Gilles-Personne de Roberval

Übersetzung des „Traité des Indivisibles"

Quelle: Roberval, Gilles-Personne de: Traité des indivisibles . - Paris :IREM, Univ. Paris VII 1987 . - (Reproduction de textes anciens, nouvelle série ; 3)
Übersetzung: Sibylle Ohly

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Um mit dem Mittel der Indivisibeln Schlüsse zu ziehen, muß man annehmen, daß jede Linie, sei sie gerade oder gekrümmt, sich teilen läßt in eine unendliche Anzahl von Teilen oder kleinen Linien, die entweder alle einander gleich sind oder einer beliebigen Progression folgen, wie zum Beispiel von Quadrat zu Quadrat, von Kubus zu Kubus, von Biquadrat zu Biquadrat, oder nach einer anderen Potenz.

Aber da sich jede Linie durch Punkte begrenzt, bedient man sich der Punkte statt der Linien; und mehr: statt zu sagen, daß alle kleinen Linien zu einem gegebenen Ding in einem bestimmten Verhältnis stehen, sagt man, daß alle diese Punkte zu dem gegebenen Gegenstand in demselben Verhältnis stehen.

[pl. XV, Fig. 2] Wenn alle kleinen Linien untereinander den gleichen Abstand haben, wie die Folge der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 etc., verhalten sie sich also alle zusammen zur größten von ihnen, genommen ebenso viele Male wie es kleine gibt, wie das Dreieck zum Quadrat, das als Schenkel die größte Linie hat, das heißt, wie 1 zu 2, wie man bei dem Dreieck hier sieht, dessen Oberfläche die Hälfte des Raumes enthält, die ein Quadrat einnehmen würde, welches wie das Dreieck 4 als Seite hätte, und obwohl man nicht 10 Punkte brauchte, um das Quadrat zu vervollständigen, weil die Seite AB mit der anderen Hälfte des Quadrats gemeinsam wäre, ist dies dennoch bei den Indivisibeln nicht vergleichbar, da das Dreieck nie die Hälfte des Quadrats übersteigt, außer um die Hälfte seiner Seite: aber da das Quadrat, in den Indivisibeln betrachtet, eine unendliche Anzahl von Seiten hat, wird die Hälfte einer davon nicht betrachtet; also übersteigt dieses Dreieck mit der Seitenlänge 4 die Hälfte des gleichseitigen Quadrats (d.h.welches die gleichen Seiten hat) nur um 2, was 1/4 der genannten Hälfte ist, oder die Hälfte der Seite. Wenn das Dreick 5 als Seite hätte, würde es die Hälfte des gleichseitigen Quadrats nur um 1/5 übersteigen, bei 6: 1/6 usw., und man sieht, daß der Überschuß immer kleiner wird, bis er sich schließlich bei der unendlichen Teilung der 0 annähert.

Ebenso, wenn die Linien untereinander der Ordnung der Quadrate folgen würden, wäre die Summe aller dieser Linien oder Punkte, die sie repräsentieren, im Vergleich zur letzten, ebensooft genommen, wie die Quadrate zum Würfel, oder wie die Pyramide zur Säule, das heißt, wie 1 zu 3; denn auch wenn man eine endliche Zahl von Quadraten nimmt, wird ihre Summe größer sein als 1/3 des Würfels, der die gleichen Seiten wie das größte Quadrat hat; nichtsdestoweniger wird es bei unendlicher Teilung nur 1/3 sein; denn die besagte Summe übersteigt 1/3 des Würfels nur um die Hälfte des größten Quadrats + 1/6 der Seite. Aber im Würfel gibt es eine unendliche Anzahl von Quadraten, und folglich ist die Hälfte eines davon zu vernachlässigen, und umso mehr 1/6 der Linie oder Seite desselben Würfels.

Sei der Würfel also 64; um die Summe der Quadrate zu erhalten, deren größtes gleichseitig zum besagten Würfel sein soll, nehme man ein Drittel desselben, das heißt 21 1/3,dazu die Hälfte des größte Quadrats, das heißt 8, dann hat man 29 1/3, wozu man noch 1/6 von 4 (als der Seite),
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

das heißt 2/3 hinzufügt, dann hat man 30 als Summe der ersten vier Quadrate.Und ebenso zeigt man durch die Eigentümlichkeiten der folgenden Potenzen, daß die Summe der Kuben gleich 1/4 des Biquadrats ist, welches gleichseitig zum größten Kubus ist; daß die Summe der Biquadrate gleich 1/5 der fünften Potenz ist; daß die Summe der fünften Potenzen gleich 1/6 der sechsten Potenz ist, und so weiter. Man muß aber anmerken, daß die Potenzen untereinander das Verhältnis der einen zu nächsten haben, und man keine dazwischen auslassen darf. So hat die Linie oder Seite keine Beziehung zum Würfel, noch das Quadrat zum Biquadrat, noch der Kubus zur 5. Potenz etc., denn die Linien, genommen bis ins Unendliche, bilden nur ein Quadrat, und da man unendlich viele Quadrate im Würfel hat, bewirkt es nichts, wenn man ein einzelnes Quadrat hinzufügt oder wegnimmt. Dasselbe zeigt sich beim Vergleich des Quadrats zum Biquadrat, des Kubus zur fünften Potenz und so weiter.

Die Fläche teilt sich auch in eine unendliche Anzahl kleiner Flächen, die entweder gleich sind oder gleiche Differenz haben oder untereinander irgendeiner Proportion folgen, wie Quadrat zu Quadrat, Kubus zu Kubus, Biquadrat zu Biquadrat etc. Und weil die Flächen in Linien eingeschlossen sind, vergleicht man, anstatt Flächen zu vergleichen, Linien mit einem anderen Ding, und die Summe aller kleinen Flächen oder Linien, die sie darstellen, sind zur großen Fläche, gleichoft genommen, wie 1 zu 3, wie gesagt wurde.
Ebenso teilen sich die Körper in unendlich viele kleine Körper, die entweder gleich sind oder einer Folge gehorchen, wie es bei den Flächen gesagt wurde: und da die Körper begrenzt werden durch Flächen, sage ich, anstatt zu sagen, daß die kleinen Körper sich zum großen verhalten, der gleich oft genommen wird, daß die unendliche Zahl der Flächen sich zur größten, ebenso oft genommen, verhalten wie der Würfel zum Biquadrat seiner Seiten, das heißt wie 1 zu 4.

Während diese ganzen Diskurses muß man verstehen, daß die unendliche Vielzahl der Punkte an die Stelle einer unendlichen Zahl kleiner Linien zu setzen ist und die ganze Linie aufbaut. Die unendlich vielen Linien repräsentieren die unendlich vielen kleinen Flächen, welche die gesamte Fläche aufbauen. Die unendlich vielen Flächen rapräsentieren die unendlich vielen kleinen Körper, die zusammen den ganzen Körper aufbauen.

<u>Erklärung der Zykloide[pl. XV, Fig. 3]</u>

(Erzeugung der Zykloide) Wir setzen, daß der Durchmesser AB des Kreises AEFGB sich zu sich selbst parallel bewegt, wie wenn er von irgendeinem anderen Körper weggetragen würde, bis er in CD angekommen ist, um den Halbkreis oder die Halbumdrehung zu vollenden.

Während er wandert, bewegt sich der Punkt A am Ende des besagten Durchmessers durch den Umfang des Kreises AEFGB und macht ebensoviel Weg wie der Durchmesser, so daß, wenn der Durchmesser in CD ist, der Punkt A in B angekommen ist, und die Linie AC ist gleich dem Umfang AGHB. Aber dieser Lauf des Durchmessers teilt sich in unendlich viele Teile, die sowohl untereinander gleich sind, wie auch zu jedem Teil des Umfangs AGB, welcher sich ebenfalls in unendlich viele Teile teilt, die alle einander gleich sind und gleich zu den Teilen von AC, die der Durchmesser durchläuft, wie es gesagt wurde. (Natur der Zykloide) Schließlich betrachte ich den Weg, den der nämliche Punkt A zurückgelegt hat, getragen durch zwei Bewegungen, die eine des Durchmessers, die andere seiner selbst im Umfang. Um den genannten Weg zu finden, sehe ich, daß er, wenn er nach E gekommen ist, über seinen ersten Ort, von dem er ausgegangen ist, erhoben ist; diese Höhe bestimmt man, indem man vom Punkt E zum Durchmesser einen Sinus E 1 zieht, und der Sinusversus A 1 ist die Höhe des besagten A, wenn er nach E gekommen ist. Ebenso wenn er nach F gekommen ist, ziehe ich vom Punkt F auf AB den Sinus F 2, und A 2 wird die Höhe von A sein, wenn er zwei Teile vom Umfang zurückgelegt hat; und den Sinus G 3 ziehend, wird der Sinusversus A 3 die Höhe von A sein, wenn er nach G gekommen ist; und ebenso handelnd von allen Punkten des Umfangs, die A durchläuft, finde ich alle seine Höhen und Erhebungen über das Ende des Durchmessers A, die lauten A 1, A 2, A 3, A 4, A 5, A 6, A 7, also, um die Orte zu haben, an denen besagter Punkt A vorübergeht, und die Linie zu kennen, die er während der beiden Bewegungen bildet, trage ich alle seine Höhen über jedem der Durchmesser M, N, O, P, Q, R, S, T auf und finde, daß M 1, N 2, O 3, P 4, Q 5, R 6, S 7 dieselben sind wie die, die über AB eingenommen werden. Dann nehme ich dieselben Sinus E 1, F 2, G 3 etc. und trage sie auf jede Höhe, gefunden über jedem Durchmesser, und ziehe sie gegen den Kreis; und die Enden dieser Sinus bilden zwei Linien, von denen die eine A 8 9 10 11 12 13 14 D ist , die andere A 1 2 3 4 5 6 7 D. Ich weiß, wie die Linie A 8 9 D zustande kommt: aber um zu wissen, welche Bewegungen die andere erzeugt haben, sage ich, daß, während AB die Linie AC durchlaufen hat, der Punkt A über die Linie AB gestiegen ist und alle Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, bezeichnet hat, der erste Raum während AB nach M gekommen ist, und immer gleich von einem Raum zum nächsten, bis der Durchmesser in CD angekommen ist; also ist der Punkt A nach B gestiegen.Hier ist die Linie A 1 2 3 D. (Satz 1) Aber diese beiden Linien schließen einen Raum ein, wobei sie voneinander durch alle diese Sinus getrennt sind und in den beiden Enden A, D zusammentreffen. Aber jeder Teil, der zwischen diesen beiden Linien enthalten ist, ist gleich jedem Teil der Fläche des Kreises AEB, enthalten im Umfang desselben, denn beide sind aufgebaut aus gleichen Linien, d.h. aus der Höhe A 1, A 2, etc. und den Sinus E 1, F 2, etc., welche dieselben sind wie die der Durchmesser M, N, O etc. Also ist die Figur A 4 D 12 gleich dem Halbkreis AHB. (Satz 2) Aber die Linie A 1 2 3 D teilt das Parallelogramm in zwei gleiche Teile, weil die Linien einer Hälfte gleich den Linien der anderen Hälfte sind, und die Linie AC gleich der Linie BD; und folglich ist nach Archimedes die Hälfte gleich dem Kreis, zu dem man den Halbkreis hinzufügt, d.h. den zwischen den beiden Kurven eingeschlossenen Raum, so daß man einen Kreis und einen halben haben wird für den Raum A 8 9 D C ; und wenn man ebenso für die andere Hälfte verfährt, wird die ganze Figur der Zykloide dreimal so viel wert sein wie der Kreis.

(Satz 3) Um die Tangente der Figur in einem gegebenen Punkt zu finden, ziehe ich vom besagten Punkt aus eine Berührungslinie an den Kreis, die durch den besagten Punkt geht, denn jeder Punkt des Kreises bewegt sich entlang der Berührungslinie diese Kreises. Dann betrachte ich die Bewegung, die wir unserem Punkt gegeben haben, eingeführt durch den parallel zu sich selbst wandernden Durchmesser. Vom selben Punkt aus die Linie dieser Bewegung ziehend, wenn ich das Parallelogramm ganz vollende (welches immer vier gleiche Seiten haben muß, wenn der Weg des Punktes A durch den Umfang gleich dem Weg des Durchmessers AB durch die Linie AC ist) und wenn ich vom selben Punkt aus die Diagonale ziehe, habe ich die Berührungslinie der Figur, die diese beiden Bewegungen zur Komposition gehabt hat, d.h. die kreisförmige und die direkte. So verfährt man, wenn man gleiche Bewegungen voraussetzt. Wenn man sie in irgendein anderes Verhältnis gestellt hat, wie wenn [z.B.], während die eine in einer Zeit den Raum eines Fußes durchläuft, die andere in derselben Zeit den Raum von einem Fuß und einem halben, oder in einem anderen Verhältnis, muß man die Konsequenzen bezüglich des genannten Verhältnisse ziehen.

<u>Verhältnis des Umfangs des Kreises zu seinem Durchmesser [pl. XV, Fig.4]</u>

(Satz 4) Gegeben sei der Kreis AIBQ, sein Durchmesser AB, und es seien gezogen die Sinus CE, GV, HX, IY, LZ, MK, DF. Die Bögen CG, GH, HI, IL, LM, MD seien gleich: ich sage, daß die Linie EF sich zum Umfang CD verhält, wie alle Sinus zusammen, d.h. CE, GV und alle anderen, sich zu ebensovielen Gesamtsinus oder Radien verhalten. Ich beweise es so: ich setze CE fort bis nach N, GV bis nach O, und ebenso die anderen . Dann ziehe ich die Diagonalen von C nach O, die EV im Vorbeigehen schneidet. Ebenso ziehe ich alle anderen Diagonalen, und folglich mache ich ähnliche Dreiecke, zu denen die Linien DF und NE gar nicht gebraucht worden sind, aber das ist nicht wichtig wegen der unendlichen Teilung, in der nichts Endliches einen Nachteil hat. Dann ziehe ich die Linie B 8, die den Bogen 8 A gleich zu CG macht, und vom Punkt 8 fälle ich das Lot 8 A, um ein zu C 2 E, G 3 V etc. ähnliches Dreieck zu haben. Wir nehmen an, daß der Umfang CD durch unendlich viele Sinus geteilt sei und die Linie 8 A so nah am Umfang 8 A sei, daß sie selbst Umfang und gleich 8 A wird oder gleich CG, und gleich jeder der anderen, die ins Unendliche geteilt sind. Außerdem sagen wir, daß die Linie B 8 so durch eine unendliche Teilung des Durchmessers AB angenähert sein kann, daß sie selbst zum Durchmesser wird.

Dann sagt man: Wie CE zu E 2, so ist OV zu V 2, und dasselbe von allen Dreiecken, die derselben Regel folgen. Schließlich ist das Dreieck C E 2 ähnlich dem Dreieck G V 3, weil sie die Winkel C und G gleich haben, stützende Umfänge gleich NO, OP, denn alle sind gleich von N bis T, und folglich: wie alle Doppelsinus CN u.a. zur Linie EF sind, so ist CE zu E 2: aber wie CE zu E 2, so ist B 8, das zum Durchmesser geworden ist, zu 8 A, das zum Umfang geworden ist, der gleich CG und den anderen sein wird. Also, wie alle Sinus zur Linie EF, so ist der Durchmesser B 8, Durchmesser geworden, zu 8 A, Umfang geworden; und statt 8 A sage ich CG; und wenn ich die vorigen entzwei schneide, sage ich: wie die Sinus von oben zur Linie EF, so ist der Radius oder Gesamtsinus zu CG; und wenn man CG ebensooft multipliziert, wie die Linie CD Teilungen enthält, werden alle Sinus von oben zu EF sein , wie genausoviele Radien oder Gesamtsinus, wie es zu CG gleiche Teile gibt zwischen C und D, zum Umfang CD sind: und wechselnd: wie alle Sinus von oben zu ebensovielen Gesamtsinus oder Radien sind, so ist die Linie EF zum Umfang CD.

(Korollar) Wenn EF der Radius gewesen wäre, und wenn die Sinus vom Viertel des Umfangs gefällt worden wären, wäre der Radius zum Viertelumfang gewesen wie alle Sinus, die den Umfang teilen, zu gleichvielen Gesamtsinus oder Radien.

