Heron von Alexandria

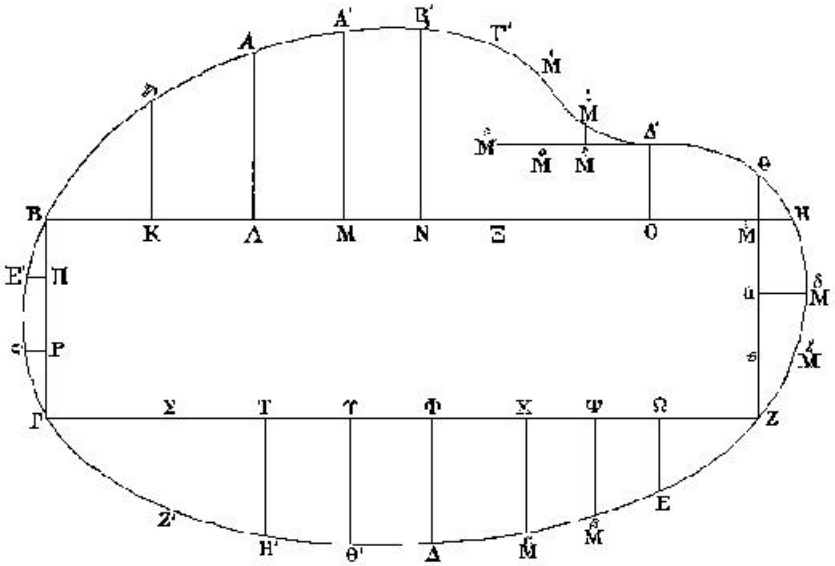
Auszug aus
„Über die Dioptra“
(ca. 100 n.C.)

Quelle: Hero Alexandrinus. Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia. Vol. III: Rationes dimetiendi et commentation dioptrica. Griechisch und Deutsch von H. Schöne. - Leipzig: B. G. Teubner, 1903

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

XXIII.

Ein gegebenes Flächenstück vermittelst der Dioptra auszumessen.



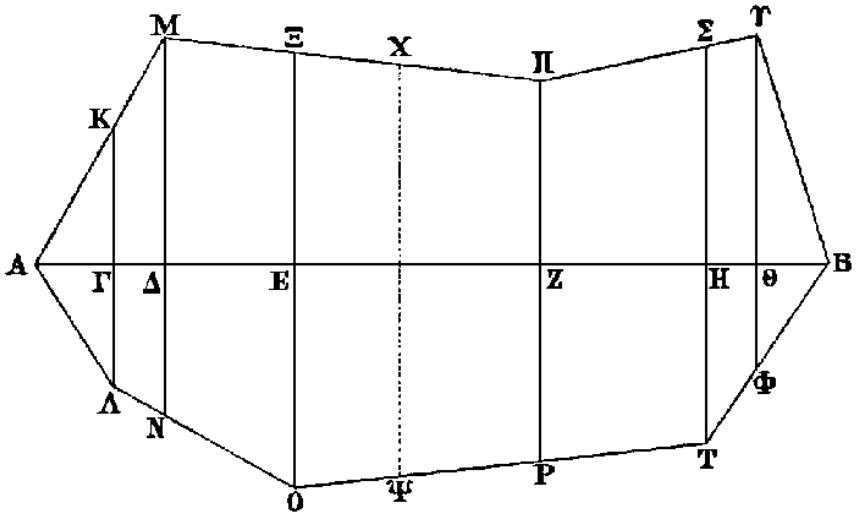
Das gegebene Flächenstück sei von der unregelmäßigen Linie $AB\Gamma\Delta EZH\Theta$ umschlossen. Da wir nun lernten, vermittelst der dazu hergerichteten Dioptra auf jede gegebene Gerade eine andere im rechten Winkel dazu zu ziehen, so nehme ich einen Punkt auf der das Flächenstück umschließenden Linie, B, und ziehe vermittelst der Dioptra die beliebige Gerade BH und im rechten Winkel hierzu $B\Gamma$; eine andere Gerade im rechten Winkel hierzu ΓZ, und gleichermaßen zu ΓZ im rechten Winkel $Z\Theta$. Nun nehme ich auf den gezogenen Geraden eine Reihe auf einander folgender Punkte an, nämlich auf BH die Punkte K, Λ, M, N, Ξ, O; auf $B\Gamma$ die Punkte Π und P; auf ΓZ die Punkte $\Sigma, T, Y, \Phi, X, \Psi, \Omega$; auf $Z\Theta$ die Punkte z und V. Und von den
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

