Pierre de Fermat

Auszug aus „Abhandlungen über Maxima und Minima“
(1629)

Quelle: Pierre de Fermats Abhandlungen über Maxima und Minima (1629). Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Max Miller. Leipzig: Akademische Verlagsanstalt 1934. Ostwald’s Klassiker der exakten Wissenschaften, Leipzig: Akademische Verlagsanstalt 1934

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

I. Die Methode zur Bestimmung eines Maximums und Minimums.

Die gesamte Lehre von der Bestimmung eines Maximums und Minimums beruht darauf, daß man [für die Größe, die ein Maximum oder Minimum werden soll] zwei algebraische Ansätze macht, indem man folgende Regel - die einzige, die hier in Betracht kommt - anwendet:
Man setze für irgendeine Größe der Aufgabe die Bezeichnung *A* fest und zwar sei diese, entsprechend der Aufgabe, der man zu genügen hat, eben, körperlich oder linear [1]; hat man nun für das Maximum oder Minimum einen Ansatz gefunden, der aus Gliedern, die irgendwie *A* oder Potenzen von *A* enthalten, besteht, so setze man an Stelle der vorhin mit *A* bezeichneten Größe den Ausdruck $A+E$, um somit einen zweiten Ansatz für das Maximum oder Minimum zu gewinnen, der aus Gliedern, die irgendwie Potenzen von *A* und *E* enthalten, besteht. Sodann setze man, wie Diophant sagt, die beiden das Maximum oder Minimum ausdrückenden Gleichungen einander näherungsweise gleich [2], lasse die Glieder, die beiden Seiten gemeinsam sind, weg (ist dies geschehen, so enthalten sämtliche Glieder auf beiden Seiten *E* bzw. Potenzen von *E* als Faktoren) und dividiere alles durch *E* bzw. eine Potenz von *E*, bis auf einer Seite irgendein Glied *E* überhaupt nicht mehr als Faktor enthält. Hierauf streiche man beiderseits die Glieder, die noch irgendwie *E* oder Potenzen von *E* enthalten und setze die noch übrigen Glieder einander gleich, oder, falls auf einer Seite nichts mehr übrig ist, so setze man die negativen Glieder gleich den positiven, was ja auf dasselbe hinauskommt. Die Lösung dieser Endgleichung ergibt einen Wert für *A*, hat man diesen gefunden, so wird man das Maximum oder Minimum erhalten, indem man dem Weg der Lösung folgend, [den gefundenen *A* -Wert] rückwärts einsetzt.

Wir lassen ein Beispiel folgen: Die Strecke *A C* (Fig. 1) ist im Punkte *E* so zu teilen, daß das Rechteck *A E C* ein Maximum wird [3].

---

[1] Fermat bedient sich hier der antiken Bezeichnungsweise: „Ebene“ Aufgaben führen auf quadratische Gleichungen, „körperliche“ Aufgaben entsprechen den kubischen Problemen, während lineare Aufgaben auf höhere Kurven bzw. Gleichungen sich zurückführen lassen.

[2] Diophant gebraucht das Wort „Näherungsverfahren“ (Arithm.V, 14 und 17) in anderem Sinne als hier Fermat, der in den weiteren Ausführungen die Regeln zur Bestimmung von Extremwerten mitteilt. Die Fundierung der Differentialrechnung durch strenge Grenzwertbetrachtungen war Fermat durchaus fremd.

[3] Man setze $AE = x$ und $AC = a$, dann soll $x \cdot (a - x)$ ein Maximum werden. Es ergibt sich als Lösung $x = \frac{a}{2}$.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Fig.1[*]

Die Strecke $A\ C$ sei mit B bezeichnet, für den einen Teil von B setzen wir etwa A, also ist der noch übrige [Teil von B] gleich B — A und das aus den beiden Abschnitten gebildete Rechteck gleich $B \cdot A - A^2$, hierfür soll der größte Wert gefunden werden. Setzen wir für den einen Teil von B neuerdings $A + E$, so ist der noch übrige Teil gleich B — A — E und das aus den beiden Abschnitten gebildete Rechteck gleich

