3))\dfrac{N}{n^2}$,
zwischen 3 und 4 Jahren	$\delta = ((3)-(4))\dfrac{N}{n^3}$,

etc.

Daraus findet man die Brüche (1), (2), (3) etc., die das Gesetz der Sterblichkeit enthalten,

$$(1) = 1 - \frac{a}{N},$$

$$(2) = (1) - \frac{nb}{N} = 1 - \frac{a+nb}{N},$$

$$(3) = (2) - \frac{n^2 g}{N} = 1 - \frac{a+nb+n^2 g}{N},$$

$$(4) = (3) - \frac{n^3 d}{N} = 1 - \frac{a+nb+n^2 g+n^3 d}{N}$$

27. Dies ist eine bessere Art als die der Leibrenten zur Bestimmung des Gesetzes der Sterblichkeit; diese Bestimmung wird am einfachsten, wenn man eine Stadt oder Provinz wählt, in der die Anzahl der Begräbnisse gleich ist derjenigen der Taufen, so daß $n=1$, denn dann genügt die Kenntnis der Anzahl der Toten jeden Alters. Man muß aber anmerken, daß ein solches Gesetz der Sterblichkeit nur auf die Stadt oder Provinz angewendet werden darf, für die man es erhalten hat. In anderen Ländern kann ein ganz anderes Gesetz gelten; man hat speziell beobachtet, daß in großen Städten die Sterblichkeit größer ist als in kleinen und in diesen größer als in Dörfern. Wenn man sich die Mühe macht, sowohl das Gesetz der Sterblichkeit als auch das der Fruchtbarkeit für mehrere Orte aufzustellen, dann kann man daraus zahlreiche sehr wichtige Schlüsse ziehen.

28. Man muß aber auch noch bemerken, daß ich in dem Kalkül, den ich soeben entwickelt habe, angenommen habe, daß die Anzahl aller Lebenden eines Ortes dieselbe bleibt oder gleichförmig zu- oder abnimmt, so daß man sowohl außergewöhnliche Verwüstungen wie Pest, Krieg oder Hungersnot als auch ungewöhnliches Wachstum wie von neuen Kolonien ausschließen muß. Es wäre außerdem gut, einen solchen Ort zu wählen, an dem alle Geborenen im Land bleiben und zu dem keine Fremden kommen, um dort zu leben und sterben, was die Prinzipien umstoßen würde, auf denen ich die vorhergehenden Rechnungen begründet habe. Für die Orte, die solchen Unregelmäßigkeiten unterworfen sind, müssen genaue Register sowohl aller Lebenden als auch Toten geführt werden, und man erhält, den Prinzipien folgend, die ich soeben aufgestellt habe, ein auf denselben Kalkül anwendbares Verzeichnis. Alles führt immer auf diese beiden Prinzipien, das der Sterblichkeit und das der Fruchtbarkeit. Sind diese einmal für einen bestimmten Ort aufgestellt, dann ist es nicht schwer, all die Fragen zu lösen, die man zu diesem Thema stellen kann, wobei ich mich damit begnüge, die Grundlagen berichtet zu haben.

29. Ich habe diese Fragen nur allgemein behandelt, ohne sie auf irgendeinen besonderen Ort einzuschränken; um daraus allen Nutzen zu ziehen, hängt nun aber alles von einer großen Anzahl an mehreren verschiedenen Orten gemachter Beobachtungen sowohl der Anzahl aller Lebenden und Geborenen während eines oder mehrerer Jahre als auch der Anzahl der Toten zusammen mit ihrem Alter ab. Da dies ein sehr schwer auszuführender Gegenstand ist, sind wir Herrn Süßmilch, Berater des Obersten Kirchenrates, zu großem Dank verpflichtet, der nach Überwindung fast unüberwindbarer Hindernisse uns eine so große Anzahl solcher Beobachtungen liefert, daß sie ausreichend erscheinen, um die Mehrzahl der Fragen, die sich in dieser Untersuchung stellen, zu lösen. Und in der Tat hat er selbst bereits soviele wichtige Schlüsse daraus gezogen, daß wir hoffen können, daß er mit seinen Bemühungen diese Wissenschaft zum höchsten Grad der Perfektion führen wird, der möglich ist.

Sterblichkeitstafel von Kersseboom (1691-1771), vom Herausgeber der *Opera Omnia* angefügt

Alter x	Anzahl der Überlebenden l_x	Alter x	Anzahl der Überlebenden l_x	Alter x	Anzahl der Überlebenden l_x	Alter x	Anzahl der Überlebenden l_x
0	1400						
1	1125	26	760	51	495	76	160
2	1075	27	747	52	482	77	145
3	1030	28	735	53	470	78	130
4	993	29	723	54	458	79	115
5	964	30	711	55	446	80	100
6	947	31	699	56	434	81	87
7	930	32	687	57	421	82	75
8	913	33	675	58	408	83	64
9	904	34	665	59	395	84	55
10	895	35	655	60	382	85	45
11	886	36	645	61	369	86	36
12	878	37	635	62	356	87	28
13	870	38	625	63	343	88	21
14	863	39	615	64	329	89	15
15	856	40	605	65	315	90	10
16	849	41	596	66	301	91	7
17	842	42	587	67	287	92	5
18	835	43	578	68	273	93	3
19	826	44	569	69	259	94	2
20	817	45	560	70	245	95	1
21	808	46	550	71	231		
22	800	47	540	72	217		
23	792	48	530	73	203		
24	783	49	518	74	189		
25	772	50	507	75	175		