angenommenen Punkten ziehe ich im rechten Winkel zu den Geraden, auf denen die Punkte liegen, die Linien $K\mathcal{D}$, ΛA, MA', NB', $\Xi\Gamma'$, $O\Delta'$, $\Pi E'$, PV', $\Sigma Z'$, TH', $Y\Theta'$, $\Phi\Delta$, $X\overset{a}{M}$, $\Psi\overset{b}{M}$, ΩE, $V\overset{g}{M}$, $z\overset{d}{M}$ dergestalt, dass die Endpunkte dieser Senkrechten von der das Flächenstück umschließenden Linie Stücke, die nahezu gerade sind, abschneiden. Nachdem dies geschehen, wird es möglich sein, das Flächenstück zu messen. Denn $B\Gamma\Sigma M$ ist ein rechtwinkliges Parallelogramm; wir werden dann also, wenn wir seine Seiten mit einer Messkette oder einem geprüften Bande (d. h. einem, das sich weder ausdehnen noch zusammenziehen kann) messen, den Inhalt des Parallelogramms erhalten. Die außerhalb desselben liegenden rechtwinkligen Dreiecke und Trapeze werden wir in gleicher Weise messen, da wir ihre Seiten haben. Es werden nämlich $BK\mathcal{D}$, $B\Pi E'$, $\Gamma P\Sigma'$, $\Gamma\Sigma Z'$, $Z\Omega E$, $ZV\overset{g}{M}$, $\Theta H\overset{e}{M}$ rechtwinklige Dreiecke, die übrigen rechtwinklige Trapeze sein. Die Dreiecke nu werden gemessen, indem man die den rechten Winkel einschließenden Seiten mit einander multipliziert und von dem Produkt die Hälfte nimt; die Trapeze werden gemessen, indem man die Hälfte der Summe ihrer parallelen Seiten mit der auf sie gefällten Senkrechten multipliziert; z.B. $\frac{K\mathcal{D}+\Lambda A}{2}\times K\Lambda$, und ähnlich bei den übrigen. Es wird also das ganze Flächenstück durch das in der Mitte liegende Parallelogramm und die außerhalb desselben liegenden Dreiecke und Trapeze gemessen sein.

Befindet sich zufällig zwischen den Linien, die im rechten Winkel zu den Seiten des Parallelogramms gezogen sind, eine krumme Linie, die sich nicht der Geraden nähert (wie z.B. $\Gamma'\Delta'$ zwischen $\Xi\Gamma$ und $O\Delta$), sondern der Kreislinie, so werden wir sie auf folgende Weise messen. Wir ziehen zu $O\Delta'$ im rechten Winkel $\Delta'\overset{V}{M}$, nehmen auf dieser Linie aufeinander folgende Punkte $\overset{d}{M}$ und $\overset{h}{M}$ an und ziehen von ihnen aus im rechten Winkel zu $\overset{V}{M}\Delta$ die Geraden $\overset{d}{M}\overset{i}{M}$ und $\overset{h}{M}\overset{z}{M}$, so dass die Linienstücke, die zwischen den gezogenen Geraden liegen, annähernd Gerade sind; sodann messen wir wiederum das Parallelogramm $\overset{V}{M}\Xi O\Delta'$ und das Dreieck $\overset{h}{M}\overset{z}{M}\Delta'$ und das Trapez $\Gamma'\overset{V}{M}\overset{d}{M}\overset{i}{M}$, und ferner noch das andere Trapez, und werden so das Flächenstück gemessen haben, welches von der Linie $\Gamma'\overset{i}{M}\overset{z}{M}\Delta'$ und den Geraden $\Gamma'\Xi$, ΞO, $O\Delta'$ umschlossen wird.