$$B \cdot A - A^2 + B \cdot E - 2A \cdot E - E^2,$$

dies ist näherungsweise [4] gleichzusetzen obigem Rechteck

$$B \cdot A - A^2.$$

Nach Wegfall der gemeinsamen Glieder erhält man

$$B \cdot E \approx 2A \cdot E + E^2.$$

Wird alles durch E dividiert so bleibt

$$B \approx 2A + E.$$

Wird E gestrichen, so ergibt sich

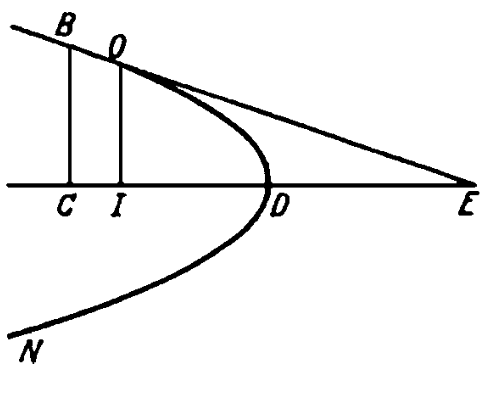
$$B = 2A.$$

Also ist zur Lösung der Aufgabe B zu halbieren. Eine allgemeinere Methode kann man wohl nicht angeben.

Tangenten an Kurven.

Auf obige Methode führen wir auch die Bestimmung von Tangenten [5] in gegebenen Punkten bei irgendwelchen Kurven zurück.

Es sei z. B. die Parabel *BDN* (Fig. 2) mit dem Scheitel D und dem Durchmesser *DC,* ferner auf ihr der Punkt B gegeben, durch den die Gerade *BE* zu legen ist, welche die Parabel berührt und den Durchmesser im Punkte E schneidet.



[*] In dem der Übersetzung zugrunde gelegten lateinischen Text von Bd.I „Oevres de Fermat“ Paris 1891, S.133-179 sind die Figuren dieses Werkes von 91-110 numeriert.

[4] Um das Verständnis der Schrift nicht unnötig zu erschweren, wurden, soweit dies notwendig erschien, die erst später eingeführten Zeichen für die Gleichungen verwendet. Fermat benutzte weder ein Gleichheitszeichen, noch ein Zeichen für näherungsweise Gleichheit ($\approx$).

[5] Die hier mit Hilfe der Theorie der Maxima und Minima abgeleitete Tangentenkonstruktion für die Parabel fanden auf geometrischem Wege schon Apollonius (Kegelschn.I, 33) und Archimedes (Quadrat. D. P. §2).

Fig. 2

Nimmt man nun auf der Geraden BE irgendeinen Punkt an und zieht von ihm aus die Ordinate OJ, vom Punkt B aus aber die Ordinate BC, so ist [6]:

$$\overline{CD} : \overline{DJ} > \overline{BC}^2 : \overline{OJ}^2 ,$$

da ja Punkt O außerhalb der Parabel liegt; wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ist jedoch:

$$\overline{BC}^2 : \overline{OJ}^2 = \overline{CE}^2 : \overline{JE}^2 ,$$

also ist auch

$$\overline{CD} : \overline{DJ} > \overline{CE}^2 : \overline{JE}^2 .$$

Da aber Punkt B gegeben ist, ist auch die Ordinate BC und somit auch Punkt C, sowie [auch] CD bestimmt: CD sei nun gleich der gegebenen Strecke D, ferner setzen wir etwa CE gleich A und CJ gleich E. Dann ist also:

$$D : (D - E) > A^2 : (A^2 + E^2 - 2A \cdot E).$$

Durch Multiplikation der inneren bzw. äußeren Glieder miteinander ergibt sich:

$$D \cdot A^2 + D \cdot E^2 - 2D \cdot A \cdot E > D \cdot A^2 - A^2 \cdot E .$$

Setzt man nun nach obiger Methode [die Gleichungen] einander näherungsweise gleich und läßt die gemeinsamen Glieder weg, so erhält man:

$$D \cdot E^2 - 2D \cdot A \cdot E \approx -A^2 \cdot E ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$D \cdot E^2 + A^2 \cdot E \approx 2D \cdot A \cdot E .$$

Hierauf dividiere man alles durch E; also:

$$D \cdot E + A^2 \approx 2D \cdot A$$

und streiche $D \cdot E$, dann ist

$$A^2 = 2D \cdot A$$

oder

$$A = 2D .$$

Wir haben somit dargetan, daß CE gleich dem Doppelten von CD ist, wie dies auch tatsächlich der Fall ist.

Die Methode versagt nie; sie kann sogar auf eine große Anzahl sehr schöner Aufgaben ausgedehnt werden; mit ihrer Hilfe finden wir die Schwerpunkte von Figuren, die von Kurven und Geraden begrenzt sind, sowie auch von Körpern und noch vieles anderes, worüber wir vielleicht noch ein andermal berichten werden, wenn wir dazu Muse finden.