<u>Eine dem Quadrat gleiche krummlinige Figur [pl. XVI, Fig. 1]</u>

(Satz 5) Wenn man annimmt, daß der Radius des Kreises zum Viertel des Kreise so ist wie alle kleinen unendlich vielen Sinus zu allen Gesamtsinus, d.h. gleichviele kleine Sinus zu gleich vielen Gesamtsinus: ich finde, daß das Quadrat des Radius gleich der Figur ist, die aufgebaut wird aus allen Sinus, die im rechten Winkel auf den Umfang gestellt werden; denn in der Figur ABC sind die Linien GH, IL, MN, PO, welche die Sinus des ganzen Umfangs BC sind, durch das Ende ihres Scheitels die Linie AC; und wenn man so fortfährt und die besagten Sinus verlängert, so daß sie dem Gesamtsinus oder Radius gleich werden, bilden sie die Figur ABCD. Ich errichte auch auf AB sein Quadrat ABEF.

Dann sage ich: Wie der Radius AB zum Umfang BC, d.h. zum Viertel des Umfangs, so sind alle Sinus zu gleichvielen Gesamtsinus oder Radien; und durch die unendlich vielen, wie die Figur ABC zur Figur ABCD, aufgebaut aus unendlich vielen Gesamtsinus und dem Viertel des Umfangs BC; so also, wie der Radius zum Umfang, so ist die Figur ABC zur Figur ABCD. Aber wie die Linie AB zur Linie BC ist, so ist ihr Quadrat zum aus AB und BC gemachten Rechteck; also ist die Figur ABC zur großen ABCD wie das Quadrat ABEF zum Rechteck ABCD; also hat das Quadrat von AB das gleiche Verhältnis zum Rechteck AC wie die Figur ABC, was man beweisen wollte.

<u>Über die Parabel [pl. XVI, Fig. 29]</u>

(Satz 6) Gegeben sei die Parabel BALMNOPC, der Scheitelpunkt A, der Durchmesser AB, die berührende Linie AD, welche in unendlich viele gleiche Teile AE, EF, FG, GH, HI, ID geteilt sei, und von allen Punkten seien Linien gezogen parallel zum Durchmesser AB bis zur Linie CB, nämlich E1, F2, G3, etc. Und von den Punkten, wo die Linien die Parabel schneiden, seien die Ordinaten LQ, MR, NS, OT, PV gezogen. Aber die Linien AQ, AR sind untereinander wie das Quadrat der Linie LQ zum Quadrat der Linie MR; und die Linie AR ist zu AS wie das Quadrat von MR zum Quadrat von NS, ebenso von allen anderen Linien. Nun ist aber die Linie AD in gleiche Teile geteilt, und die Teile derselben sind gleich den Ordinatenlinien, nämlich AE zu QL, AF zu RM, AG zu SN, AH zu TO, und AI zu VR, folglich übertrifft jedes der Quadrate dieser Linien das vorangehende gemäß dem Fortschreiten der ungeraden Zahlen, wie die Quadrate gemacht werden aus Seiten, die sich immer um eine Einheit unterscheiden, und wenn die Seite des ersten 1 ist, sind die der anderen 2, 3, 4, 5, 6 . Außerdem sind die Teile des Durchmesser, eingeschlossen und geschnitten durch die Ordinaten, dieselben wie EL, FM, GN, HO, IP, DC; folglich sind diese Linien zueinander wie die Quadrate 1, 4, 9, 16, 25, 36. Ich sage also, daß alle diese Linien zusammengenommen zur Linie DC, gleichoft genommen wie die Linien, so sein werden, wie die Summe der Quadrate (der Ordnung folgend, die ich genannt habe, d.h., zu beginnen mit der Einheit, und folgend immer durch Vergrößerung um eine Einheit) zum Quadrat DC ist, so oft genommen, wie es Teilungen in der Linie AD gibt, d.h. in der vorliegenden Teilung sechs mal. Nun multiplizieren wir ein Quadrat so oft wie seine Seite wert ist, d.h. mit seiner Seite, machen also einen Würfel: es ist also wahr, daß die Summe aller dieser Linien EL, FM, GN, HO, IP, DC zu der Linie DC, genommen so oft wie es besagte Linien gibt, sich so verhält, wie die Summe der oben genannten Quadrate zum Würfel der größten Zahl. Aber der Würfel ist das Dreifache der Quadratsumme, folglich ist die Dreilinie CPONMLAD ein Drittel des Rechtecks CDAB, wodurch also die Parabel ABCPONMLA zwei Drittel des Parallelogramms oder Quadrats CDAB sein wird; dies ist von Archimedes auf andere Weise gezeigt worden.

(Fermat) Wenn wir nun eine andere Eigenschaft der Parabel betrachten wollen wie M. Fermat, so handelnd, daß die Teile des Durchmessers zueinander seien wie der Würfel zum Würfel, dann wird es sich finden, daß dieselbe Parabel wie oben, oder vielmehr ihr Äußeres COAD, zum Rechteck ABCD sein wird wie die Summe der Kuben zum Biquadrat, d.h. wie 1 zu 4. Wenn wir annnehmen, daß die Teile des Durchmessers, d.h. die kleinen Linien EL, FM, GN, HO, IP, DC, zueinander sind wie die Biquadrate untereinander, wird es sich finden, daß die Summe aller dieser Linien zur Linie CD, gleichoft genommen , so sein wird wie die Summe der Biquadrate zum Quadratkuben, d.h. wie 1 zu 5; und in der Weise kann man fortfahren und Parabeln finden, die ihren Wert ändern, und das läßt sich machen mit allen Potenzen bis wohin man will.

(Satz 7) Was den Körper unserer Parabel angeht, er bildet sich, wenn man annimmt, daß das ganze Rechteck sich um seine Achse dreht und sich durch die Umdrehung von ABCD ein großer Zylinder bildet. Die Umdrehung des ersten Teils E A B 1 kann man Zylinder nennen, aber die jeder anderen nennt sich Rolle, weil wir jeden beiseite [als Teil] betrachten müssen, und dies ist für die großen Zylinder; aber bei der Betrachtung der kleinen, wie der Umdrehung, die EAQL, FARM und alle anderen machen, lassen wir beiseite, was im Innern der Parabel ist, und betrachten nur das Äußere; denn alle Teile der kleinen Zylinder oder Rollen in der Parabel können keinen so großen Teil ausmachen wie die Rolle D I 5 C, und daher vernachlässigen wir alle diese Teile, die nicht soviel wert sind wie einer, was von keiner Betrachtung ist in den Indivisibeln.

Und mit Hilfe der kleinen Linien, d.h. der Teile des Durchmessers, betrachten wir den Raum außerhalb der Parabel, und eingeschlossen in diese Linien: Alle diese Zylinder verhalten sich zueinander wie ihre Basen, d.h. wie ihre Kreise; aber die Kreise sind zueinander wie das Quadrat des Radius des einen zum Quadrat des Radius des andern: wie in unserer Figur das Quadrat von AE zum Quadrat von AF so ist wie das erste zum zweiten Quadrat, und das Quadrat von AF zum Quadrat von AG wie das zweite zum dritten etc. Aber ein Quadrat übertrifft seinen Nachbarn um zweimal seine Seite, nämlich die Seite des kleineren Quadrats plus 1: es ergibt sich also, daß alle Linien, nämlich AE, EF, FG, GH, HI, ID, alle um Quadrate verschieden sind, d.h. jede zweimal genommen plus 1. Nun betrachten sich aber alle diese Einheiten in den Indivisibeln überhaupt nicht als endliches Ding. Wir nehmen also alle diese Linien, jede wie zweimal eine Seite, und dann sagen wir, daß die kleinen Linien EL, FM, GN, etc. zueinander sind wie Quadrate; wir betrachten sie als Quadrate und sagen, daß der Raum ELQ soviel wert ist wie zwei Seiten eines Quadrates mal seinem Quadrat EL, und das Quadrat von FM mal dem Doppelten seiner Seite FA macht den Raum FMR; und ebenso macht das Quadrat von GN mal zweimal GA den Raum GNS, etc. Nun ist aber ein Quadrat mal zweimal seiner Seite gleich zweimal dem Würfel; also sind alle kleinen Linien zusammen, oder der ganze Raum, den sie außerhalb der Parabel einnehmen, wie zweimal die Summe der Kuben zum Quadrat von CD, so oft genommen, wie es Teilungen in der Linie DA gibt, d.h. zum Quadrat von CD mal dem Quadrat derselben CD, also zum Biquadrat.

(Satz 8) [pl. XVI, Fig. 3]Man muß jetzt ABCD betrachten, oder die Parabel CPOMAB, die sich um ihre Achse dreht wie die vorige, aber mit dem Unterschied, daß die Linie AB in einander gleiche Teile geteilt ist. Wir betrachten den Körper oder Zylinder, den DC bildet, der als Basis den Kreis hat, dessen Radius die Linie DA ist, die kleinen Zylinder haben als Radien ihrer Kreise EA oder LQ, was gleich ist, MR, NS, OT, PV etc. Nun sind alle diese kleinen Zylinder zueinander wie ihre Basen, d.h. ihre Kreise, und die Kreise sind zueinander wie die Quadrate ihrer Radien: nun sind die Quadrate der kleinen Linien zueinander wie die Linien AQ, QR, RS, ST, TV, nämlich in der gleichen Differenz einer Einheit, d.h., daß die Quadrate aller dieser Linien zueinander in der Ordnung der natürlichen Zahlen sind. Wenn also das Quadrat von LQ 1 ist, wird das von MR 2 sein, das von NS 3, das von OT 4, und das von RV 5. Wenn nun die Zylinder zueinander stehen wie die Quadrate der Radien ihrer Basen oder Kreise, folgt, daß alle Quadrate dieser kleinen Linien zum Quadrat der großen BC, gleichoft genommen, so sind wie die Summe der Folge der natürlichen Zahlen, begonnen mit der 1, zum Quadrat der letzten ist.

Aber das parabolische Konoid, d.h.der Körper, der durch die Umdrehung von CNLAB gemacht wird, ist zum ganzen Zylinder, nämlich zu dem, der durch die Umdrehung von ABCD entsteht, wie alle kleinen Linien zur großen, ebensooft genommen; folglich ist das parabolische Konoid zum Zylinder, wie die Summe der Zahlen, d.h. das Dreieck, zum Quadrat, oder ebensogut wie die Hälfte zu ihrem Ganzen; denn die Summe der Zahlen ist zum Quadrat (in der Betrachtungsweise der Indivisibeln) wie die Hälfte zum Ganzen; wie wenn die Summe 10, Dreieck von 4 ist, das Quadrat ist 16, wovon die Hälfte 8 durch das Dreieck um 2 übertroffen wird. Nun gilt dies für die Hälfte vom anderen; denn wenn man fortfährt in der Folge der Zahlen, wird man sehen, daß das Dreieck immer die Hälfte des Quadrats um einen kleinen Teil übertreffen wird, der folglich schließlich im Unendlichen verschwinden wird.

(Satz 9) [pl. XVI, Fig. 2] Jetzt muß man die Figur ABCD betrachten, wie sie ihre Runde macht über AD, dann wird die Linie CD der Radius der Basis oder des Kreises des Gesamtzylinders sein: die Linien PI, OH, NG, MF, LE sind die Radien der Kreise oder Basen jedes ihrer Zylinder. Nun ist aber wegen der Eigenschaft der Parabel die Linie EL zu FM wie das Quadrat zum Quadrat, und also alle anderen kleinen Linien in Folge; folglich wird das Quadrat von EL zum Quadrat von FM so sein wie das Biquadrat zum Biquadrat, und ebenso alle anderen kleinen; also sind sie alle zusammen zueinander wie das Biquadrat von DC, genommen ebensooft wie es kleine Linien gibt, d.h. wie die Summe der Biquadrate zum Quadratkuben; und dies ist das

Verhältnis des Rotationskörpers von CDA zum geraden Zylinder der Rotation von CB, d.h., sie sind wie 1 zu 5.

(Satz 10) [pl. XVI, Fig. 3] Jetzt betrachten wir, daß die Figur sich um CD parallel zur Achse dreht. Durch diese Umdrehung ist AD der Radius der Basis oder des Kreises des großen Zylinders; die Linien 10 L, 9 M, 8 N, 7 O, 6 P sind jede der Radius von Kreis oder Basis ihres Zylinders, die zueinander sind wie ihre Basen oder Kreise, und die Kreise sind zueinander wie die Quadrate der genannten Linien: also sind alle Quadrate dieser kleinen Linien zum Quadrat der großen Linie ebensooft genommen, wie die kleien Zylinder zum großen. Aber ich kenne nicht das Verhältnis der kleinen Quadrate zum großen, welches ich durch eine Größe suche, die ihm gleich ist, und ich sage, daß das Quadrat von L 10 soviel ist wie das von Q 10, und das Quadrat von QL minus das Rechteck von Q 10 Q L, zweimal genommen; das Quadrat von M 9 ist das von R 9 und das von MR minus das Rechteck von 9 R M, zweimal genommen, und ebenso die anderen bis ins Unendliche. Wenn wir nun den Vergleich machen, sagen wir, daß die Quadrate von Q 10 und QL im Vergleich zum einzelnen Quadrat Q 10 von gleichem Verhältnis zwischen den beiden großen sind, die gleich sind: das gleiche gilt für alle anderen Quadrate. Die großen sind gleich, es bleibt der Wert der kleinen LQ, MR etc. zu suchen. Aber wir haben oben gesehen, daß sie zum großen Quadrat sind wie die Hälfte zum Ganzen: wenn wir nun ein Ganzes zu seiner Hälfte hinzufügen, und es mit einem anderen Ganzen vergleichen, haben wir ein Verhältnis von 3 zu 2. Setzen wir, daß das große Quadrat gleich 2 sei, das andere aus dem großen und seiner Hälfte wird gleich 3 sein; folglich wird das Verhältnis des letzten zum ersten gleich 3/2 oder 3 zu 2 sein; und fortfahrend, wird man wegnehmen, was oben zuviel in die beiden Quadrate gelegt worden ist, um den Wert des Quadrates L 10 zu finden, und wir haben gesagt, daß zweimal das Rechteck Q 10 Q L zuviel sei über das Quadrat L 10 hinaus; und ebenso die anderen; man muß also die Rechtecke zweimal von jedem Quadrat wegnehmen: aber alle Rechtecke haben als gleiche Höhe Q 10, also sind sie zueinander wie ihre Basen oder kleinen Linien, und ihre Körper zueinander wie ihre Basen. Aber wir haben gesehen, daß dieser Körper, gemacht durch die Rotation der Parabel, ein Drittel des genannten Zylinders ist: nun muß man zweimal das Rechteck wegnehmen, folglich wird man die 2 Drittel des Verhältnisses, das wir als 3 zu 2 gefunden hatten, abziehen müssen, und wenn man 9 zu 6 setzt statt 3 zu 2 und von 9/6 2/3 oder 4/6 abzieht, bleiben 5/6 für den Wert von CAB, wenn es um DC gedreht wird, und der Rest des vollen Zylinders, d.h.CAD, ist soviel wie 1/6 des großen Zylinders ABCD.