Es giebt auch noch eine andere Art der Ausmessung.

Das zu messende Flächenstück sei das unten gezeichnete.



Durch dieses lege man nach seiner ganzen Länge vermittelst der Dioptra eine Gerade, die nach Möglichkeit annähernd in der Mitte des Flächenstücks laufen soll, AB.

Auf dieser nehme man eine Reihe aufeinander folgender Punkte $\Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$ an und von den angenommenen Punkten im rechten Winkel zu AB vermittelst der Dioptra die Geraden $\Gamma K, \Gamma\Lambda, \Delta M, \Delta N, E\Xi, EO, Z\Pi, ZP, H\Sigma, HT, \Theta Y, \Theta\Phi$ gezogen werden, so dass wiederum die dazwischen liegenden Linienstücke nahezu gerade sind. Wiederum ist nun das Flächenstück in die Dreiecke $A\Gamma K, A\Gamma\Lambda, B\Theta\Phi, B\Theta Y$ und die noch übrig bleibenden Trapeze zerlegt. Dann kann man durch die bezeichneten Dreiecke und durch die Trapeze das Flächenstück messen. Findet sich darunter wieder irgend eine gekrümmte Linie, so werden wir das daran liegende Trapez in derselben Weise wie oben zerlegen und es so messen.

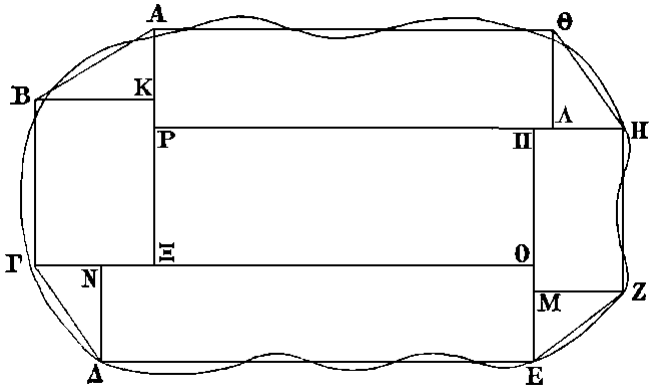
Diese Art der Ausmessung ist in dem Fall praktisch, wenn das Flächenstück auch in eine gegebene Anzahl von Teilen zerlegt werden soll. Es sei nämlich die Aufgabe, es durch parallele Gerade in 7 gleiche Teile zu zerlegen. Ich messe das ganze Flächenstück aus und nehme von dem Resultat den siebten Teil, so dass ich ebensoviel für jeden Teil zu vergeben habe. Nun messe ich das Flächenstück $K\Lambda\Lambda$. Wenn es gleich einem solchen siebenten Teile ist, so haben wir das Flächenstück $K\Lambda\Lambda$ (von der erforderlichen Größe); wo nicht, so setze ich zum Inhalt von $K\Lambda\Lambda$ noch den Inhalt von $K\Lambda MN$ hinzu. Und wenn es sich dann als dem siebenten Teil gleich herausstellt, so

wird MN die Gerade sein, die eins der Teilstücke begrenzt. Ergiebt es sich als kleiner, so wird man wiederum noch den Inhalt von MNΞO zusetzen müssen, bis es gleich dem siebenten Teile oder größer wird. Es sei größer geworden, nachdem ΞOΠP zugesetzt worden ist. Dann wird man von ΞOΠP ein Flächenstück, das gleich dem Überschuß ist, abschneiden müssen, beispielsweise ΠPXΨ. Man wird daher das Verfahren kennen müssen, wie man von einem gegebenen Trapez ein einem anderen gegebenen Trapez inhaltsgleiches Trapez abschneidet; dies werden wir im Folgenden zeigen. Es wird nun also das Flächenstück XAΨ eines der Teilstücke sein. Ich setze nun wieder zu ΠXΨP das Stück ΠPΣT hinzu. Wenn alsdann der Inhalt des Ganzen ein gleiches Teilstück ergiebt, so wird ΣT die Linie sein, welche das zweite Teilstück begrenzt. Ist es größer, so wird man wiederum das überschüssige Stück von dem Trapez ΠPΣT abschneiden müssen. Und ebenso denke man sich das Verfahren bei den übrigen Teilen.