Die Quadraturen von Flächen, die von Kurven und Geraden begrenzt sind, ferner die Verhältnisse, in denen die hieraus entstandenen Körper zu Kegeln mit derselben

---

[6] Lautet die Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$ und sind (x_1 y_1), ($x_2 y_2$) zwei auf ihr liegende Punkte, so ist $x_1 : x_2 = y_1^2 : y_2^2$. Nimmt man für y_2 einen größeren Wert y_2', so verwandelt sich obige Gleichung in die Ungleichung $x_1 : x_2 > y_1 : y_2'^2$.

Grundfläche und Höhe stehen, haben wir bereits ausführlich mit Herrn von Roberval [7] behandelt.

II. Der Schwerpunkt des parabolischen Conoids, nach derselben Methode.

CBAV (Fig. 3) sei ein parabolisches Conoid, *JA* sei seine Achse und der Kreis mit dem Durchmesser *CJV* seine Grundfläche. Es soll nun nach ebenderselben stets gültigen Methode, die wir bisher zur Bestimmung des Maximums und Minimums, sowie auch zur Ermittlung von Kurventangenten verwendet haben, der Schwerpunkt [dieses parabolischen Conoids] gesucht werden, auf daß durch neue Beispiele und eine neue, noch dazu sehr merkwürdige Anwendung der Irrtum derer, welche die Methode für unrichtig halten, offenbar werde.

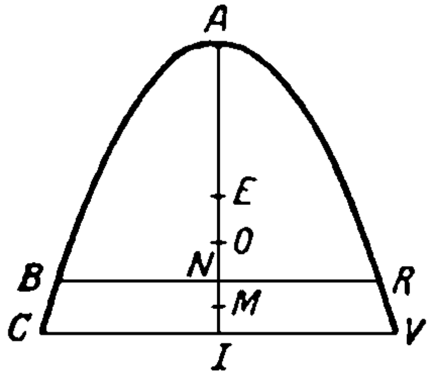


Fig. 3

Zum Zwecke der Analysis werde die Achse *JA* mit *B* bezeichnet; der Schwerpunkt sei *O* und die gesuchte Strecke *AO* werde etwa *A* genannt; nun werde die Achse *JA* mit irgendeiner Ebene, z. B. *BN*, zum Schnitt gebracht und für *JN* etwa die Bezeichnung *E* gesetzt: Dann ist also *NA* gleich *B* — *E*.

Für diese Figur, sowie auch für ähnliche (Parabeln und parabolische) Figuren gilt der Satz, daß die Schwerpunkte die Achsen in dem Verhältnis der Strecken, die durch die Parallelen zur Grundlinie abgeschnitten werden, teilen (für die Parabel wurde der Beweis hierfür von Archimedes [8] erbracht, er läßt sich aber, wie ersichtlich, in ganz analoger Weise auf sämtliche Parabeln und parabolische Conoide ausdehnen): Demnach wird der Schwerpunkt, der beispielsweise im Punkt *E* liegen möge und zu dem Teilstück gehören soll, dessen Achse *NA* und dessen Grundfläche der Kreis mit dem Halbmesser *BN* ist, die Strecke *AN* so teilen, dass

$$\overline{NA} : \overline{AE} = \overline{JA} : \overline{AO} \text{ ist.}$$

Daher erhalten wir in den eingeführten Bezeichnungen

$$B : A = (B - E) : \overline{AE}\,,$$

der Achsenabschnitt *AE* ist demnach gleich

$$\frac{A \cdot B - A \cdot E}{B}\,,$$

[7] Diese Bemerkung bezieht sich auf einige Briefe Fermats an Roberval.

[8] Archimedes schrieb unter anderem ein Buch über Conoide und Sphaeroide, ferner eine Abhandlung über das Gleichgewicht ebener Flächen, in der er (II, 7) den von Fermat angeführten Satz ableitet. Ist in Fig. 3 *E* der Schwerpunkt des Segmentes *BNRA* und *O* der des Segmentes *CJVA*, so gilt also:

$$NA : JA = EA : OA$$

ferner ist die Strecke O, d.i. der Abstand zwischen den beiden Schwerpunkten, gleich

$$\frac{A \cdot E}{B}.$$

Der Schwerpunkt des noch übrigen Teilstückes $CBRV$ sei etwa M, er muß notwendigerweise zwischen den Punkten N und J, also innerhalb der Figur liegen gemäß Postulat 9 der Archimedischen Schrift [9] über die Gleichgewichte ebener Flächen, da die Figur $CBRV$ stets nach derselben Seite konkav ist. Es ist aber:

$$CBRV : BAR = \overline{EO} : \overline{OM}$$

da O der Schwerpunkt von der ganzen Figur CAV und die Punkte E und M die Schwerpunkte der [einzelnen] Teile sind ; das Teilstück CAV verhält sich zu dem Teilstück BAR in unserem Archimedischen Conoid [10], wie das Quadrat über JA zu dem Quadrate über NA, d. h. in den eingeführten Bezeichnungen; wie

$$B^2 : \left(B^2 + E^2 - 2B \cdot E\right),$$

indem man dividiert, erhält man

$$\text{Teilstück } CRBV\text{: Teilstück } BAR = \left(2B \cdot E - E^2\right) : \left(B^2 + E^2 - 2B \cdot E\right).$$

Wir haben aber gezeigt, daß das Teilstück $CBRV$ sich zum Teilstück BAR wie $\overline{OE}$ zu $\overline{OM}$ verhält, daher ist, wenn wir uns der [eingeführten] Bezeichnungen bedienen:

$$\left(2B \cdot E - E^2\right) : \left(B^2 + E^2 - 2B \cdot E\right) = \overline{OE} : \overline{OM} = \frac{A \cdot E}{B} : \overline{OM}.$$

Die Strecke $\overline{OM}$ ist deshalb gleich

$$\frac{B^2 \cdot A \cdot E + A \cdot E^3 - 2B \cdot A \cdot E^2}{2B^2 \cdot E - B \cdot E^2}.$$

Da aber Punkt M, wie [bereits] bewiesen, zwischen den Punkten N und J liegt und demnach also die Strecke $\overline{OM}$ kleiner als die Strecke $\overline{OJ}$ ist, für die wir die Bezeichnung $B — A$ eingeführt haben, ist die Aufgabe auf die Methode [der Maxima und Minima] zurückgeführt und es ist $B — A$ näherungsweise gleich

$$\frac{B^2 \cdot A \cdot E + A \cdot E^3 - 2B \cdot A \cdot E^2}{2B^2 \cdot E - B \cdot E^2}$$

zu setzen.

Bringt man alles auf den gleichen Nenner und dividiert durch E, so erhält man die Näherungsgleichung:

$$2B^3 - 2B^2 \cdot A - B^2 \cdot E + B \cdot A \cdot E \approx B^2 \cdot A + A \cdot E^2 - 2B \cdot A \cdot E.$$

Da nun Ausdrücke, die beiden Seiten gemeinsam sind, nicht vorhanden sind, streiche man alle Glieder, in denen E vorkommt und setze die übrigen einander gleich : Es ist also

$$2B^3 - 2B^2 \cdot A = B^2 \cdot A$$

oder

$$3A = 2B.$$

[9] Archimedes, Über das Gleichgewicht ebener Flächen I, Einleitung: Ist der Umfang einer Figur stets nach derselben Seite konkav, so liegt der Schwerpunkt der Figur innerhalb derselben.

[10] Diese Bezeichnung geht auf Archimedes Schrift über Conoide und Spaeroide (Satz 26) zurück.

Wir haben demnach:

$$\overline{JA} : \overline{AO} = 3 : 2$$

und

$$\overline{AO} : \overline{OJ} = 2 : 1 .$$

Es ist dies die gesuchte Lösung [11].

Nach einer ganz ähnlichen Methode werden auch bei sämtlichen anderen Parabeln, gleichgültig, welcher Art diese sein mögen, sowie bei den parabolischen Konoiden die Schwerpunkte gefunden. Wie aber die Schwerpunkte zu finden sind, wenn beispielsweise unser parabolisches Konoid durch Drehung um die der Achse zugeordnete Gerade entstanden ist, soll augenblicklich noch unerörtert bleiben. Ich begnüge mich [einstweilen] mit der Angabe, daß bei diesem unseren Konoid der Schwerpunkt die Achse in zwei Teile teilt, die sich wie 11 zu 5 verhalten.

III. Zu derselben Methode.

[...]