Von der Conchoide [pl. XVI, Fig. 4]

(Definition) Die Conchoide bildet sich, wenn man von einem Punkt mehrere Linien zieht, die dieselbe Linie schneiden, sei sie kurvig oder gerade, und wenn alle Linien, gezogen von besagter Linie, ganz gleich sind, so wie B 1, D 2, E 3, F 4, G 5 etc., gezogen durch das Mittel [mit Hilfe] des Kreises CGBR, der in unendlich viele gleiche Teile (nach der Regel der Indivisibeln) geteilt ist, und durch diese ist die Conchoide 1 9 C 1 aufgebaut, in der, wie in allen anderen, die Linien vom Umfang des Kreises bis zur besagten Conchoide alle gleich sind. (Satz 11) Nun teilen alle Linien, die den Umfang des Kreise teilen, beginnend im Punkt C und endend in 1, 2, 3, 4, 5, etc., die Conchoide wie den Kreis in gleich viele ähnliche Dreiecke, die sich gemäß den Indivisibeln verändern und Sektoren werden, und die zueinander wie Quadrat zu Quadrat sind (obwohl es im Endlichen einiges zu sagen gäbe); also ist der Sektor C 1 2 zum Sektor CBD oder CBV, was das gleiche ist, wie das Quadrat von C 1 zum Quadrat von CB. Schließlich ist der Sektor CBD oder CBV zu C 18 19 wie das Quadrat von CB zum Quadrat von C 19. Aber um die beiden zur

Conchoide gehörenden Quadrate hinzuzufügen, und um sie mit dem Kreis zu vergleichen, betrachte ich den Wert des Quadrats von C 1, der soviel ist wie die Quadrate von CB, B 1, plus das Rechteck unter C B B 1 zweimal; das Quadrat C 19 ist gleich den Quadraten von CB, B 19 oder B 1, die gleich sind, (denn B 19 beginnt am Umfang des Kreise und geht zum Punkt 19 der Conchoide, und folglich muß es gleich B 1 sein, das vom gleichen Umfang losgeht und zum Punkt 1 der Conchoide geht) minus zweimal das Rechteck C B B 19. Nun hebt aber das plus das Minus auf, daher sind diese beiden zusammengefügten Größen zweimal das Quadrat CB plus das Quadrat von B 1 zweimal; folglich sind der Sektor C 1 2 und der Sektor C 19 18 zu den Sektoren CBD, CBV, wie zweimal die Quadrate CB, B 1 zu zweimal dem Quadrat CB, und wenn man die Hälfte nimmt, wird das Quadrat CB + das Quadrat B 1 zum Quadrat CB sein wie die Sektoren C 1 2, C 19 18 zu den Sektoren CBD, CBV; und der ganze Raum der Conchoide ist zum Raum des Kreises wie die Quadrate CB, B 1 zum Quadrat CB, oder ebensogut wie die Sektoren C 1 2, C 19 18 zu den Sektoren CBD, CBV.

Ich mache einen Halbkreis vom Intervall B 1, und ich teile ihn in ebensoviele ähnliche Dreiecke wie es im ersten Kreis gibt; und anstatt das Quadrat B 1 zu betrachten, nehme ich das Quadrat 20 21; wie also das Quadrat CB und das Quadrat 20 21 zum Quadrat CB sind: so ist der ganze Raum des Kreises und des Halbkreise zusammen zum Raum des Kreises. Aber wir haben gezeigt, daß die ganze Conchoide zum Kreis so ist wie das Quadrat CB + das Quadrat B 1 oder ihre Sektoren zum Quadrat CB; also ist die ganze Conchoide zum Kreis im selben Verhältnis wie Kreis und Halbkreis zum selben Kreis; und folglich ist die Conchoide gleich Kreis und Halbkreis zusammen.

Conchoide [pl. XVI, Fig. 5]

(Satz 12) Sei die Basis eines schiefen Kegels der Kreis BFC, dessen Zentrum A ist; die Spitze des Kegels ist in der Luft, mit einer solchen Schräglage, daß das Lot von der Spitze auf den Punkt N fällt. Wir nehmen mit den Indivisibeln an, daß durch alle Punkte das Kreises Berührungslinien gezogen seien, wie DH, EI, FL, GM etc. Wir sagen, daß, wenn man von der Spitze des Kegels eine Senkrechte auf jede der Berührungslinien zieht, und wenn man vom Punkt N, auf den das Lot von der Spitze fällt, eine Linie zum selben Punkt der Berührungslinie zieht, daß dann der Winkel ein rechter wird, und die Linie selbst senkrecht zur besagten Berührungslinie; und die Linie, die am Ende jeder der Berührungslinien passiert und wo der Winkel ein rechter wird, nämlich die Linie BILNMC, ist eine Conchoide, wie man findet.

Um das zu beweisen, muß man einen Kreis mit dem Durchmesser NA konstruieren, derselbe sei NPOAR, und zeigen, daß alle Linien, die eingeschlossen sind zwischen dem Umfang APNR und der Linie BHILMNC, zueinander gleich sind; wir beweisen, daß AOHD ein Paralelogramm ist; denn der Winkel D ist ein rechter, da DH Tangente und AD Radius ist; der Winkel H ist auch ein rechter, weil er so vom Punkt N gezogen ist, auf den das Lot von der Spitze des Kegels fällt;der Winkel O ist ein rechter, weil er im Halbkreis NPOA gemacht ist, und folglich ist der vierte OAD es auch; also ist es ein Parallelogramm, und die gegenüberliegenden Seiten sind gleich; also ist AD gleich OH, eingeschlossen zwischen dem anderen Kreis und der Kurve, und AD ist gleich AB, weil sie beide Radius desselben Kreises sind. Gehen wir darüber hinweg und betrachten wir PIEA. Der Winkel E ist ein rechter, weil er durch die Berührungslinie gebildet wird; der Winkel I ist ein rechter, weil er ebenso durch die Linie NI gemacht worden ist; der Winkel P ist ein rechter, weil er im Halbkreis gebildet ist, folglich ist der vierte es auch, und die gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms, also PI und AE oder OH, was das gleiche ist, sind gleich; also sind AB, OH, PI gleich, und sind Linien eingeschlossen zwischen den beiden Umfängen, d.h. zwischen dem Kreis NPAR und der Kurve BHILNMC, und man wird dasselbe von allen anderen Linien sagen, also ist die Kurve eine Conchoide.

Über Ringe

(Satz 13) Wenn man um eine Figur ein Parallelogramm beschreibt (wir haben in diesem Beispiel einen Kreis genommen) und das ganze um eine Seite des Parallelogramms rotieren läßt, ist der durch das Parallelogram gebildete Körper zu dem durch die Figur gemachten wie die Fläche des Parallelogramms zur Fläche der Figur.

[pl. XVI, Fig. 6] Wir werden das erklären durch einen Kreis, um den das Parallelogramm EFHG beschrieben ist: in der Mitte des Kreises hat man die Linie AB parallel zur Seite FH des Parallelogramms gezogen, die Natur dieser Linie muß so sein, daß alle im Kreis gezogenen Linien durch sie in zwei gleiche Teile geteilt werden. Wenn man nun annimmt, daß das ganze sich um die Linie FH gedreht hat, hat das Parallelogramm in dieser Umdrehung als Körper einen Zylinder gemacht, und der Kreis einen geschlossenen Ring, den man Annulus strictus nennt, d.h. der sich allmählich verkleinert, so daß nichts eindringen kann. Nun sind diese beiden Körper einander gleich, außer den Lücken, die, in den großen Körper gefüllt, in diesem mehr sind als im kleinen; man muß nun besagte Lücken vom großen ziehen um zu wissen, was für den kleinen bleibt, und alles läßt sich durch die Quadrate der Linien messen, die in der Figur sind. Ich beginne also mit der Hälfte des Parallelogramms, ich betrachte, daß diese Hälfte bei der Umdrehung einen Zylinder bildet, und daß der Halbkreis eine Figur macht, die von diesem Zylinder verschieden ist, von diesen kleinen Räumen, die man vom Zylinder wegnehmen muß. Die Quadrate des Zylinders betrachtend, sage ich, daß das Quadrat von IS gleich dem Quadrat von S 12 und I 12 plus zweimal dem Rechteck S 12 I 12 ist; das Quadrat TK ist gleich den zwei Quadraten T 13, K 13 plus zweimal dem Rechteck K 13 T; dasselbe muß man sagen von den anderen Quadraten, die zum Zylinder AFHB gehören. Aber wenn wir jedes Quadrat weglassen, das die Lücke zusammensetzt, und das außerhalb des Kreises von jedem Quadrat des Körpers ist, bleibt uns alles im Kreis, d.h. im kleinen Körper. Wenn man nun vom Quadrat SI das Quadrat S 12 wegläßt, bleibt das Quadrat I 12 plus zweimal das Rechteck S 12 I: dies ist gezogen vom ersten Quadrat des Zylinders. Wenn ich vom zweiten Quadrat des Zylinders das Quadrat T 13 ziehe, bleibt mir das Quadrat K 13 plus zweimal das Rechteck K 13 T, und ebenso die andern. Wenn ich also als Rest das Quadrat 12 I plus zweimal das Rechteck S 12 I habe, füge ich das Quadrat mit einmal dem Rechteck hinzu, und daher habe ich das Rechteck S I 12, und das Rechteck S 12 I. Ich merke mir diese Reste, und zur anderen Hälfte des Kreises übergehend, um es mit den Resten zusammenzufügen, betrachte ich, daß sie gemacht wird, wenn alles sich um dieselbe Linie wie vorher dreht, und was die großen Quadrate S 8, T 9 und die anderen machen. Ich betrachte, wie sie die kleinen Quadrate I 8, K 9 überragen, und die anderen , die im Halbkreis sind, und ich sage: Das Quadrat S 8 ist gleich den zwei Quadraten SI, I 8 plus zweimal dem Rechteck S I 8. Das Quadrat T 9 ist gleich den Quadraten TK, K 9 plus zweimal dem Rechteck T K 9, und so die anderen. Nun muß man von allen diesen Quadraten die Quadrate des Zylinders weglassen, d.h. von SI, TK etc., und wir haben als Rest das Quadrat von I 8 plus zweimal dem Rechteck S I 8, das Quadrat von K 9 plus zweimal dem Rechteck T K 9, etc., was man zum anderen Raum des Halbkreises hinzufügen muß.

Um diese Verbindung zu machen, nehme ich das Quadrat von 8 I, das ich zum Rechteck S 12 I hinzufüge, das ich als Rest zum anderen Halbkreis habe, und ich mache das Rechteck S I 12, das ich schon einmal habe, und folglich habe ich es zweimal. Zum zweiten Kreis, dem die Quadrate

8 I, 9 K weggenommen sind, ist mir geblieben zweimal das Rechteck S I 8, welches dasselbe ist wie das vorige, und folglich habe ich viermal das Rechteck S I 8; also wird viermal das Rechteck zum Quadrat von SO so sein wie der Körper des Ringes zum gesamten Zylinder; und statt zu sagen viermal das Rechteck, verdoppele ich die Linien oder Seiten des Rechtecks, und ich sage, daß das Rechteck SO mal 8 12 ganz allein zum Quadrat SO so ist, wie der Körper des Ringes zum ganzen Zylinder. Aber alle diese Rechtecke zusammengenommen bis zum Unendlichen sind alle von gleicher Höhe untereinander und mit dem Gesamtparallelogramm; sie sind also zueinander wie ihre Basen oder Linien, d.h. wie der Raum dieser Linien, die eingeschlossen sind im Kreis, zum Raum der großen Linien, die das Parallelogramm zusammensetzen: also wie der Körper zum Zylinder, so wie die Fläche des Körpers zum Parallelogramm, was zu beweisen war.

(Satz 14) Wir finden das gleiche, wenn wir die ganze Figur um die Linie YZ rotieren lassen. Man muß zuerst untersuchen, was ABZY bei der Umdrehung macht, und was es von ABHF unterscheidet. Das Quadrat ZB ist soviel wie die Quadrate ZH und HB plus zweimal das Rechteck ZHB; das Quadrat 7 N ist gleich den Quadraten 7 X, XN plus zweimal das Rechteck 7 X N; und genauso von jedem anderen der großen Quadrate. Davon muß man alle Quadrate weglassen, die den Raum HY aufbauen, d.h. das Quadrat F Y, S 3, T 4 etc., wenn diese weggelassen sind, bleibt das Quadrat SI plus zweimal das Rechteck 3 S I, und das Quadrat von TK plus zweimal Rechteck 4 T K; wenn ich das Quadrat SI nehme und zu einem der Rechtecke hinzufüge, mache ich das Rechteck 3 I S, und das Rechteck 3 S I; dann zu 4 T, wenn man hinzufügt das Quadrat von KT zu einem der Rechtecke, macht man das Rechteck 4 K T, und das Rechteck 4 T K. Man muß sich das alles merken, und übergehen zur Betrachtung des Körpers, der sich durch die Umdrehung von ABGE um YZ bildet. Wir sagen, daß das Quadrat 3 O gleich den Quadraten von 3 I und IO plus zweimal Rechteck 3 I O; daß das Quadrat 4 Psoviel ist wie die Quadrate von 4 K, KP plus zweimal Rrechteck 4 K P, und ebenso die anderen. Vom Wert dieser Quadrate muß man alle Quadrate wegnehmen, die den Raum ABZY ausfüllen, d.h. die Quadrate 3 I, 4 K, 5 L usw.; folglich bleibt das Quadrat OI plus zweimal Rechteck 3 I O; und wenn ich zum Rechteck 3 S I das hinzufüge, was bei der Rechnung vom anderen Zylinder geblieben ist, das Quadrat OI, mache ich das Rechteck 3 I O; also habe ich im vorigen Zylinder zweimal das Rechteck 3 I S; und im letzten, wenn das Quadrat OI fehlt, bleibt zweimal das Rechteck 3 I O, welches dasselbe ist wie 3 I S; folglich wird das ganze zusammen viermal das Rechteck 3 I O sein; folglich wird das vierfache des Rechtecks 3 I O zum Quadrat von EY sein, wie der Zylinder oder vielmehr die Rolle GEFH zu Gesamtzylinder EGZY.

Nun muß man betrachten, was der Kreis bei der Umdrehung um dieselbe Linie YZ macht, und im Vergleich zum Gesamtzylinder; dieses muß man bei der Betrachtung eines Teils machen, nämlich der Hälfte der Figur A 12 B 9 A. Wir werden nun zuerst die Hälfte A 12 15 B nehmen und sagen: Das Quadrat von 3 I ist soviel wie die Quadrate 3 12 und 12 I plus zweimal Rechteck 3 12 I; das Quadrat von 4 K ist soviel wie die Quadrate 4 13, 13 K plus zweimal Rechteck 4 13 K, usw. Von dieser Gleichung muß man die Quadrate 3 12, 4 13 und alle anderen, die außerhalb des Kreises liegen, wegnehmen. Zum Rechteck 3 12 I füge ich das Quadrat I 12 hinzu, und ich mache das Rechteck von 3 I 12 und das von 3 12 I. Ebenso füge ich das Quadrat K 13 zum Rechteck 4 13 K, und ich mache das Rechteck 4 K 13 und das Rechteck 4 13 K; dies muß man sich merken, um es zur anderen Hälfte hinzuzufügen, die ich jetzt suche, und ich sage, daß das Quadrat von 3 8 soviel ist wie die Quadrate von 3 I plus I 8 plus zweimal Rechteck 3 I 8 ist, das Quadrat 4 9 ist soviel wie die Quadrate 4 K und K 9 plus zweimal Rechteck 4 K 9. Nun muß man dies alles zu der Größe hinzufügen, die ich in der anderen Kreishälfte gefunden habe, welche das Rechteck 3 I 12 und 3 12 I ist; und wenn ich zum Rechteck 3 12 I das Quadrat 8 I hinzufüge, mache ich das Rechteck 3 I 8, so daß ich das Rechteck 3 I 12 zweimal habe, und ich habe in der Diskussion der zweiten Hälfte (die

Lücken ausgelassen, d.h.die Quadrate von I 3, K 4 etc.) das Quadrat 8 I gefunden (das ich zum Rechteck, das ich schon vorher gefunden habe, hinzugefügt habe) plus zweimal das Rechteck 3 I 8, welches dasselbe ist wie 3 I 12; so daß ich viermal das Rechteck 3 I 8 habe, das zum Quadrat von EY ist wie der Ring oder von dem um YZ rollenden Kreis gemachte Körper zum Gesamtzylinder. Das Rechteck 4 K 13, viermal genommen, ist zum selben Quadrat EY wie der Körper des Kreises zum Gesamtzylinder, der durch EGZY gemacht wird.

Man muß den Zusammenhang [das Verhältnis] betrachten, den wir von der Rolle durch die Umdrehung des Parallelogramms EGHF zum Gesamtzylinder gefunden haben. Die Proportion ist: wie viermal das Rechteck 3 I O zum großen Quadrat EY, so ist die Rolle EGHF zum Gesamtzylinder: Zum Schluß sagen wir, daß viermal das Rechteck 3 I O, gefunden in der Rolle GF, zum großen Quadrat EY so ist, wie dieselbe Rolle GF zum Zylinder GY. Schließlich habe ich viermal das Rechteck 3 I 8, das zum großen Quadrat EY so ist wie der durch den Kreis A 8 B 12 gemachte Körper zum großen Zylinder. Es findet sich, daß das große Quadrat in beiden Vergleichen folgerichtig ist; folglich sind die Körper untereinander wie die Rechtecke untereinander; aber die Rechtecke sind alle von gleicher Höhe; wenn man die Höhe wegläßt, sind sie untereinander wie ihre Basen, d.h. wie die Linien des Kreises zu den Linien der Rolle: aber diese Linien umfassen im Falle der Indivisibeln den Raum jeder Figur; also wie der Körper oder Ring zur Rolle GF, so ist die Fläche A 8 B 12 zur Fläche GF, was zu beweisen war.