XXV.

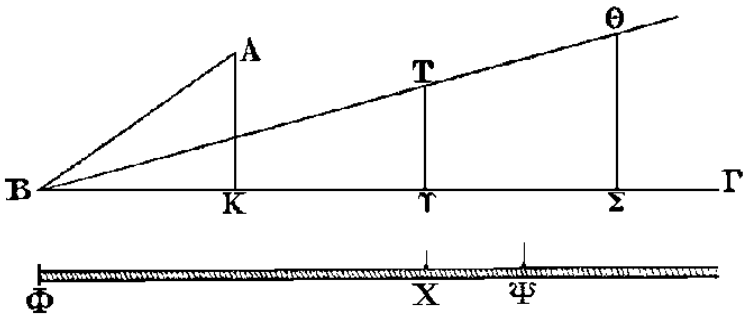
Wenn die Grenzsteine eines Flächenstücks verschwunden sind und nur zwei oder drei derselben noch übrig sind und ein Handriß vorhanden ist, die übrigen Grenzsteine zu bestimmen.

Um die Methode allgemeiner anwendbar zu machen, werden wir eine ziemlich unbequeme Vermessungsaufgabe und einen ziemlich unbequemen Plan vorlegen.



Das gegebene Flächenstück d.h. der Plan, sei ΑΒΓΔΕΖΗΘ, das von den annähernd geraden Linien ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΑ umschlossen wird. Nun soll zu ΒΓ im rechten Winkel die Linie ΒΚ gezogen werden und auf ihr ΚΑ senkrecht stehen, zu ΑΘ im rechten Winkel die Linie ΘΛ gezogen werden und auf ihr ΗΛ senkrecht stehen; zu ΗΖ im rechten Winkel die Linie ΖΜ gezogen werden und auf ihr ΜΕ

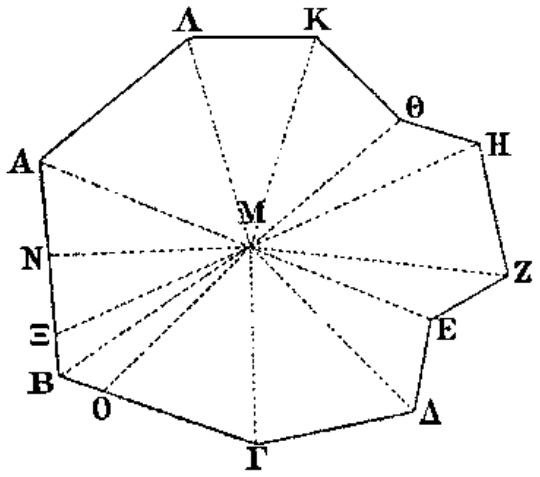
senkrecht stehen; wiederum soll zu $B\Gamma$ im rechten Winkel ΓN gezogen werden und auf ihr ΔN senkrecht stehen. Es ist also möglich die Dreiecke $ABK, H\Theta\Lambda, EZM, \Gamma\Delta N$ zu messen und die übrig bleibenden Parallelogramme nach ihrer Zerlegung zu messen, indem man die im rechten Winkel gezogenen Geraden verlängert, so dass $B\Xi, NE, HM, \Theta P, \Xi\Pi$ Parallelogramme sind.