---

[11] Um die von Fermat gegebenen Lösungen zu verifizieren, lege man durch die Parabel von Fig. 3 ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt *J* ist, *JV* sei die positive *x*-Achse, *JA* die positive *y*-Achse, ferner sei *JV* gleich a und *JA* gleich b. Die Gleichung der Parabel ist dann $y = -\frac{b}{a^2} \cdot x^2 + b$. Der Schwerpunkt des durch Rotation um die *y*-Achse entstandenen Körper hat dann die Ordinate

$$h = \frac{\int_0^b y \cdot x^2 \cdot dy}{\int_0^b x^2 \cdot dy} = \frac{\int_0^b y \cdot \frac{b-y}{b} \cdot a^2 \cdot dy}{\int_0^b \frac{b-y}{b} \cdot a^2 \cdot dy} = \frac{b}{3},$$

also ist

$$\overline{JO} = \frac{1}{3} \cdot \overline{JA} \quad \text{oder} \quad \overline{AO} : \overline{OJ} = 2 : 1 .$$

Wird das Parabelsegment *AVJ* um die *x*-Achse gedreht, so erhält man als Abszisse des Schwerpunktes des Rotationskörpers

$$x = \frac{\int_0^a x \cdot y^2 dx}{\int_0^a y^2 dx} = \frac{\int_0^a x\left(-\frac{b}{a^2} \cdot x^2 + b\right)^2 \cdot dz}{\int_0^a \left(-\frac{b}{a^2} \cdot x^2 + b\right)^2 \cdot dz} = \frac{5a}{16} .$$

Es ist also

$$\frac{x}{a-x} = \frac{5}{11} .$$

IV. Die Methode des Maximums und Minimums.

Während wir uns mit der Methode der Vietaschen Synkrisis und Anastrophe [12] näher befaßten und deren Anwendung auf Untersuchungen über die Zusammensetzung von Korrelatengleichungen [13] eingehend erforschten, kamen wir auf den Gedanken, hieraus eine neue Methode für die Bestimmung eines Maximums oder Minimums abzuleiten, um mit deren Hilfe einige Probleme zu erledigen, die sich auf die Determination [14] *(*d????sµ??*)* beziehen und die infolge der hierüber herrschenden Unklarheit sowohl der alten als auch der neueren Geometrie Schwierigkeiten bereiteten.

Maximal- und Minimalwerte treten (stets) als einzige und eindeutige Lösungen auf, hierauf hat schon Pappus hingewiesen und somit war dies den Alten bereits bekannt, gleichwohl gibt Commandinus offen zu, nicht zu wissen, was Pappus unter µ??a??? verstehe. Dieser Ausdruck [15] erklärt sich nämlich folgerichtig daraus, daß für jede der beiden Seiten, welche der dem Grenzfalle entsprechende Punkt voneinander scheidet, jeweils eine Gleichung mit zwei Lösungen bestimmt werden kann und daß hieraus, entsprechend den beiden Seiten, zwei Korrelatengleichungen, die sich vollkommen entsprechen und je zwei Lösungen haben, sich ergeben.

Als Beispiel sei die Strecke *B* angeführt, die so geteilt ist, daß das Rechteck aus den beiden Abschnitten ein Maximum ist [16]. Der Punkt, welcher der Aufgabe genügt, teilt, wie ersichtlich, die Strecke in zwei gleiche Teile und das größte Rechteck ist somit gleich dem vierten Teile des Quadrates von *B*, und zwar entsteht durch keine andere Teilung dieser Strecke [*B*] ein Rechteck, das dem vierten Teile des Quadrates von *B* gleich ist.

Soll jedoch dieselbe Strecke *B* so geteilt werden, daß das Rechteck aus den beiden Abschnitten gleich Z^{II} [17] ist, (wobei jedoch Z^{II} kleiner als der vierte Teil des Quadrates von *B* anzunehmen ist), so werden zwei Punkte der Aufgabe genügen und zwar wird der dem größten Rechteck entsprechende Teilpunkt zwischen den beiden Punkten liegen.

Der eine Abschnitt einer solchen Strecke *B* sei nämlich gleich *A*, dann ist

$$B \cdot A - A^2 = Z^{II},$$

diese Gleichung hat zwei Lösungen, dies deutet darauf hin, daß aus [jeder der] beiden Lösungen sich eine Strecke *A* ergibt. Die Korrelatengleichung sei also

$$B \cdot E - E^2 = Z^{II};$$

---

12 Unter Syncrisis ist das Aufsuchen von Beziehungen zwischen den Wurzeln und Koeffizienten einer Gleichung zu verstehen, in der Anastrophe ermittelt Vieta aus einer Gleichung, von der bereits eine Wurzel bekannt ist, weitere Wurzeln.

13 Fermat bedient sich in den nun folgenden Ausführungen der Vietaschen Bezeichnungen, wie der Ausdruck „Zusammensetzung von Korrelatengleichungen" zu verstehen ist, geht aus dem Fermatschen Texte hervor.