(Satz 15) Bei allen diesen Diskursen haben wir nur Verhältnisse zwischen Körpern und Flächen gefunden: jetzt betrachten wir, ob Körper gleich sind oder nicht. Ich werde zuerst über den Zylinder sprechen, den das Parallelogrammm EFHG macht, wenn es sich um die Linie FH dreht: seine Basis ist ein Kreis mit dem Radius GH, seine Höhe ist HF: anstelle des Kreises nehme ich, was ihm gleich ist, nämlich das Parallelogramm mit dem Radius als einer Seite und der Hälfte des Umfangs als der andern; und daher habe ich drei Seiten oder Linien, die mir dazu dienen sollen, um sie mit dem Körper zu vergleichen, von dem ich behaupte, daß er diesem Zylinder gleich sei. Der Körper hat also als Basis das Parallelogramm EFHG, als Höhe den Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser LD ist. Aber die Körper stehen nach Euklid untereinander in dem Verhältnis, zusammengesetzt aus ihrer Basis und ihrer Höhe; man muß nun betrachten, was sie gemeinsam haben. Ich finde, daß es im Zylinder drei Linien gibt, nämlich GH, HF und den Halbumfang des Kreises mit dem Radius GH. Im anderen Körpre habe ich die Linien GH, HF und den Umfang des Kreises mit dem Radius LD. Aber im einen und im andern habe ich zwei gemeinsame Linien, nämlich GH und HF, zwischen denen es kein anderes Verhältnis als Gleichheit geben kann, da sie gleich sind, und folglich kann man sie weglassen, und die Komposition der Verhältnisse wird zwischen dem Umfang eines Kreises und dem Halbumfang des anderen bleiben. Aber die Umfänge sind zueinander wie ihre Durchmesser: nun ist der Gesamtdurchmesser des ganzen Kreises, der zu DC gehört, gleich dem Halbumfang, der zum Radius GH gehört; also ist der Zylinder gleich dem Körper, was zu beweisen war.

(Satz 16) Jetzt muß man die ganze Figur betrachten, wenn das Parallelogramm EYZG durch Umdrehung um die Linie YZ den großen Zylinder macht. Ich sage, daß die Rolle GF gleich dem Körper ist, der als Basis das Parallelogramm GF hat, und als Höhe den Umfang eines Kreises mit dem Radius L 5. Ich sage auch, daß der Ring (d.h. der Körper, der durch die Umdrehung des Kreises entsteht, wenn das ganze um YZ dreht,) gleich dem Körper ist, der als Basis den Kreis ACBD hat, und als Höhe den Umfang eines Kreises mit dem Radius L 5.

Um diese Gleichheit zu beweisen, muß man zeigen, daß die folgenden vier Körper proportional sind, nämlich die Rolle, die entsteht, wenn das Parallelogramm EFHG sich um YZ dreht. Der zweite ist der Ring, der sich durch den Kreis bildet, wenn das große Parallelogramm GY sich um die Linie YZ dreht. Der dritte ist der, der als Basis das Parallelogramm EFHG und als

Höhe den Umfang des Kreises mit dem Radius ZB hat. Und der vierte ist der, dessen Basis der Kreis ACBD ist und dessen Höhe der Umfang des Kreises mit dem Radius L 5; und folglich, wenn man zeigt, wie der erste der besagten Körper dem dritten gleich ist, muß der zweite gleich dem vierten sein. Aber wir haben gezeigt, daß, wie viermal das Rechteck ZBH zum Quadrat von GZ ist, so die Rolle GH zum großen Zylinder GY. Jetzt müssen wir untersuchen, wie die Figur, die als Basis das Parallelogramm EFHG und als Höhe den Umfang des Kreises mit dem Radius L 5 hat, gleich demselben großen Zylinder GY ist.

Wir wissen, daß die Körper zueinander in dem Verhältnis stehen, das zusammengesetzt ist aus ihrer Basis und ihrer Höhe: ich betrachte, welches die Teile des einen und des anderen Körpers sind und finde, daß der große Zylinder zwei Teile hat, nämlich die Linie GZ, die der Radius seiner Basis ist, welche ein Kreis ist, die andere Linie ist HF. Aber weil wir drei Seiten in diesem Körper oder großen Zylinder brauchen, um ihn mit dem Körper zu vergleichen, dessen Basis das Parallelogramm GF ist und dessen Höhe der Umfang des Kreises mit dem Radius L 5, welcher Körper drei Linien hat, nämlich GH, HF und den Umfang des Kreises mit dem Radius L 5. Um drei Seiten im großen Zylinder zu haben, nehme ich anstelle seines Radius, der seinen Kreis repräsentiert, das, was dem Kreis gleich ist, nämlich den Radius GZ, und den Halbumfang desselben Kreises (das Rechteck aus diesen Linien ist nach Archimedes gleich dem Kreis).

Ich habe also drei Seiten oder Linien für den großen Zylinder, nämlich GZ, HF und den Halbumfang des Kreises mit dem Radius GZ. Es gibt also in diesen beiden Körpern zwei Seiten, die ähnlich sind; nämlich HF in beiden; und folglich tragen sie nichts bei für die Komposition der Verhältnisse, die bleiben wird zwischen den Linien GH, GZ, vorhergehend und folgend, und dem Gesamtumfang des Kreise mit dem Radius L 5, zum Halbumfang des Kreises mit dem Radius GZ. Aber weil die Umfänge sich wie die Durchmesser verhalten, nehme ich anstelle der Umfänge den gesamten Durchmesser, der zweimal L 5 ist, und für den Halbumfang setze ich einen Radius GZ; folglich ist das Verhältnis zusammengesetzt aus den Verhältnissen von GH zu GZ und von zweimal L 5 zu GZ.

Wenn man nun die vorhergehenden den einen mit dem anderen multipliziert und gleichermaßen die folgenden, wird man das besagte zusammengesetzte Verhältnis haben; also ist GZ mal GZ, d.h. das Quadrat von GZ zum Rechteck von GH mal zweimal L 5 oder ZB in besagtem zusammengesetzten Verhältnis; folglich sind die Körper untereinander wie das Rechteck von ZB zweimal mal GH zum Quadrat von GZ. Statt ZB zweimal mal GH nimmt man GH zweimal mal ZB: nun ist ZB mal GH zweimal gleich viermal das Rechteck ZBG; also ist der Körper, der als Basis das Parallelogramm GF hat und als Höhe den Umfang des Kreises mit dem Radius L 5, zum ganzen Zylinder wie viermal das Rechteck ZBG zum Quadrat GZ; also haben die Rolle und der Körper dasselbe Verhältnis zum ganzen Zylinder; also ist die Rolle, die sich bildet, wenn das Parallelogramm EFHG um die Linie YZ rotiert, gleich dem Körper, der als Basis dasselbe Parallelogramm EFHG hat und als Höhe den Umfang des Kreises mit dem Radius ZB.

Da diese beiden Körper aber gleich sind, die der erste und dritte von den vier proportionalen sind, werden die beiden anderen, der zweite und der vierte, auch einander gleich sein. Diese beiden Körper sind der Ring, der sich durch den Kreis bildet, wenn das große Parallelogramm sich um YZ dreht: der andere Körper ist der, der als Basis den Kreis ACBD und als Höhe den Umfang des Kreises mit dem Radius L 5 hat.

(Satz 17) Man muß nun sehen, was sich bildet, wenn die Umdrehung um die Linie AB stattfindet. Wir haben hier die Figur wie einen Kreis dargestellt, dasselbe gilt für eine Ellipse: also muß man sehen, was die Kugel macht, die durch die Umdrehung des Halbkreises ABC um den Durchmesser AB entsteht, oder das Sphäroid, das durch die Umdrehung der Halbellipse um dieselbe Achse entsteht.

Man muß hören, daß das Quadrat von I 12 zum Quadrat von K 13 so ist wie das Rechteck BIA zum Rechteck BKA; und das Quadrat K 13 ist zum Quadrat LD, wie das Rechteck BKA zum Rechteck BLA, und ebenso die andern, ebenso im Kreis wie in der Ellipse. Nun, ebenso die Kugel wie das Sphäroid, die durch die Umdrehung gebildet werden, sind zum Zylinder, der sich zur selben Zeit bildet, wie alle Quadrate I 12, K 13, und die anderen kleinen, zum großen Quadrat BH, ebensooft genommen. Aber als Verhältnis der kleinen Quadrate habe ich das Verhältnis der kleinen Rechtecke genommen, welches dasselbe ist. Man muß nun ein großes Rechteck haben, um es mit den kleinen zu vergleichen, um die großen Quadrate zu lassen. Ich nehme das Rechteck BLA, das soviel wie das Quadrat von LD oder MV ist, nämlich die großen Quadrate; und um den Vergleich zu machen, sage ich, daß das Rechteck BIA mit dem Quadrat LI gleich dem Quadrat von LA oder LD, seinem gleichen, ist, oder irgendein anderes der großen Quadrate; das Rechteck BKA plus das Quadrat von LK ist gleich demselben großen Quadrat LD, und ebenso mit allen kleinen Rechtecken, die sich machen lassen; folglich übertreffen die großen Quadrate die kleinen Rechtecke um alle kleinen Quadrate LI, LK, die immer kleiner werden, und folglich eine Pyramide bilden, die, wie wir wissen, der dritte Teil ihres Parallelepipeds oder Würfels ist. Wenn wir nun das Drittel weglassen, bleiben zwei Drittel als Wert der Sphäre oder des Sphäroids, die deshalb zwei Drittel ihres Zylinders sind; was zu beweisen war.

Über die Hyperbel [pl. XVII, Fig. 1]

(Satz 18) In der Hyperbel AEDBC ist der Scheitelpunkt C, d.h. daß man vom Punkt C aus die gegenüberliegende Hyperbel beginnen wird; AC ist der Durchmesser, transversal entzwei geschnitten im Punkt B, der sich das Zentrum der Hyperbel nennt. Man muß sehen, wenn die Hyperbel sich um die Linie AD, die Achse, dreht, welches Verhältnis der entstehende Körper oder das hyperbolische Konoid zu seinem Zylinder haben kann, d.h. dem Körper, der bei der Drehung des Parallelogramms FD um die Achse AD entsteht.

Wir wissen, daß das Konoid sich zum Zylinder verhält wie alle Quadrate zusammen im Raum AED, nämlich das Quadrat von HO, IP, LQ etc. zum Quadrat von ED, ebensooft genommen wie es kleine gibt. Es bleibt das Verhältnis der Quadrate untereinander mit dem großen zu suchen.

Die Eigenschaft der Hyperbel ist es, daß das Quadrat HO zum Quadrat IP so ist, wie das Rechteck CHA zum Rechteck CIA; das Quadrat IP ist zum Quadrat LQ wie das Rechteck CIA zum Rechteck CLA usw.; und daher sind alle kleinen Rechtecke zum großen Rechteck CDA, ebensooft genommen wie es kleine gibt, so wie alle kleinen Quadrate zum gleichoft genommenen großen. Aber um dieses Verhältnis zu wissen, ändere ich die kleinen Rechtecke in die ihnen gleichen, und an die Stelle des Rechtecks CHA setze ich das Rechteck CAH plus das Quadrat HA; an die Stelle von CIA das Rechteck CAI plus dem Rechteck IA usw.; für das große muß man nichts ändern. Man macht dann den Vergleich, zuerst die Rechtecke CAH, CAI und die anderen kleinen untereinander und zum großen CDA, ebensooft genommen wie es kleine gibt; und wir finden, daß alle kleinen Rechtecke dieselbe Höhe haben, nämlich CA, und dadurch verhalten sie sich wie ihre Basen. Wir haben also für die kleinen Rechtecke einen Körper mit der Höhe CA, und als Basis alle natürlichen Zahlen, die ein Dreieck bilden. Wenn ich anstelle der Linie CA die Hälfte AB nehme, habe ich einen Körper, der als Basis das Quadrat von AD hat, und als Höhe die Linie BC; dieser ist für die kleinen Rechtecke. Für das große Rechteck, sein Körper hat die Höhe DC, und als Basis DA, ebensooft genommen wie es kleine Rechtecke gibt, d.h. das Quadrat DA; folglich haben die beiden Körper dasselbe Quadrat DA als Basis; folglich müssen wir nur ihre Höhen betrachten, DC für den großen, BC für den kleinen, folglich sind alle kleinen zum großen Rechteck, ebensooft genommen, so wie DC zu BC.

Es bleibt zu betrachten, wie die kleinen Quadrate zum selben großen Rechteck sind. Nun bilden alle kleinen Quadrate, nämlich die von AH, AI, AL, AM, AN eine Pyramide, die als Basis das Quadrat von AD hat, und als Höhe dasselbe AD (denn Quadrate, bis ins Unendliche verkleinert, bilden eine Pyramide). Aber die Pyramide ist ein Drittel ihres Parallelepipeds; d.h. des Körpers, der als Basis dasselbe Quadrat hat wie die Pyramide, und der sich ebenso wie die Pyramide erhöht, nämlich die Linie DA; also nehme ich statt der Höhe DA ein Drittel davon, und ich habe den Körper, der als Basis das Quadrat DA und als Höhe ein Drittel von DA hat; wenn ich dieses eine Drittel von CA zu BC hinzufüge, das ich vorher gefunden habe, habe ich ein Drittel von DA plus BC oder AB, was gleich ist, im ganzen DC.

(Korollar) Um es eleganter zu machen, sage ich: wie ein Drittel von AG (denn ich habe zu AC die Linie CG, gleich zu BC, hinzugefügt) mit einem Drittel von DA, das wie ein Drittel von DG zur Linie DC ist, so ist das hyperbolische Konoid oder der kleine Körper zum Zylinder von AFED. Wenn wir das Verhältnis des Kegels haben wollen, der entstünde, wenn das Dreieck AED um die Linie DA rotierte (um dieses Dreieck zu haben muß man die gerade Linie AE ziehen), sagt Euklid, daß der Kegel ein Drittel seines Zylinders ist: wenn wir also ein Drittel der Linie DC nehmen, wird sie zum Drittel der Linie DG, oder die ganze Linie DC zur ganzen DG so sein, wie der Kegel zum hyperbolischen Konoid; was zu beweisen war.

Andere Untersuchung über die Hyperbel

(Satz 19) Vom Zentrum der Hyperbel B habe ich die Asymptoten B 7, B 14 gezogen. Wenn ich durch den Punkt A die Tangente 8 A 1 und von der einen Asymptote zur anderen unendlich viele Parallelen ziehe, wie die Linien 9 H 2, 10 I 3 usw., ist das Rechteck 8 A 1 gleich dem Rechteck 9 O 2, 10 P 3, also sind diese Rechtecke einander gleich. Wenn das Dreieck B 7 D um DA rotiert, bildet sich ein Kegel, der gleich allen Quadraten in der Fläche ist, nämlich dem Quadrat von A 1, H 2, I 3, etc. und in der Fläche 1 BA. Wenn ich nun von allen Quadraten zuerst die Lücke 1 B A weglasse und alles, was außerhalb der Fläche EDA ist, bleibt mir das hyperbolische Konoid, das sich bildet, wenn EDA über DA rotiert. Nun ist das Quadrat H 2 soviel wie das Rechteck 9 O 2 plus das Quadrat von HO; das Quadrat I 3 ist soviel wie das Rechteck 10 P 3 plus das Quadrat IP; das Quadrat L 4 ist soviel wie das Rechteck 11 Q 4 plus das Quadrat LQ etc. Aber jedes der Rechtecke ist gleich dem Quadrat von A1, welches, wenn man es ebensooft nimmt wie es Rechtecke gibt, den Zylinder 1 20 D A macht; folglich bleiben, wenn man den Zylinder wegnimmt, die Quadrate von HO, IP, LQ, die gleich dem hyperbolischen Konoid sind, was zu beweisen war.