Es sei nun der Plan von der angegebenen Art gegeben, der aus Dreiecken und Parallelogrammen bestehen soll. Und nur die Grenzsteine Θ, B und Γ sollen (im Terrain) noch sichtbar sein. Nun werde BK bis Γ verlängert und vermittelst der Dioptra die durch die Punkte B und Θ gehende Gerade ihrer Lage und ihrer Größe nach bestimmt. Und es werde von ihr ein Stück, BT, abgeschnitten und auf $B\Gamma$ die Senkrechten $\Theta\Sigma$ und TY gefällt. Also wird auch TY der ebensovielte Teil von $\Theta\Sigma$ sein als BY von $B\Sigma$ ist und BT von $B\Theta$. Wir haben nun jede der beiden Geraden $B\Sigma$ und $\Sigma\Theta$ aus dem Plan. Wie werden daher auch jede der beiden Geraden BY und YT haben. Wir nehmen nun ein Messband, das sich nicht ausdehnt, von der Größe von BYT, nämlich $\Phi\Psi$, und tragen auf ihm den Teil $\Phi X = BY$ ab, das der ebensovielte Teil von $B\Sigma$ sein soll als TY von $\Theta\Sigma$ ist und BT von $B\Theta$. Die Endpunkte des Messbandes $\Phi\Psi$ legen wir an BT so an, dass Φ bei B ist und Ψ bei Γ. Und nachdem wir den Punkt X bestimmt haben, werden wir das Messband ausspannen, und unter allen Umständen wird X dieselbe Lage mit Y haben. Wir ziehen nun die Verbindungslinie BY und werden mit einem Strick oder vermittelst der Dioptra auf ihr das Maß von BK abtragen, das aus dem Plane ersichtlich ist, und so den Punkt K erhalten. Sodann ziehen wir im rechten Winkel zu BK die Gerade KA, und wenn wir auf ihr das Maß von KA abtragen, so werden wir den Punkt A bestimmt haben. Auch die übrigen Punkte aber werden wir dadurch bestimmen, dass wir den auf dem Plan verzeichneten Senkrechten und den bei ihnen angemerkten Maßen uns anschließen.

XXVI.

Ein gegebenes Grundstück mit Linien, die von einem gegebenen Punkte auslaufen, in gegebene Teile zu zerlegen. Der gegebene Punkt sei beispielsweise ein Brunnen, weil dann alle, die Teilstücke erhalten haben, dasselbe Wasser gebrauchen können.



Das gegebene Flächenstück sei umschlossen von den Geraden $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EZ, ZH, H\Theta, \Theta K, K\Lambda, \Lambda A$. Denn wenn die das Flächenstück umschließenden Linien nicht Gerade sein sollten, sondern eine unregelmäßige Linie, so werden wir auf dieser eine Reihe von Punkten in der Weise annehmen, dass die dazwischenliegenden Linienstücke annähernd Gerade sind. Der gegebene Punkt sei M und es sei die Aufgabe, das Grundstück von dem Punkte M aus in 7 Teile zu zerlegen. Es werde auf AB vermittelst der Dioptra die Senkrechte MN gefällt, so dass, wenn wir die Verbindungslinien MA und MB gezogen denken, es möglich wird, das Dreieck AMB zu messen. Denn $AB \times MN = 2 \times$Dreieck ABM. Man kann aber in der vorbeschriebenen Weise auch das ganze Grundstück messen.

Wenn nun das Dreieck ABM gleich einem Siebentel des ganzen Grundstücks ist, so wird das Dreieck ABM eins der Teilstücke sein. Wenn es größer ist, so muß man etwas davon wegnehmen, indem man die Linie $M\Xi$ zieht, du muß das Dreieck $AM\Xi$ gleich einem Siebentel des ganzen Grundstücks machen. Ist dagegen das Dreieck ABM kleiner als ein Siebentel, so wird man von dem Dreieck $B\Gamma M$ das Dreieck BMO fortnehmen müssen, das zusammen mit Dreieck AMB, ein Siebentel des ganzen Grundstücks ausmachen wird. Wie man aber ein Dreieck zuzusetzen oder fortzunehmen hat, werden wir im folgenden zeigen. Indem wir nun auch bei den übrigen Dreiecken dieselbe Rechnung anstellen, werden wir das Grundstück vollständig in die geforderten

Teilstücke mit Linien, die von dem Punkt M ausgehen, zerlegen.