14 Das griechische Wort d????sµ?? bedeutet bei Euklid so viel wie Behauptung, die jedoch meist mit einer Erörterung über die Möglichkeit der Konstruktion (Determination) verbunden war. Bei Apollonius wurden die Determinationen für sich behandelt. Apollonius erwähnt in der Vorrede zum siebenten Buch, dass dieses die Sätze enthalte, die für die Aufgaben des achten Buches und deren Diorismen erforderlich sind.

15 Fermat knüpft hier an seine Ausführungen im III. Abschnitt über die Apollonische Aufgabe vom bestimmten Schnitt an.

16 Diese Aufgabe wurde bereits im I. Abschnitt behandelt.

17 Mit Z^{II} ist hier die Fermatsche Bezeichnung Z planum wiedergegeben, es ist hierunter eine Zahl zu verstehen, die einer Fläche entspricht.

nach der Methode Vietas werden diese beiden Gleichungen einander gleichgesetzt:

$$B \cdot A - B \cdot E = A^2 - E^2 ,$$

dividiert man alles durch *A* — *E,* so ergibt sich

$$B = A + E ,$$

wobei *A* und *E* einander nicht gleich sind.

Nimmt man an Stelle von Z^{II} eine andere Flächengröße, die größer als Z^{II}, jedoch kleiner als der vierte Teil des Quadrates von *B* ist, so werden die Strecken *A* und *E* sich noch weniger voneinander unterscheiden wie die oben gefundenen, da die Teilpunkte näher an den Punkt, welcher dem größten Rechteck entspricht, heranrücken und bei Vergrößerung der durch die Teilungen entstandenen Rechtecke die Differenz zwischen den Strecken *A* und *E* stets kleiner wird, bis sie im Grenzfalle, also wenn durch die Teilung das größte Rechteck entsteht, verschwindet, in diesem Falle ergibt sich nur eine einzige Lösung (griech. µ??a??), da die beiden Größen einander gleich werden, d. h. *A* wird gleich *E.*

Da nun in den beiden, oben erwähnten Korrelatengleichungen nach der Methode des Vieta *B* gleich *A + E* wird, so ergibt sich, wenn *E* gleich *A* wird (was offenbar stets für den Punkt, der dem Maximum oder Minimum entspricht, eintritt) in vorliegendem Falle:

$$B = 2A ,$$

d. h. wird die Strecke *B* halbiert, so ist das Rechteck aus den beiden Abschnitten ein Maximum. Als zweites Beispiel [18] diene die Aufgabe: Die Strecke *B* ist so zu teilen, daß das Produkt aus dem Quadrate über dem einen Abschnitt und dem anderen Abschnitt ein Maximum wird. Der eine Abschnitt sei etwa *A,* dann soll

$$B \cdot A^2 - A^3$$

ein Maximum werden. Die vollkommen entsprechende Korrelatengleichung ist

$$B \cdot E^2 - E^3 .$$

Nach der Methode des Vieta werden die beiden Gleichungen einander gleichgesetzt, also

$$B \cdot A^2 - B \cdot E^2 = A^3 - E^3 ,$$

dividiert man alles durch *A* — *E,* so ergibt sich

$$B \cdot A + B \cdot E = A^2 + A \cdot E + E^2 ,$$

es ist dies die [Vietasche] Zusammensetzung der Korrelatengleichungen.

Zur Bestimmung des Maximums werde *E* gleich *A* gemacht, also

$$2B \cdot A = 3A^2$$

oder

$$2B = 3A .$$

Somit ist die Aufgabe erledigt.

Da jedoch die Ausführung von Divisionen durch Binome zu mühsam und meist auch sehr schwierig ist, erscheint es zweckmäßig, die Wurzeln der Korrelatengleichungen vermittels ihrer Differenz einander gleichzusetzen, so daß auf diese Weise mit einer einzigen Division durch eben diese Differenz die ganze Arbeit erledigt wird.

Es soll der Ausdruck

$$B^2 \cdot A - A^3$$

zu einem Maximum werden [19].

---

[18] Diese Aufgabe wurde bereits im III. Abschnitt behandelt.

[19] Es soll $B^2 \cdot x - x^3$ zu einem Maximum werden. Indem man den Differentialquotienten gleich Null setzt, ergibt sich der gesuchte Wert aus der Gleichung $3x^2 = B^2$.