Proportion der Kugel oder des Sphäroids, oder ihrer Teile, zum umbeschriebenen Zylinder und zum einbeschriebenen Kegel [pl. XVII, Fig. 2]

(Satz 20)Man betrachtet hier, was diese Figur macht, wenn sie um BD rotiert, und nimmt nur den Teil 26 B L 4 , der den Zylinder bildet, und den Teil der Kugel oder des Sphäroids, der sich durch die Umdrehung der Figur 4 1 B L bildet. Das Quadrat von G 1 und die anderen kleinen sind zum großen Quadrat 4 L, ebensooft genommen wie es kleine gibt, wie der Teil der Sphäre oder des Sphäroids (denn es ist dasselbe Verhältnis in beiden) zum Zylinder 26 B L 4. Es ist nun die Frage, das Verhältnis dieser kleinen Quadrate zum großen zu suchen. Nun sind alle kleinen Quadrate zum großen wie die Rechtecke DLB, DIB, DHB, DGB zum großen Rechteck DLB; folglich sind alle genannten kleinen Rechtecke zum großen Rechteck DLB ebensooft genommen, wie alle kleine Quadrate zum großen Quadrat, ebensooft genommen: Um das Verhältnis der kleinen zum großen Rechteck, ebensooft genommen, zu finden, ändere ich den Wert der kleinen Rechtecke in andere, die ebensoviel wert sind, und ich sage folgendes: Rechteck DBL minus Quadrat BL ist soviel wie Rechteck DLB; Rechteck DBG minus Quadrat BG ist soviel wie Rechteck DGB; Rechteck DBH minus Quadrat BH ist soviel wie Rechteck DHB; Rechteck DBI minus Quadrat BI ist soviel wie Rechteck DIB; folglich finde ich in den kleinen Rechtecken einen Körper, der als Höhe DB und als Basen die kleine Linien LB, LG, LH, LI hat, die die Summe der natürlichen Zahlen sind, die ein Dreieck ist, welches immer die Hälfte seines Quadrates ist; folglich verdopple ich das Dreieck, um das Quadrat zu haben; und dadurch habe ich einen Körper, der als Höhe DA, die Hälfte von DB hat (denn beim Verdoppeln des Dreiecks habe ich die Hälfte von DB weggelassen) und als Basis das Quadrat von LB wie der andere Körper. Für das große Rechteck, nämlich DLB, ebensooft genommen, es setzt einen Körper zusammen, der als Höhe die Linie DL und als Basis dasselbe Quadrat LB hat. Da die Basen gleich sind, muß man nur die Höhen vergleichen, nämlich DB und BL. Aber man muß von den kleinen Rechtecken die Quadrate weglassen, die weniger sind; nun bilden diese kleine Quadrate eine Pyramide mit dem Quadrat von LB als Basis und der Höhe LB. Anstelle der Pyramide nehme ich ein Parallelepiped, das ihr gleich sei: ich behalte das gleiche Quadrat LB, und als Höhe ein Drittel von LB, welches die Höhe des der Pyramide gleichen Parallelepipeds ist (denn die Pyramide ist ein Drittel ihres Parallelepipeds). Man muß diesen Körper von dem andern mit derselben Basis abziehen, und folglich genügt es, die Höhe des letzteren von der Höhe des anderen wegzulassen. Hier ist berührend der Körper, der aus den kleinen Rechtecken gebildet wird. Es bleibt jetzt zu suchen der Körper des großen Rechtecks. Nun ist dieser Körper nichts anderes als der mit dem Quadrat LB als Basis und der Höhe DL. Dieser hat keine andere Basis als die andern, folglich müssen wir nur seine Höhe DL betrachten, und dann sagen wir, daß wie ein Drittel der Linie 25 L (denn DA minus ein Drittel von LB ist soviel wie ein Drittel von 25 L) zur Linie DL ist, so ist der Körper, der gemacht wird durch die Figur 4 2 B, zu seinem Zylinder, gemacht durch das Parallelogramm 26 4 L B.

(Satz 21) Wenn wir den Kegel haben wollen, der durch dieselbe Umdrehung entsteht, wenn man eine Linie B4 zieht. Wir wissen, daß der Kegel ein Drittel seines Zylinders ist, ich nehme also ein Drittel von DL (die den Zylinder repräsentiert) und ich sage, daß, wie das eine Drittel der Linie 25 L zum einen Drittel von DL ist, so unser Körper zum Kegel: aber wer sagt: ein Drittel einer Linie zu einem Drittel einer andern, sagt: die ganze Linie zur ganzen Linie; folglich ist der Körper zum Kegel, wie die Linie 25 L zur Linie DL; was zu finden war. (Satz 22) In derselben Figur muß man betrachten, daß, wenn sie um AB rotiert, wenn der Zylinder VEFY entsteht, daß sich dann auch ein Körper durch die Umdrehung der Fläche ABF bildet, der sich Höhlung [creux] nennt. Es bildet sich auch ein anderer Körper durch die Fläche B 30 F Y. Davon haben wir noch einen, der über dem Dreieck AYB entsteht und der ein Kegel ist. Man muß sehen, welche Beziehung alle diese Körper zueinander haben.

Die Unterteilungen sind bis zum Unendlichen gemacht worden, und alle Liniensind so gezogen wie man in der Figur sieht, daher sind die Figuren untereinander wie die Quadrate dieser Linien. Nun muß man für das, was des Kegels ist, den wir dem Körper von B 30 FY gleich machen wollen, sagen, daß die große Linie des ganzen Zylinders im Punkt I in zwei gleiche Teile geteilt wird, nämlich die Linie 15 I 38, und in zwei ungleiche Teile im Punkt 32; folglich ist Rechteck 15 32 38 plus Quadrat I 32 soviel wie das Quadrat I 38. Wenn ich also vom Quadrat I 38 das Quadrat I 32 abziehe, bleibt immer nur das Rechteck 15 32 38, das zum Körper B 30 F Y gehört.

Schließlich treten wir nun in die Eigenschaften der Ellipse ein; (denn was ich schließe, versteht sich für Kreis wie Ellipse.) Der Durchmesser EF, der Durchmesser BD und die gerade Seite des Durchmessers EF, nämlich die Linie 48, sind drei verhältnismäßige [proportionale]; und die erste ist zur dritten 48, wie das Quadrat der ersten EF zum Quadrat der zweiten DB. darüberhinaus ist das Rechteck E 49 F zum Quadrat der Ordinate 49 32 wie die Linie EF zur Linie 48, ihrer geraden Seite, folglich ist das Rechteck E 49 F zum Quadrat 49 32 wie das Quadrat EF zum Quadrat DB, oder das Quadrat von AF zum Quadrat von AB. Anstelle von AF setze ich BY, das ihr gleich ist; also ist das Quadrat BY zum Quadrat BA, wie das Rechteck E 49 F zum Quadrat 49 32; oder ebensogut ihre gleichen nehmend, ist das Rechteck 15 32 38 zum Quadrat IA gleich zum Quadrat 49 32. Aber das Quadrat BY ist zum Quadrat BA wie das Quadrat I 44 zum selben Quadrat IA; folglich ist das Rechteck 15 32 38 zum Quadrat IA, wie das Quadrat I 44 zum selben Quadrat IA; folglich ist das Rechteck 15 32 38 gleich dem Quadrat I 44; und dadurch ist der Kegel gleich dem Körper von B 30 FY. Aber der Kegel ist ein Drittel seines Zylinders, wenn ich also ein Drittel des Gesamtzylinders abziehe, bleiben zwei Drittel für den Körper oder die Höhlung, die durch die Fläche AFB entsteht, was wir gesucht haben.

Nun, nicht nur der Kegel ist gleich dem äußeren Körper, sondern auch jeder Teil ist gleich jedem Teil; d.h. daß der Körper, gebildet durch N 47 46 M, gleich dem Körper von 35 41 40 34 ist; der Körper 45 L M 46 ist gleich dem Körper 33 39 40 34, etc. Durch all dieses kommen wir zur Kenntnis des Schwerpunktes aller dieser Körper; denn der Schwerpunkt des Zylinders AY ist in der Mitte der Linie AB: nun ist der Schwerpunkt des Kegels bei 3/4 der Linie AB; der Schwerpunkt des ihm gleichen Körpers befindet sich im selben Ort auf der Linie BA bei 3/4 von ihr; folglich ist nach Archimedes der Schwerpunkt der Kugel oder des Sphäroids, das vom Zylinder übrigbleibt, bekannt, weil er in der reziproken Proportion der beiden Körper ist, nämlich der Sphäre oder des Sphäroids zum äußeren Körper, d.h. zu B 30 F Y, zu den Linien, die vom Schwerpunkt des großen Körpers aus sind, zum Schwerpunkt des kleinen Körpers und zur Linie, die vom Schwerpunkt desselben großen Zylinders ausgeht zum Schwerpunkt der übrigbleibenden Figur, die ich suche, das ist von der Kugel oder vom Sphäroid.

Proportion des Kegels zum Zylinder [pl. XVII, Fig. 3]

(Satz 23) In dieser Figur ist das Dreieck zum Parallelogramm, wie alle natürlichen Zahlen zum Quadrat der größten, d.h. wie 1 zu 2. Wenn ihr es rotieren laßt über der Linie BD, ist der Kegel, der sich aus BDC bildet, zum Zylinder über ABDC wie 1 zu 3 nach Archimedes.

Über die Conchoide [pl. XIX, Fig. 1]

(Satz 24) Wir betrachten zuerst die große Dreilinie A 7 14: Das Zentrum der Conchoide ist A; die Conchoide 14 7 ist die erste, und die zweite Conchoide ist 16 17; die Regel, die sie trennt, ist BC; die Linien, die von diesem Maßstab oder dieser Linie ausgehen und zu den beiden Conchoiden gehen, nämlich C 7, M 6, L 5 usw. sind alle einander gleich, und ebenso sind die Linien C 17, M 22, L 19 gleich untereinander und zu den anderen oben, nämlich zu C 7, M 6 etc. Wir sagen folgendes:

Die große Dreilinie ist geteilt (gemäß den Indivisibeln) in unendlich viele ähnliche Sektoren, die Dreiecken ähnlich sind, aber nach den Indivisibeln nehmen wir sie für Sektoren: nun sind die ähnlichen Sektoren zueinander wie ihre Quadrate, wir müssen also das Verhältnis und den

Wert der Quadrate suchen, um unsere Schlüsse zu ziehen. Anstelle jedes Quadrates betrachten wir sein gleiches; und daher finden wir, daß das Quadrat A 7 soviel wert ist wie das Quadrat AC, C 7 oder C 17 plus zweimal Rechteck A C 7; das Quadrat A 17 ist soviel wert wie das Quadrat AC, C 7 minus zweimal Rechteck A C 17. Alles dieses zusammengenommen ist soviel wie zweimal das Quadrat C 7, plus zweimal das Quadrat AC, die Rechtecke, die plus und minus sind, heben sich weg; nun repräsentieren uns diese Quadrate die beiden Dreilinien, nämlich A 7 14, A 17 16.

(1. Schluß) Ich sage, daß die große Dreilinie A 7 14, und die kleine A 17 16 gleich zweimal den Quadraten AC und C 7 sind [Die kleine Figur, die hier gemacht wurde, weil es in dem Raum C 7 B 14 gar keinen Sektor gibt, der dem genannten Raum ähnlich wäre, sondern nur die Quadrate, die zueinander sind wie die Sektoren. Ich nehme also alle ähnlichen Sektoren, deren Winkel gleich den Winkeln in A seien, und die Höhe gleich den Linien C 7, M 6 etc.: diese Sektoren sind zu den großen Sektoren, wie die Quadrate von C 7, M 6, L 5 usw. zu den großen Quadraten A 7, A 6, A 5 etc.]. Da ich nun die obige Gleichheit zwischen den Dreilinien A 7 14 und A 17 16 und den Quadraten AC und C 7 zweimal genommen habe: anstelle des Quadrates C 7 nehme ich den ähnlichen Sektor, die untereinander demselben Verhältnis folgen wie besagte Quadrate; folglich anstatt zu sagen: zweimal die Quadrate C 7, M 6 und die anderen, nehme ich zweimal die Sektoren, eingeschlossen in der kleinen Figur TVYX, und ich sage zweimal die kleinen Sektoren mit zweimal dem Dreick ACB sind gleich der Dreilinie A 7 14 und der Dreilinie A 17 16, und dies ist die erste Konsequenz oder der erste Schluß.

(2. Schluß) Für die zweite, das ist wenn wir von der großen Dreilinie A 7 14 die kleine A 17 16 weglassen, also haben wir von einer Seite den Raum 16 17 7 14 zu vergleichen mit zweimal den kleinen Sektoren, dem Dreieck ABC und dem Raum 16 17 C B. Also, der Raum einer Conchoide zur anderen, d.h. 16 17 7 14, ist gleich zweimal die kleinen Sektoren plus zweimal der Raum 16 17 C B; das ist hier eine anderer Schluß.

(3. Schluß) Ich habe es ausgelassen zu sagen, daß, wenn ich von der großen Dreilinie und der kleinen die kleine weglasse, die große A 7 14 übrigbleibt, die gleich zweimal den kleinen Sektoren ist, zum Dreieck ACB und zum Raum 16 17 C B, was ein anderer Schluß ist.

(4. Schluß) Wenn man von der großen Dreilinie A 7 14 das Dreieck ACB streichen will, bleibt der Raum 7 C B 14, der gleich zweimal den kleine Sektoren mit einmal C B 16 17 ist, was eine vierte Schlußfolgerung ist.

(Satz 25)Jetzt müssen wir sehen, welche Beziehung es gibt zwischen dem Dreick ABC und dem Raum B C 7 14. Dies ergibt sich, wenn man das Quadrat A 7 betrachtet, von dem wir das Quadrat AC weglassen: Da wir nun die Dreilinie A 7 14 in unendlich viele ähnliche Sektoren geteilt haben, so wie es gemacht worden ist oben in den anderen Schlußfolgerungen, und da wir wissen, daß die Sektoren untereinander wie ihre Quadrate sind, sagen wir, daß das Quadrat A 7 gleich den Quadraten AC und C 7 plus zweimal dem Rechteck A C 7 ist. Wenn ich AC abziehe, bleibt mir das Quadrat C 7 plus zweimal das Rechteck A C 7. Man muß betrachten, welche Körper sich bilden.

Alle Quadrate C 7, M 6 usw. sind gleich; und daher ergeben alle zusammen ein Parallelepiped oder einen Körper mit der Höhe und Breite C 7, und als Länge eine beliebige Linie, nämlich ebensooft wie man die Quadrate genommen und zusammengefügt hat eins zum anderen; das ist der Körper, der sich bildet.

Der andere ergibt sich vom Rechteck A C 7, ebensooft genommen wie die obigen Quadrate, und bildet einen Körper der Höhe C 7 wie der andere, aber die Länge ist anders, nämlich die Linien AC, AM, AL etc., die alle ungleich sind.

Nun müssen sich diese beiden Körper zusammenstellen, um sie mit dem zu vergleichen, der aufgebaut ist aus den Quadraten AC, AM und den anderen, die alle ungleich sind; folglich ist dieser

Körper verkürzt um zwei Seiten. Aber man kann den Körper betrachten, wie wenn ich einen Kreis gemacht habe vom Zentrum A und dem Intervall AD: denn nun ist die Linie BC eine Berührungslinie des besagten Kreises im Punkt D; die Linie AD ist der Gesamtsinus; und die Linien AN, AO, AP sind alle Sekanten, also ist der Körper gebildet aus Quadraten von Sekanten. Da diese beiden Körper die gleiche Höhe haben, nämlich die Linie C 7 und andere, ist es leicht, sie zu verbinden, und von beiden einen Körper zu machen, der zusammengesetzt ist aus allen Quadraten C 7, M 6 etc. von einem Teil und der Linie C 7, multipliziert mit der Summe der Linien AC, AM und die anderen zweimal genommen (denn das Rechteck A C 7 ist zweimal im Quadrat A 7), d.h., daß man die Linien AC, AM verdoppeln muß.

Der Körper, den man mit diesem vergleichen muß, ist gemacht durch die Summe der Quadrate der Linien AC, AM und der anderen, die alle ungleich sind. Wir sagen also: wie der Körper, der gemacht ist aus der Summe der Quadrate AC, AM etc., zu dem Körper ist, der zusammengesetzt ist aus den beiden hier vorgestellten, so ist das Dreieck ABC zur Figur C 7 14 B. Aber im ersten Körper sind mir die Linien C 7, M 6 gegeben, und daher ihre Quadrate: außerdem sind mir die Linien AC, AM und andere auch gegeben, weil die Linie AD (die ich als Gesamtsinus oder Radius eines Kreises nehme, den ich mir als gegeben vorstelle) mir gegeben ist, und die Linie DE, auf denen ich meine Conchoide gemacht habe; und durch das Mittel vom Gesamtsinus AD und den Winkel BAD kenne ich alle Sekanten dieses Kreises, den ich durch den Radius AD beschrieben setze: diese Sekanten sind AN, AO, AP und die andern, die folgen. Im letzten Körper sind mir alle Quadrate von AC, AM gegeben, da die Linien gegeben sind; und so füge ich die Quadrate C 7, M 6 mit den Rechtecken zusammen, gemacht aus zweimal AC und C 7, das ganze ebensooft genommen, wie es Quadrate gibt. Nun sind CA, MA Sekanten, also ist es uns leicht, durch Rechnung den Wert zu finden, den wir mit dem zweiten Körper vergleichen, der gemacht ist aus der Anhäufung oder der Summe der Quadrate der Sekanten; und so ist das Verhältnis von ABC zum Raum B C 7 14.

Zeichnen eines Raumes über einem geraden Zylinder, der gleich einem gegebenen Quadrat ist, und das mit einem einzigen Zug des Zirkels [pl. XVIII, Fig. 1]

(Satz 26) Man verlangt, daß über einem geraden Zylinder mit einem einzigen Zug des Zirkels ein Raum gezeichnet wird, der gleich dem Quadrat der Linie AB ist. (Konstruktion) Um das zu tun, schneide ich die Linie AB im Punkt C in zwei gleiche Teile, und ich beschreibe den Kreis FME, dessen Durchmesser FE gleich AC sei. Über dem Kreis errichte ich einen Zylinder, dessen Höhe mindestens zweimal FE sei, und in der Mitte dieser Höhe sei der Punkt F; nun, indem ich den Zirkel über dem Intervall FE öffne, beschreibe ich einen Raum über der Oberfläche des Zylinders. Ich behaupte, daß dieser Raum soviel wert ist wie das Quadrat AB.

Zum Beweis teile ich den Kreis in unendlich viele Teile in den Punkten EGHI und anderen; von jedem dieser Punkte errichte ich Lote zur Ebene des Kreises in unendlicher Anzahl, wie die Punkte unendlich viele sind: Vom Punkt E, der der Endpunkt des Durchmessers ist, ziehe ich zu jedem Punkt der Division die geraden Linien EG, EH, EI usw., die im Halbkreis ELF sind. Nun sind alle diese kleinen Linien Sinus des Viertels eines Umfangs; was sich zeigt, wenn man vom Radius FE und dem Zentrum F einen Kreis macht mit dem Durchmesser zweimal EF; aber hier begnüge ich mich mit dem Viertel des Umfangs. Wenn ich nun vom Zentrum F unendlich viele Linien ziehe, die alle gleich FE sind, gehen sie bis zum Umfang dieses Kreises, und schneiden alle kleinen Linien EG, EH etc. in rechten Winkeln, denn der Winkel befindet sich im Halbkreis ELF, und folglich sind alle kleinen Linien Sinus des Viertels eines Umfangs.

Wir wissen, daß der Radius des Kreises zum Viertel des Umfangs ist wie alle kleinen Sinus zum Gesamtsinus, ebensooft genommen. Wir wissen auch, daß das Quadrat des Radius gleich der Figur ist, die gemacht ist durch die unendlich vielen kleine Sinus, die diese Viertel des Umfangs teilen. Nun ist der Radius FE, der gleich der geraden Linie AC, der Hälfte von AB ist; folglich ist viermal sein Quadrat soviel wert wie das Quadrat von AB. Nun sind die Sinus EG, EH, etc. gleich den Loten über den Punkten G, H, etc. bis zur Einschränkung, die durch den Zirkel gemacht ist, wie es gezeigt wird; und daher die Figur oder der Raum, gemacht durch den Zirkel, der geöffnet ist mit der Größe EF, der eine Fuß auf F gesetzt, was ein Punkt ist, der genommen ist auf einer Stelle der Oberfläche, und der andere Fuß z.B. auf dem Punkt E, und drehend über der Oberfläche des Zylinders, bis er zum selben Punkt E kommt: dieser Raum, eingeschlossen auf dem Zylinder, ist soviel wie viermal der Raum, eingeschlossen von den kleine Sinus, die das Viertel des Umfangs teilen; denn der Zirkel durchläuft die vier Viertel des Umfangs des Zylinders, wenn man so sagen kann. Nun ist angenommen, daß der Zylinder so in die Höhe oder nach unten verlängert ist, wie es sein muß, oberhalb und unterhalb des genannten Punktes F, und daß der Kreis FME parallel zu seiner Basis ist, um der Frage zu genügen.

Bleibt zu zeigen, daß die Linie EH gleich dem Lot im Punkt H ist, wenn sie beschränkt wird durch den Zirkel, der mit der Größe FE geöffnet ist. Für diesen Zweck muß man die Linie FH ziehen und zwei Dreiecke entwerfen [man betrachtet hier zwei Dreiecke, deren Gleichheit man beweisen will: das eine ist FHE, das andere hat als Basis FH, als Kathete das Lot vom Punkt H bis zur Begrenzung durch den Zirkel, und die Hypotenuse ist gleich FE, weil dies die Öffnung des Zirkels ist], das eine von der Linie FH und FE getragen zum Endpunkt des Lotes, das vom Punkt H gezogen ist und nach oben steigt vom Zylinder und von besagtem Lot, das von H ausgeht bis zur Begrenzung, die gemacht ist durch FE, getragen über die Oberfläche des Zylinders. Diese drei Linien machen ein rechtwinkliges Dreieck, das gleich dem Dreieck FEH ist; denn in beiden Dreiecken ist die Linie FH gemeinsam; der Winkel in H ist ein rechter, denn er bildet sich aus der Linie FH und dem Lot in H in einem der Dreiecke, nämlich in dem, dessen Gleichheit zu FEH man zeigen will, und gleichermaßen ist der Winkel in H vom anderen Dreieck FEH ein rechter, da er im Halbkreis ist; die Linie FE, die das Lot geschnitten hat, das in H errichtet ist, ist gleich FE; folglich ist die Linie EH gleich besagtem Lot, das vom Punkt H ausgeht, und das durch die Linie FE bei der Umdrehung des Zirkels geschnitten wird. Dasselbe läßt sich für alle Linien EG, EI, EL, EM etc. beweisen.

(Satz 27) Nun findet sich, daß diese Figur dieselbe ist wie die Figur 1, pl. 16, wenn man voraussetzt, daß der Umfang EHLF gleich BC in der Figur 1, pl. 16 ist, und daß sie in unendlich viele Sinus GE, HE, IE etc. geteilt ist, alle so, daß die Linie BC der Figur pl. 16 in unendlich viele Sinus geteilt ist, nämlich GH, IL, MN etc. Nun müssen wir die Figur 1, pl. 16 betrachten oder ebensogut die gegenwärtige, denn es ist nicht wichtig, und sehen, was sie machen. Z.B. wenn die Figur 1, pl. 16 um die Linie BC rotiert, macht sie einen Zylinder mit dem Rechteck BD, und einen anderen Körper mit der krummlinigen Figur ACB. Ich finde, daß der Zylinder das Doppelte des kleinen Körpers aus ACB ist. Um das zu zeigen, bediene ich mich der gegenwärtigen Figur, und ich nehme an, ich hätte eine unendliche Anzahl von Linien vom Punkt F zu allen Punkten gezogen, wie FP, FO, FN etc., die alle gleich den ersten sind, gezogen vom Punkt E zu denselben Punkten, nämlich EG, EH, EI etc. Ich sage auch, daß die Quadrate von GE und GF gleich dem Quadrat FE sind: es ist dasselbe wie die Quadrate EH und HF und die anderen; folglich sind alle Quadrate zusammen gleich den Quadraten von EF, ebensooft genommen. Aber in diesen kleinen Quadraten brauche ich nur die, welche die Figur aufbauen, nämlich die Quadrate von EG, EH, EI etc., gezogen vom Punkt E, die die Hälfte aller derer sind, die ich mit dem großen Quadrat FE verglichen habe; folglich sind alle diese kleinen Quadrate zu dem großen FE, gleichoft genommen, wie die Hälfte zum Ganzen. Aber die Körper sind untereinander wie alle Quadrate zusammen; folglich ist der kleine Körper, gemacht von der krummlinigen Figur ABC in der Figur von pl. 16 zum Zylinder von BD wie 1 zu 2; was zu beweisen war.

(Satz 28) Man betrachte nun in derselben Figur einen anderen Zug des Zirkels. Ich setze die eine Spitze in den Punkt F, den ich im Umfang des Kreises F 1 E L nehme, welcher Kreis die mittlere Basis des Zylinders ist, den man immer verlängert annimmt nach oben und unten so viel, wie es nötig ist. Man setzt also einen Fuß des Zirkels in F, und seine Öffnung ist F 1, was die Unterstützende des Viertels F 5 1 des Gesamtumfangs ist. Nun ist dieser Umfang geteilt in gleiche und unendlich viele Teile in den Punkten 2, 3, 4, etc., in jedem davon errichte ich Lote, wie oben: von denselben Punkten ziehe ich Lote auf den Radius FD, die ihn in eine unendliche Anzahl von ebensovielen ungleichen Teilen teilen. Man muß jetzt die Eigenschaften aller dieser Linien betrachten. Wir sehen, daß sich mehrere rechtwinklige Dreiecke bilden, deren Seiten F 2, F 1 und das Lot im Punkt 2, der in der Luft ist, sind; das zweite, F 3, F 1 und das Lot in die Luft im Punkt 3; F 4, F 1 und das Lot in die Luft im Punkt 4, und dieses Lot, gezogen in die Luft, vergrößert sich je nachdem, wie sich die Unterstützende verkleinert. Denn die Quadrate der zwei Linien F 2 und des Lotes in die Luft in 2 sind gleich dem Quadrat von F 1; die Quadrate von F 3 und dem Lot in 3 sind gleich demselben Quadart F 1 etc. Aber das Quadrat F 1 ist gleich dem Rechteck EFD, das Quadrat F 2 gleich dem Rechteck E F 10, das Quadrat F 3 dem Rechteck E F 11 etc.; folglich sind alle Rechtecke EFD, EF10, EF11, etc. untereinander wie die Quadrate F1, F2, F3 etc.; folglich sind alle Rechtecke E F 10, E F 11 etc. zusammen zum großen Rechteck EFD, wie alle Quadrate F 2, F 3 etc. zum großen Quadrat F 1. Wenn ich vom Rechteck EFD das Rechteck E F 10 abziehe, bleibt das Rechteck EF mal 10 D, das gleich dem Quadrat des von 2 in die Luft gezogenen Lotes ist; wenn ich vom selben Rechteck EFD das Rechteck E F 11 abziehe, bleibt das Rechteck EF mal 11 D, das gleich dem Quadrat des vom Punkt 3 in die Luft gezogenen Lotes ist. (Nun brauche ich die Quadrate dieser Lote, weil bei der Umdrehung der Figur 1, pl. 16 um BC diese Linien die Radien der Kreise repräsentieren, die man mit dem Quadrat des Radius der Zylinderbasis vergleichen muß.) Aber alle oben genannten Rechtecke haben gleiche Höhe, nämlich FE; folglich sind sie zueinander wie die Linien FD, F 10, F 11. Wenn man von der Basis eines Rechtecks die Basis eines anderen Rechtecks abzieht, bleibt ihre Differenz: wenn ich von FD F 10 abziehe, bleibt D 10, wenn ich F 11 von FD abziehe, bleibt D 11 etc. Nun sind diese Reste entsprechend den Quadraten der Lote, die bleiben, wenn ich das Quadrat F 2 vom Quadrat F 1 abziehe: von demselben Quadrat F 1 habe ich das Quadrat F 3 abgezogen, dann F 4 etc. Folglich folgen die Linien D 10, D 11, und die anderen untereinander derselben Beziehung wie die Qadrate besagter Lote. Aber die Linien D 10, D 11, D 12 etc. sind Sinus; denn die Linien 2 10, 3 11, 4 12 etc. sind Lote auf den Durchmesser EF; also sind die Quadrate der Lote zum Quadrat der großen FI ebensooft genommen, wie alle kleinen Sinus zum Gesamtsinus DF, ebensooft genommen. Aber die kleinen Sinus sind zu gleichoft dem Gesamtsinus wie der Radius des Kreises zum Viertelumfang; folglich ist der Körper, gemacht durch die Umdrehung der krummlinigen Figur ACB um die Linie BC zum Zylinder, gemacht durch das Rechteck BD, wie der Radius des Kreises zum Viertel des Umfangs (man muß hier verstehen, daß die Figur ABC gemacht ist von allen Loten, errichtet in den Punkten 2, 3, 4 etc., und daß AB gleich F 1 ist).

(Satz 29) Betrachten wir nun den Zug des Zirkels, gemacht über dem Intervall F 3, immer den Punkt F haltend, um den Zirkel einzusetzen. Es findet sich, daß das Quadrat F 4 mit dem Quadrat des Lotes im Punkt 4 gleich dem Quadrat von F 3 ist; das Quadrat F 5 mit dem des Lotes in 5 ebenfalls gleich F 3; etc. Nun ist das Rechteck E F 11 gleich dem Quadrat F 3, und das Rechteck E F 12 gleich dem Quadrat F 4, und ebenso für die anderen Rechtecke und Quadrate. Wenn ich also vom Rechteck E F 11 das Rechteck E F 12 abziehe, bleibt das Rechteck EF mal 12

11 gleich dem Quadrat des Lotes im Punkt 4. Wenn man vom gleichen Rechteck E F 11 das Rechteck E F 13 abzieht, bleibt das Rechteck EF mal 13 11, das gleich dem Quadrat des Lotes in 5 ist, etc. Wenn wir nun annehmen, daß eine Parabel gezogen sei vom Scheitel 11 gegen den Umfang des Kreises, und daß man von den Punkten 11, 12, 13, 14, 15, genommen auf seiner Achse 11 F, Ordinaten bis zum Umfang dieser Parabel zieht, dann sind die Quadrate dieser Ordinaten gleich den Rechtecken; denn das Quadrat der Linie vom Punkt 12 zur Parabel ist gleich dem Rechteck, gemacht durch die gerade Seite der Parabel, welche FE ist, und den Teil der Achse 11 12; das Quadrat der Ordinate vom Punkt 13 zur Parabel ist gleich dem Rechteck EF mal 11 13 etc. Dies zeigt, daß die Quadrate der Ordinaten gleich den Quadraten der Lote sind, die man in die Luft gezogen hat von den Punkten 3, 4, 5 etc. Und daher sind die Ordinaten gleich den besagten Loten. Aber da die Lote alle im selben Abstand sind, und die Ordinaten voneinander ungleich weit entfernt sind, ist dies der Grund, daß man die Fläche, gemacht durch die Lote, nicht mit der durch die Ordinaten gebildeten Fläche vergleichen kann, weil die Lote die Linie in gleiche Teile teilen, aber die Ordinaten die Achse nur ungleich teilen. Und so kann die Fläche, gemacht durch die Lote, nicht verglichen werden mit der Fläche, gemacht durch die Ordinaten, um das Verhältnis zu kennen.