Als Korrelatengleichung ist nach den Regeln obiger Methode der Ausdruck

$$B^2 \cdot E - E^3$$

zu nehmen. Da aber E (ebenso wie A) eine unbestimmte Größe ist, steht nichts im Wege, hierfür die Bezeichnung $A+E$ einzuführen; dann ergibt sich für die eine Seite

$$B^2 \cdot A + B^2 \cdot E - A^3 - E^3 - 3A^2 \cdot E - 3E^2 \cdot A$$

und für die andere Seite

$$B^2 \cdot A - A^3 .$$

Läßt man die gleichen Glieder weg, so wird offenbar die ganze Gleichung nur noch Glieder enthalten, in denen E vorkommt, da ja auch beiderseits A auftritt: Es ist nämlich:

$$B^2 \cdot E = E^3 + 3A^2 \cdot E + 3E^2 \cdot A,$$

oder alles durch E dividiert:

$$B^2 = E^2 + 3A^2 + 3A \cdot E ,$$

dies ist die [Vietasche] Zusammensetzung von zwei derartigen Korrelatengleichungen.

Zur Bestimmung des Maximums sind die Wurzeln der beiden Gleichungen einander gleichzusetzen gemäß den Regeln obiger Methode, der letztere [Methode] hinsichtlich der Art und Weise der Ausführung sehr nahe steht.

Es sind also A und $A + E$ einander gleich zu machen: also muß E zu Null werden. Da nun gemäß der gefundenen Zusammensetzung der Korrelatengleichung B^2 gleich $E^2 + 3A^2 + 3A \cdot E$ sein soll und alle Glieder, in denen E vorkommt, zu streichen sind, gerade so, als wenn sie überhaupt keine Werte darstellen würden, so bleibt:

$$B^2 = 3A^2 ,$$

diese Gleichung liefert den gesuchten Maximalwert.

Um aber die allgemeine Anwendung dieser unserer beiden Methoden noch vollständiger zu zeigen, wenden wir uns nun anderen Arten von Korrelatengleichungen zu, die Vieta übergeht, wir entnehmen sie dem Buche des Apollonius „Über den bestimmten Schnitt" (Pappus Buch VII prop. 61) [20], dessen Determinationen auch Pappus erwähnt und als schwierig bezeichnet.

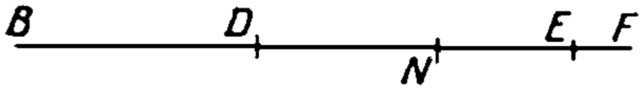


Fig. 7

Gegeben sei die Gerade *BDEF* (Fig. 7) und auf ihr die Punkte *B*, *D*, *E* und *F*. Zwischen den Punkten *D* und *E* ist Punkt *N* so zu bestimmen, daß das Verhältnis des Rechtecks *BNF* zum Rechteck *DNE* ein Minimum wird.

Es werde die Strecke *DE* mit *B*, *DF* mit *Z*, *BD* mit *D* und *DN* mit *A* bezeichnet, dann soll also das Verhältnis

$$\left(D \cdot Z - D \cdot A + Z \cdot A - A^2\right) : \left(B \cdot A - A^2\right)$$

ein Minimum werden. Diesem soll vollkommen entsprechen das Korrelatenverhältnis

$$\left(D \cdot Z - D \cdot E + Z \cdot E - E^2\right) : \left(B \cdot E - E^2\right),$$

[20] Auch diese Aufgabe wurde bereits im III.Abschnitt gelöst, die Bezeichnungen sind hier etwas andere.

gemäß ersterer Methode. Das Produkt aus den äußeren Gliedern ist gleich dem Produkt aus den inneren Gliedern, d. h. auf der einen Seite haben wir

$$D \cdot Z \cdot B \cdot E - D \cdot Z \cdot E^2 - D \cdot A \cdot B \cdot E + D \cdot A \cdot E^2$$
$$+ Z \cdot A \cdot B \cdot E - Z \cdot A \cdot E^2 - A^2 \cdot B \cdot E + A^2 \cdot E^2$$

und auf der anderen Seite

$$D \cdot Z \cdot B \cdot A - D \cdot Z \cdot A^2 - D \cdot E \cdot B \cdot A + D \cdot E \cdot A^2$$
$$+ Z \cdot E \cdot B \cdot A - Z \cdot E \cdot A^2 - E^2 \cdot B \cdot A + E^2 \cdot A^2$$