Jetzt muß man das Verhältnis der Körper betrachten, wenn die Figur sich um F 5 3 dreht, ausgedehnt in eine gerade Linie, unterstellend, daß der Zug des Zirkels sich vom Punkt F macht, und mit der Öffnung F 3. Nun haben wir durch den obigen Diskurs gefunden, daß das Rechteck EF mal 11 12 gleich dem Quadrat des Lotes in 4 ist; das Rechteck EF mal 11 13 gleich dem Quadrat des Lotes in 5 etc.: folglich sind alle diese Linien homolog mit den Quadraten entsprechender Lote. Nun sind die Linien 11 12, 11 13, 11 14, etc. keine Sinus, weil sie nicht vom Radius D 1 ausgehen, denn man braucht die Linie D 11, daß sie nicht bis D 1 kommen. Wenn sie Sinus wären, hätten wir das Verhältnis wie im anderen vorangegangenen Verhältnis der Körper, nämlich wie die kleinen Sinus zum Gesamtsinus D 1 ebensooft. Nun sind die Linien 11 12, 11 13, 11 14 dieselben, wie wenn man vom Punkt 4 ein Lot nach 11 3 führt, und von 5 und 6 auf dasselbe 11 3, und ebenso von allen anderen Punkten, die den Umfang teilen. Nun sind alle diese Linien keine Sinus, denn es fehlt die Linie 11 D, oder das Lot, gezogen von 3 auf D 1, nämlich 3 25. Wie nun die Linie 11 3, oder ihre gleiche D 25, zum Umfang F 5 3, so sind alle kleinen Sinus zum Gesamtsinus ebensooft. Aber um die Gleichung der Körper zu finden, braucht man die Differenz der Sinus, nämlich D 12, D 13, D 14, D 15, D16 minus gleich oft D 11; folglich sind alle Differenzen der kleinen Sinus zum sinus totus, ebensooft genommen, minus denselben Raum D 11, gleichoft genommen, wie der durch die Quadrate der Lote gemachte Körper zum sich bildenden Zylinder. Dieses wird besser dargestellt durch diese andere Figur [pl. XVIII, Fig. 2]. Sei IB gleich dem Umfang F 5 3 ; AB gleich D 11 oder 3 25, und die Linien CG, HN, OP usw. gleich D 12, D 13, D 14 usw., den Sinus, von denen man AB oder D 11 ebensooft abziehen muß, d.h. das Parallelogramm ABIL. Dies alles muß man vergleichen mit gleichoft dem Gesamtsinus, der DF in der großen Figur ist, aber in der kleinen ist es IK, der das Parallelogramm IKBM macht, von dem man dasselbe Parallelogramm ABIL abziehen muß: folglich bleibt das Parallelogram LAMK, und von IKAB bleibt die Dreilinie LAPK; und folglich ist der durch die Quadrate der Lote gebildete Körper zum Zylinder der großen, wie die Dreilinie LAK zumParallelogramm LKMA. Aber da wir uns hiermit nicht begnügen, suchen wir Verhältnisse in Linien; und zur großen Figur zurückkehrend, sagen wir: wie alle kleinen Sinus zum großen ebensooft sind, so ist der Sinus 11 3 zum Umfang F 3. Nun muß man von diesem Verhältnis weglassen, was zuviel ist, und sagen: wie alle kleinen Sinus minus 11 D ebensooft zum Gesamtsinus ebenooft minus 11 D ebensooft; und die Proportion ändernd sagt man: wie der Gesamtsinus zu D11, so ist der Umfang F 5 3 zu dem Teil desselben Umfangs F 5 3, welchen Teil man von der Linie oder dem Sinus 11 3 abziehen muß; und ebenso ist die Linie 11 3, wenn man davon abgezogen hat, was von besagtem Umfang F 5 3 abzuziehen war, zum Rest desselben

Umfangs F 5 3 wie der kleine Körper, gemacht aus den Quadraten der Lote, zu ihrem Zylinder. Nun sind alle Sinus und der Umfang gegeben; folglich ist das Verhältnis der Körper bekannt, was zu beweisen war.

(Satz 30) [pl. XIX, Fig. 2.3] Nun muß man in derselben Figur das Verhältnis der Körper untereinander betrachten, wenn sie auf der als Gerade ausgespannten Kreislinie F 2 21 rollt, und wenn die Öffnung des Zirkels F 21 ist, ohne zu wiederholen, was hier gesagt wurde: man findet, daß die Quadrate der Lote, gezogen in die Luft von den Punkten 21, 22, 23, 24, etc. zueinander sind wie die Linien 20 19, 20 18, 20 17 etc. Nun müssen sich alle Linien in dieser Art und Weise betrachten, 20 D - 19 D, 20 D - 18 D, 20 D - 17 D etc. Die folgenden betrachten sich so, 20 D + 10 D, 20 D + 11 D, 20 D + 12 D, 20 D + 13 D etc. so wie 20 D genausooft genommen ist, wie es Teilungen im Umfang F 2 21 gibt und die anderen Sinus, nämlich D 10, D 11, D 12, D 13 etc. sind so oft genommen, wie es Teilungen im Viertelumfang F 5 1 gibt. Von diesen allen muß man die Linien D 19, D 18, D 17, und die anderen abziehen, so oft wie es Teilungen im Umfang 1 21 gibt. Hier ist eine der Gleichungen; die andere ist die Linie F 20, genommen ebensooft, wie es Teilungen im Umfang F 2 21 gibt.

Um diesen Diskurs besser zu verstehen, macht man die Figur 3, in der AB soviel ist wie F 1, ein Viertel des Umfangs; BC soviel wie 1 21, und die ganze AC ist soviel wie der Umfang 3 21; AN ist soviel wie F 20, und dadurch ist das Parallelogramm NC soviel wie das, was in 20 F 2 21 enthalten ist; NG ist soviel wie der Gesamtsinus FD, AG oder NI, sein gleiches, soviel wie D 20; NH, gleich zu OP, ist soviel wie der Umfang 1 21. Wir sagen nun, daß, wie das Rechteck ANPC zum Rechteck INPL+der Dreilinie NGO - die Dreilinie INH oder ihre gleiche OMP ist, so der Zylinder zu dem Körper, der sich bildet, wenn die vom Zylinder abgezogene Figur um den in eine gerade Linie ausgebreiteten Umfang F 1 21 rotiert; was zu beweisen war.

(Satz 31) Wir kommen nun zu einer Betrachtung, die darin besteht, immer denselben Punkt F zu nehmen und die Öffnung des Zirkels so, daß ihr Quadrat gleich dem Quadrat von FE und der Linie 30 ist, es findet sich, daß die Quadrate von FE und von 30 gleich den Quadraten von F 22 und vom Lot in 22 sind etc. Nun ist Quadrat von FE soviel wie die Quadrate E 22 und 22 F; folglich sind die Quadrate von E 22, 22 F und von 30 gleich den Quadraten von 22 F und dem Lot in 22. Ich lasse von beiden Gleichungen weg, was gemeinsam ist, nämlich das Quadrat F 22, und es bleibt mir von einem Teil das Quadrat E 22 + das Quadrat von 30 gleich dem des Lotes in 22; ebenso sind alle Quadrate der Lote in allen Punkten, die den Halbumfang teilen, gleich allen Quadraten der Linien, die von E ausgehen und in besagten Punkten enden, plus dem Quadrat von 30. Man muß bemerken, daß die Linie 30 sich nicht ändert, aber die anderen ändern sich immer, da die Quadrate E 22 und 22 F, E 23 und 23 F, und alle anderen gleich dem Quadrat FE, ebensooft genommen, sind. Aber von allen Quadraten brauche ich nur die Hälfte; folglich ist diese Hälfte gleich der Hälfte des Quadrats FE, ebensooft genommen. (Man nimmt nur die Hälfte dieser Summe von Quadraten; denn wenn man besagte Quadrate zum ebensooft genommenen Quadrat von 30 hinzufügt, hat man den Wert des Quadrats der Lote, was man braucht.)

Wir schließen also, daß der Körper, der sich durch die Umdrehung der Lote um den in eine gerade Linie ausgebreiteten Umfang bildet, gleich zwei Zylindern ist, der erste davon hat als einen Teil die Linie FE und als anderen denselben ausgebreiteten Umfang; und von diesem muß man nur die Hälfte nehmen. Der andere Zylinder hat denselben ausgebreitetn Umfang und die Linie 30 als Höhe; denn in beiden Zylindern dreht sich die Figur um den ausgebreiteten Umfang; daher ist der Zylinder der Lote gleich dem kleinen Zylinder und der Hälfte des großen zusammen;was zu zeigen war.

(Korollar) Man muß nun den Vergleich der Flächen sehen, und wie sie zueinander sind. Wir haben gefunden, das die Quadrate von E 22 und 30 gleich dem Quadrat des im Punkt 22 aufgestellten Lotes sind, und das Rechteck F E 19 ist gleich dem Quadrat E 22. Ich mache ein Rechteck gleich dem Quadrat 30 auf der Linie EF, und auf jeder anderen von E nach K gezogenen Linie, und so sind beide Rechtecke zusammengefügt, nämlich F E 19 und FEK, die soviel wie das Rechteck F E K 19 sind, gleich dem Quadrat von E 22 und vom Lot 30, wie auch gleich dem Quadrat des Lotes in 22. Wenn ich nun vom Punkt K als Scheitel eine Parabel beschreibe, deren gerade Seite gleich FE und deren Achse KF ist: das Quadrat der Ordinate, die vom Punkt 19 ausgeht, ist gleich dem Rechteck FE mal 19 K etc.; folglich sind die Quadrate besagter Ordinaten gleich den Quadraten der Lote, und dieselben Ordinaten gleich den Loten; daher muß die von den Loten eingenommene Fläche gleich der von den Ordinaten eingenommenen Fläche sein.

Aber diesen Vergleich kann man nicht auf diese Weise machen, weil die Lote den gleichen Abstand voneinander haben, aber die Ordinaten einen ungleichen, da die Linie FE ganz in ungleiche Teile geteilt worden ist, und folglich die Flächen nicht miteinander verglichen werden können.

(Satz 32) [pl. XX, Fig. 1] Wir betrachten jetzt das Verhältnis oder den Vergleich der Quadrate der Sinus mit dem Quadrat des Durchmessers FE. Der Umfang F 1 E ist in unendlich viele gleiche Teile geteilt, und die Linien 24 17, 23 18, 22 19, 21 20, 26 31, 27 32, 28 33 und 29 34 sind alle gerade (rechte?) sinus [sinus rectus]. Ich sage, daß das Quadrat des Radius D 24 soviel ist wie das Quadrat von 17 24 und das Quadrat von 17 D, welches Sinus des Komplements [cosinus] gleich der Senkrechte vom Punkt 24 auf den Radius D 1 ist, und ist gleich dem Sinus 29 34. Dasselbe Quadrat des Radius D 23 ist gleich den Quadraten von 18 23 und 18 D, Sinus des Komplements gleich dem Lot von 23 auf D 1, und auch zum geraden Sinus 28 33. Das Quadrat von D 22 ist gleich den Quadraten von 22 19 und von 19 D, Sinus des Komplements gleich dem Lot von 22 auf D 1 und gleich dem Sinus 27 33, etc., in der Art, daß alle Sinus von Komplementen gleich den vormals bezeichneten Sinus rectus sind; und so sind die Quadrate aller Sinus zweimal genommen (was man machen muß, da die einen gleich den anderen sind) gleich den Quadraten des Radius D 1, ebensooft genommen, wie es Sinus gibt. Aber das Quadrat des Radius ist nichts anderes als ein Viertel des Quadrats des Durchmessers; folglich ist das Quadrat des Durchmessers achtmal die Summe der Quadrate der Sinus, d.h., daß die Quadrate der Sinus zum Quadrat des Durchmessers, ebensooft genommen, so sind wie 1 zu 8. Dieses ist der erste Teil.

(Satz 33) Zum zweiten: das Quadrat von FE ist gleich den Quadraten von F 33 und 33 E, plus zweimal dem Rechteck F 33 E, welches zweimal das Quadrat 28 33 ist; dasselbe Quadrat FE ist gleich den Quadraten F 32 und 32 E plus zweimal das Rechteck F32 E, oder zweimal das Quadrat 32 27; dasselbe FE ist gleich den Quadraten F 31 und 31 E plus zweimal dem Rechteck F 31 E, oder dem Quadrat 31 26; das Quadrat FE ist gleich den Quadraten F 20 und 20 E plus zweimal Rechteck F 20 E, oder Quadrat 20 21, etc., soviel oben wie unten: und auf diese Weise wird das Quadrat gleich zweimal allen kleinen Quadraten F 34, 34 E; F 33, 33 E; F 32, 32 E und die anderen, in der Weise, daß das Quadrat FE, ebensooft genommen, das Doppelte dieser Quadrate ist, und darüberhinaus zu zweimal den Quadraten von 34 29, 33 28, 32 27 etc. Wir haben gesehen, wie alle Quadrate dieser Sinus 34 29, 33 28, etc. zum Quadrat des Durchmessers, ebensooft, so sind wie 1 zu 8. Nun sind sie hier zweimal, und die Sinus versus auch zweimal; folglich sind zweimal die Quadrate der Sinus Versus und zweimal die Quadrate der Sinus rectus gleich achtmal den Quadraten der Sinus rectus; wenn man von beiden Teilen zweimal die Quadrate der geraden Sinus wegläßt, bleibt auf einer Seite zweimal die Quadrate der Sinus versus gleich sechsmal den Quadraten der Sinus rectus; und wenn man die Hälfte nimmt, sind die Quadrate der Sinus versus gleich dreimal den Quadraten der Sinus rectus; folglich sind die Quadrate der Sinus versus zu denen der Sinus rectus wie 3 zu 1, aber das Quadrat von FE, ebensooft genommen, ist zu den Quadraten der Sinus wie 8 zu 1: also ist das Quadrat von FE ebensooft zu den Quadraten der Sinus versus wie 8 zu 3; was zu finden war.

(Satz 34) [pl. XX, Fig. 2] Der vorangegangene Schluß dient uns zur Auffindung des Körpers, den die Roulette macht, wenn sie um den Umfang des erzeugenden Kreises, der in eine gerade Linie ausgebreitet ist, rotiert. Denn der Körper, der sich durch die Sinus versus M 1, N 2, O 3, P 4 etc. bildet, ist zu dem Körper, der durch das aus dem Durchmesser des Kreises und dessen zu einer Linie ausgebreiteten Umfang zusammengesetzte Parallelogramm gemacht wird, wie 3 zu 8 durch die obige Schlußfolgerung. Wir wissen auch, daß der zwischen den Linien A 11 D und A 4 D eingeschlossene Raum gleich dem Halbkreis AHB ist, weil die Linien eines der Räume nach Konstruktion gleich den Linien des anderen Raumes sind: folglich ist das Doppelte des Raumes gleich dem Vollkreis AHBA, so daß alles, was man über den Kreis sagen kann, sich auf den verdoppelten Raum überträgt. Aber es ist gezeigt worden, daß der Zylinder von AB zu dem Körper, der sich bei der Umdrehung der Figur A 12 D 5 A um die Linie oder den Umfang AC bildet, so ist, wie 8 zu 2, welche 2 zu den oben gefundenen 3 hinzugefügt 5 sind, was das Verhältnis des ganzen Körpers der Roulette zu ihrem verdoppelten Zylinder ABDC ist, denn ABDC ist die Hälfte des Raumes, den die Roulette durchläuft.

Merken wir uns, daß dieser Körper zum Zylinder AD, gedreht um C, so ist wie 1 zu 4 oder 2 zu 8: es ist dieser, der den Raum macht, der eingeschlossen ist zwischen den beiden Linien A 12 D und A 4 D, der gleich dem ist, den der Halbkreis AHB durch dieselbe Umdrehung macht, weil die eine und die andere Figur diese gleichen Linien hat , und in gleichem Abstand von AC gesetzt, und folglich ist es ein Viertel des besagten Zylinders AD; und wenn man den genannten Körper zu dem hinzufügt, der sich durch den zwischen den Linien A 4 D und AC eingeschlossenen Raum bildet, der zum genannten Zylinder wie 3 zu 8 ist, hat man den Körper, der gemacht wird durch den Raum zwischen A 12 und AC, der 5 ist, wenn der Zylinder AD 8 ist.