Läßt man die gemeinsamen Glieder weg und stellt entsprechend um, so ergibt sich:

$$D \cdot Z \cdot B \cdot A - D \cdot Z \cdot B \cdot E + D \cdot E \cdot A^2 - D \cdot A \cdot E^2 - Z \cdot E \cdot A^2$$
$$+ Z \cdot A \cdot E^2 + A^2 \cdot B \cdot E - E^2 \cdot B \cdot A = D \cdot Z \cdot A^2 - D \cdot Z \cdot E^2.$$

Teilt man die einzelnen Teile der Gleichung durch $A - E$ (dies ist sehr leicht zu bewerkstelligen, indem man je zwei entsprechende Glieder zusammenfaßt und die so entstehenden einzelnen Ausdrücke dividiert, so ist z. B.

$$(D \cdot Z \cdot B \cdot A - D \cdot Z \cdot B \cdot E) : (A - E) = D \cdot Z \cdot B,$$

ebenso:

$$(D \cdot E \cdot A^2 - D \cdot A \cdot E^2) : (A - E) = D \cdot A \cdot E$$

usw., die entsprechenden Glieder können ohne Schwierigkeit so angeordnet werden, daß eine derartige Division möglich wird), dann ergibt sich nach Ausführung der Division:

$$D \cdot Z \cdot B + D \cdot A \cdot E - Z \cdot A \cdot E + B \cdot A \cdot E = D \cdot Z \cdot A + D \cdot Z \cdot E.$$

Diese Gleichung stellt endlich die [Vietasche] Zusammensetzung der Korrelatengleichungen dar.

Soll hieraus das Minimum bestimmt werden, so muß gemäß unserer Methode *E* gleich *A* gesetzt werden, also:

$$D \cdot Z \cdot B + D \cdot A^2 - Z \cdot A^2 + B \cdot A^2 = 2D \cdot Z \cdot A\,;$$

die Lösung dieser Gleichung ergibt den Wert für *A*, aus dem das gesuchte kleinste Verhältnis sogleich hervorgeht.

Der Analytiker wird sich nicht weiter daran stoßen, daß die sich zuletzt ergebende Gleichung zwei Lösungen hat, da sich dennoch eine brauchbare Lösung ergeben wird. Selbst bei Gleichungen höheren Grades, die mehr als zwei Lösungen haben, werden unsere beiden Methoden einem einigermaßen geschickten Analytiker in gewohnter Weise gute Dienste leisten.

Wie aus dem Verfahren bei obiger Aufgabe hervorgeht, gestaltet sich erstere Methode wegen den öfteren Wiederholungen der Divisionen durch Binome meist ziemlich schwierig. Man wird daher auf die zweite Methode zurückgehen müssen, die, obwohl sie, wie bereits erwähnt, aus der ersten abgeleitet ist, dennoch sehr beträchtliche Erleichterungen und viele Vorteile den erfahrenen Analytikern gewähren wird. Sogar für die Bestimmung von Tangenten, Schwerpunkten, Asymptoten und dergleichen wird sie sich als viel bequemer und eleganter wie erstere erweisen.

Wir sprechen auch hier, wie bereits früher die Überzeugung aus, daß diese Untersuchung über Maxima und Minima für alle Fälle streng gültig ist und nicht etwa, wie einige glauben, vom Zufall abhängt, sie läßt sich in folgende allgemein gültige Regel, die einzige, die in Betracht kommt, zusammenfassen:

„Man setzt" . . . (Seite l Zeile 8) bis … „rückwärts einsetzt" (Seite l Zeile 34).

Sollte es aber immer noch jemand geben, der behauptet, daß wir diese Methode dem Zufall verdanken, der möge selbst sein Glück mit ähnlichem Zufall versuchen. Wer diese Methode noch immer nicht gelten lassen will, dem sei die Aufgabe gestellt:

Gegeben drei Punkte, gesucht ein vierter Punkt, so daß die Summe seiner Abstände von den drei gegebenen Punkten ein Minimum wird [21] .

[21] Die Lösung der von Fermat gestellten Aufgabe gestaltet sich folgendermaßen: Sind $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ und $P_3(x_3, y_3)$ die gegebenen Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, so ist, wenn $P(x, y)$ der gesuchte Punkt,

$$z = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} + \sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}$$

zu einem Minimum zu machen. Durch Differentiation erhält man die Bedingungsgleichungen: $\cos(P_1P) + \cos(P_2P) + \cos(P_3P) = 0$, ferner $\sin(P_1P) + \sin(P_2P) + \sin(P_3P) = 0$. Hieraus ergibt sich als Lösung: $\sphericalangle\, P_1PP_2 = \sphericalangle\, P_2PP_3 = \sphericalangle\, P_3PP_1$ = 120°.