<u>Auf einem geraden Zylinder einen Raum gleich der Oberfläche eines gegebenen schiefen Zylinders ziehen; und das durch einen einzigen Zug des Zirkels [pl. XXII, Fig. 1]</u>

(satz 35) Der Kreis BDCE ist Basis eines schiefen Zylinders, dessen Seiten ausgehen von den Punkten B, G, H, I etc. und schief einen anderen Kreis in der Höhe treffen, der die andere Basis des Zylinders ist und parallel zum ersten BCDE: (dieser Kreis kann dargestellt werden durch den Kreis FNOP, etc., aber er ist in der Luft und senkrecht über ihm) die Achse desselben Zylinders geht vom Zentrum A aus und trifft schief das Zentrum des besagten höheren Kreises. Nun nehmen wir an, daß von der Spitze der Achse ein Lot auf den Punkt T gezogen sei, und daß von der Spitze aller Seiten des Zylinders sich Lote fällen zu den Punkten F, N, O, P etc., die den Umfang eines Kreises mit dem Zentrum T und gleich BDC bilden, wie es leicht zu sehen ist. Wenn man nun beide Kreise oder Basen des Zylinders in unendlch viele Teile teilt in den Punkten G, H, I, L etc. und Linien GH, HI, IL usw. annimmt, gehen diese kleinen Linien durch den Umfang selbst, und der Zylinder findet sich auf diese Weise in unendlich viele Parallelogramme geteilt; denn die Seiten des Zylinders mit dem Teil des Umfangs der beiden Kreise bilden Parallelogramme, die den ganzen Raum des Zylinders zusammensetzen; auf die Weise, daß man alle Parallelogramme mit dem großen Parallelogramm, ebensooft genommen, vergleichen muß. Wenn ich vom Punkt G eine Berührungslinie G 2 ziehe, und vom G korrespondierenden Punkt N ein Lot auf diese Berührungslinie, das sie in 2 trifft; wenn ich von der Spitze zur Seite des Zylinders (ich meine die Seite, die in G beginnt und im andern Kreis oberhalb von N endet) einen Linie zum Punkt 2 ziehe: diese Linie ist senkrecht zur Linie G2. Von H ziehe ich eine Berührungslinie, und von O, korrespondierend zu H, ziehe ich ein Lot auf diese Berührungslinie, nämlich O 3, und ebenso mit den anderen Punkten I und P, L und Q, etc. Ich sage nicht mehr über die Linie oben, denn es reicht, einmal gesagt zu haben, daß sie senkrecht zur Berührungslinie ist. Wenn ich so genausoviele Lote gezogen habe, wie es Berührungslinien in jedem Punkt gibt, sind dies Linien N 2, O 3, P 4, O 5 etc. Wenn eine dieser Linien fortgesetzt wird wie 2 N 7, 3 O 8, 4 P 9, etc., werden sie alle im Punkt T enden, dem Zentrum des Kreises F S 17. Zum Beweis nehmen wir an, es gebe eine Linie AG, die mit 2 7 ein Viereck bildet: in diesem ist der Winkel 7 2 G nach Konstruktion ein rechter; der Winkel A G 2 ist eine rechter, nämlich vom Zentrum zum Punkt der Berührung; folglich sind 2 N und GA parallel. Es sei NT gezogen, so daß der Bogen GB gleich dem Bogen NF ist. Es folgt,daß der Winkel GAB gleich dem Winkel NTF ist, weil sie beide in den Zentren T und A der beiden Kreise gemacht sind, gleich BDC und F S 17, und folglich ist dieselbe Linie GA parallel zu NT, also sind 2 N 7 und NT zueinander parallel, aber sie treffen sich im Punkt N, und folglich sind sie zusammen nur eine Linie.

Jetzt muß man die Parallelogramme betrachten, an deren Stellen ich das Lot von der Spitze auf die obigen Berührungslinien nehme, wie von der Spitze der Seite des Zylinders, die von G ausgeht und in die Luft geht, ich senke das Lot auf 2, welches die Höhe oder Senkrechte des Parallelogramms ist, das aufgebaut wird durch die Linie G 2, die in den Indivisibeln als Umfang geht, und von der Seite des Zylinders, die von G in die Luft geht, welche Seite soviel wie zwei Seiten des Parallelogramms ist, nämlich beginnend in G und 2 und endend im Umfang der oberen Basis des Zylinders; und so hat man die vier Seiten des Parallelogramms, nämlich G 2 (das als Umfang geht) und ihre gleiche im Umfang der oberen Basis, und die zwei Seiten des Zylinders. Aber anstelle des Parallelogramms betrachten wir ein Dreieck, das als eine Seite das Lot von der Spitze der Seite auf 2 hat, und die sich Senkrechte oder Höhe des Parallelogramms nennen kann; und als die beiden anderen Linien die Linie G 2 und die Seite des Zylinders von G in die Luft. Nun ist in diesem Dreieck die Seite des Zylinders in Potenz soviel wie die Linie G 2, und das Lot gezogen von der Spitze und endend in 2. Man muß dann ein anderes Dreieck betrachten, in dem dasselbe Lot auf 2 eine der Seiten ist ; 2 N sei eine andere Seite; und die dritte sei die senkrecht fallende Linie von der Spitze der Seite auf die Fläche des Kreises in den Punkt N. Nun kann in diesem Dreieck das Lot auf 2 soviel wie die beiden Linien 2 N und das Lot von der Spitze auf N. Aber dieses Lot von der Spitze auf N, O, P, Q und andere Punkte des Umfangs ist immer gleich: aber die Linien 2 N, 3 O, 4 P, 5 Q etc. sind ungleich; denn 2 N ist soviel wie 7 T; 3 O soviel wie 8 T; 4 P ist gleich 9T, und ebenso mit den anderen, die alle ungleich sind.

Im ersten Dreieck ist G 2 und der andere Punkt, der im oberen Kreis die Seite des Zylinders ist, die von G aus in die Luft geht zum anderen oberen Kreis, soviel wie die Linie, die von der Spitze (welche der dritte Punkt in der Luft ist) gezogen ist und in 2 endet, und die Linie G 2 (man muß dies von allen anderen Punkten und Dreiecken verstehen, die sich auf diese Weise bilden lassen). Aber die Linien G 2, H 3, I 4 etc. werden immer größer; denn G 2 ist gleich der Unterstützenden A 7, die Linie H 3 ist gleich A 8, I 4 gleich A 9; alle diese Linien A 7, A8, A9 sind ungleich. Aber bevor ich schließe, muß ich beweisen, daß die Linie G 2 gleich A 7, H 3 gleich A 8 etc. sind; außerdem daß 2 N gleich 7 T, 3 O gleich 8 T, etc. Zu diesem Zweck betrachte man die Dreiecke 2 G N und A T 7, in denen der Winkel 2 N G gleich dem Winkel A T 7; denn die Linien GN, AT sind parallel, der Winkel N 2 G ist ein rechter nach Konstruktion, und gleicherweise T 7 A, der im Halbkreis ist, und folglich ist der dritte Winkel gleich dem dritten; die Linie GN ist gleich AT, und folglich das ganze Dreieck gleich dem anderen Dreieck, und folglich die Linie 2 N gleich 7 T, und G 2 gleich der Unterstützenden A 7; was zu zeigen war.

Es bleibt die Beziehung und das Verhältnis aller kleinen Parallelen zu ihrer größten, ebensooft genommen, zu sehen. Nun muß man betrachten, daß alle kleine Parallelogramme, obwohl sie gleiche Seiten haben,denn sie sind zusammengesetzt aus Seiten des Zylinders und des Teils des Umfangs, der in unendlich viele gleich Teile geteilt ist, und diese Teilung ist in beiden Kreisen oder Basen gemacht; und da die Winkel ungleich sind, sind die Parallelogramme ungleich, also ist ihre Höhe ungleich, und wegen dieser Höhe muß man die besagten Parallelogramme betrachten. Man muß zuerst das größte von allen sehen, das von BG gemacht ist, ebensoviel in der Basis des Zylinders BDC wie in der anderen in der Luft, und von den Seiten des Zylinders. Nun muß man in diesem Parallelogramm bemerken, daß das Lot, welches die Höhe des Parallelogramms ist, und das von der Spitze auf A fällt, nichts anderes als die Seite des Zylinders ist; und wenn man das andere Parallelogramm betrachtet, das als Seiten GH und die Seiten des Zylinders hat, dann sieht man, daß die Seite des Zylinders in Potenz soviel wie die Linie G 2 ist, und das Lot oder die Höhe desselben Parallelogramms; folglich ist das besagte Lot oder die Höhe des Parallelogrammms kleiner als das Lot des ersten, welches gleich der Seite des Zylinders ist; und daher werden diese Höhen oder Lote immer kleiner bis zum Viertel des Kreises, und danach wachsen sie bis zum folgenden Viertel.

Merken wir uns, daß die Linien G 2, H 3, I 4, L 5 etc., die Berührungslinien sind, für den Umfang von Teilungen des Kreises übergehen, und für die Seiten von Parallelogrammen.

[pl. XX, Fig. 3] Man muß in dieser geradlinigen Figur verstehen, daß KV gleich dem größten Lot ist und auch gleich der Seite des Zylinders, und die Senkrechte auf die Seite BG im Punkt B fällt: die Linie KX und die anderen Teilungen stellen dar und sind gleich denen des Umfangs, wie KX zu B 6 etc.; denn KE ist als gleich dem Viertel des Umfangs BHD angenommen. Das größte der Parallelogramme ist gemacht aus den Linien KV, KX; und wenn es ebensooft genommen wird wie es kleine gibt, nimmt es den Raum KVYE ein; folglich sind alle diese Linien zur großen KV ebensooft genommen, wie die Figur KVZE zum Viertel der Oberfläche des Zylinders, der hier durch das Parallelogramm KVYE repräsentiert wird.

Man muß weiter vorgehen und die Lote betrachten, die von der Spitze auf die Punkte 2, 3, 4, 5 etc. des Kreises BDC gezogen sind. Nun ist jedes dieser Lote, z.B. das vom Punkt 2 ausgehende, soviel wie die Linie, die senkrecht auf den Punkt N und die Linie N 2 fällt; das Lot auf 3 ist in Potenz soviel wie das auf O und die Linie O 3 etc. Dieses läßt sich besser im kleinen Kreis A 9 T erklären. Man muß nun die Linie entwerfen, die vom Punkt A ausgeht, dem Zentrum des großen Kreises BDC, der Basis des schiefen Zylinders, und das Zentrum des anderen Kreise findet, der die obere Basis desselben Zylinders ist, von dessen Zentrum man das Lot auf den Umfang des kleine Kreises A 8 T im Punkt T fällt. Wenn man den Punkt T gefunden hat, bildet man aus dem Intervall AT als Durchmesser den Kreis A 9 T; der Halbumfang desselben ist in soviele gleiche Teile geteilt, wie es im Viertel BD des Umfangs des Kreises BDC gibt. Dann ziehe ich von dem anderen Punkt, von dem ich das Lot auf T gefällt habe, Linien zu den Punkten 11, 10, 9, 8, 7, etc., welche die Teilungen des Kreises sind, wie gesagt. Vom Punkt T ziehe ich Linien zu denselben Punkten 11, 10, 9, 8, 7. Ich sage außerdem, daß der Kreis A 9 T uns die Basis eines geraden Zylinders darstellt, der seine andere Basis in der Luft hat, nämlich einen Kreis, dessen Umfang von dem Punkt ausgeht, von dem die auf T fallende Linie gezogen ist, und der auch das Zentrum der oberen Basis des schiefen Zylinder ist, und man nennt hier den besagten Punkt in der Luft Scheitel. Wir sagen also, daß die von besagtem Scheitel zum Punkt 7 in die Luft gezogene Linie in Potenz gleich den beiden Linien ist, deren eine die ist, welche von besagtem Scheitel senkrecht auf T fällt; und die andere ist T 7. Die Linie, die vom Scheitel ausgeht und zum Punkt 8 geht, ist in Potenz gleich der obigen, die vom Scheitel auf T fällt, und gleich T 8, und ebenso von allen anderen Linien, die zum Punkt des Kreises A 9 T gehen. Nun ist die Linie, die auf den Punkt T fällt, immer dieselbe, und ist die senkrechte Höhe des schiefen Zylinders; und alle Linien, die vom Scheitel ausgehen und zu den Punkten 7, 8, 9, 10, 11 etc. gehen, bilden eine Kegel, dessen Spitze der besagte Punkt ist, von dem alle diese Linien ausgehen, auch die auf T fallende; und jede der besagten Linien vom Scheitel auf 7, 8, 9 etc. ist in Potenz gleich der besagten Linie, die auf T fällt, und gleich der, die von T auf den Punkt des Umfangs A 9 T geht, in dem die vom Scheitel ausgehende auch endet.

[pl. XX, Fig. 4] Nun muß man dabei die Figur des vorangegangenen Diskurses betrachten, die hier beschrieben ist, in der wir annehmen, daß die Öffnung des Zirkels sich über einem geraden Zylinder bilden soll, indm man einen Fuß des Zirkels als Pol in den Punkt F stellt, und den anderen über den Zylinder zieht und die Öffnung größer als den Durchmesser FE macht: die Spitze des Zirkels wird das kleinste der Lote berühren, welches vom Punkt E ausgeht, und steigt an über die Höhe des Zylinders, und die folgenden Lote, die von den Punkten 29, 28, 27, 26, 21, 22, 23 etc. bis zum selben Punkt F gehen, an dessen Stelle das Lot gleich der Öffnung des Zirkels ist, und folglich das größte dieser Lote. Nun ist die Linie, welche die Öffnung des Zirkels ist, in Potenz gleich der Linie FE, und dem kleinsten Lot, nämlich dem, das vom Punkt E über die Länge des Zylinders geht. Nehmen wir jetzt irgendeinen anderen Punkt, wie 22. Wir sagen, daß die Linie, die die Öffnung des Zirkels ist, soviel wie das Quadrat von F 22 und vom Lot in 22 ist; folglich ist das Quadrat FE und das Quadrat des Lotes in E gleich den Quadraten F 22 und des Lotes in 22. Statt dem Quadrat FE nehme ich das Quadrat F 22 und 22 E; folglich sind das Quadrat F 22 und das Quadrat des Lotes in 22 soviel wie das Quadrat von F 22, 22 E, und vom Lot in E. Wenn man von beiden Größen das gemeinsame wegläßt, nämlich das Quadrat F 22, bleibt das Quadrat des Lotes in 22 gleich den Quadraten von 22 E und dem Lot in E; und wenn man dasselbe in den anderen Punkten 23, 24, 25, 26, 27 etc. macht, hat man das Quadrat des Lotes in 23, z.B. gleich den Quadraten von 23 E und dem Lot in E, etc.: also finden wir, daß die Quadrate der besagten Lote in die Luft gleich den Quadraten des Lotes in E und der Unterstützenden 23 E, 22 E, 26 E etc. sind.

Wenn man nun annimmt, daß der Kreis A 9 T Fig 1, pl. 22, ebensogroß sei wie F 22 E der gegenwärtigen Figur, und daß beide in gleicher Weise geteilt seien, und daß die Öffnung des Zirkels in Potenz soviel wie der Durchmesser FE sei, und daß die Höhe des schiefen Zylinders, nämlich die senkrecht auf T fallende Linie, also die Lote, eingeschränkt durch den Zug des Zirkels und gezogen von den Punkten E, 29, 28, 27, 26 etc. alle gleich den Linien sind, die auf die Punkte T, 11, 10, 9, 8, 7, A gezogen sind vom Zentrum der Basis des schiefen Zylinders, welches der Scheitel ist, von dem die Linie senkrecht auf T fällt, und diese Linie ist die kürzeste von allen, die von besagtem Punkt auf den Kreis A 9 T fallen, und ist gleich dem Lot in E, und geschnitten durch besagte Zirkelöffnung; die Linie, die im Punkt 11 endet und vom selben Scheitel kommt, ist gleich dem Lot in 29 und geschnitten durch den Zirkel; ebenso alle sind Linien, die vom Scheitel gezogen sind, oder vom Zentrum der oberen Basis des schiefen Zylinders, gleich den Loten, die durch den Zirkel auf der Oberfläche des geraden Zylinders gestrichen sind. Nun sind diese Linien, die so vom Zentrum schief auf den Kreis A 9 T gezogen sind, gleich den Linien, die auf die Punkte 2, 3, 4 etc. fallen und die gezogen sind vom Zentrum der besagten oberen Basis des schiefen Zylinders, nämlich von den Punkten dieser Lote zu den Punkten F, N, O, P etc., und die Unterstützenden T 7, T 8, T 9 etc. sind gleich den Linien N 2, O 3, P 4 etc. Wir sagen also, daß die Parallelogramme, die dieselbe Höhe haben und deren Basen gleich sind, gleich sein müssen, und gleiche Räume enthalten. Um diese Gleichheit nun besser zu verstehen, müssen wir annehmen, daß der Kreis A 9 T bis zum Zentrum des Kreises F P S 17 geht, und daß sein Durchmesser AT gleich dem Radius BA des Kreises BDC ist, also ist der Halbkreis A 9 T gleich einem Viertel des Kreises BD. Nun bezieht sich der Zug des Zirkels, der in der letzten Figur F 22 E gemacht wurde, ganz auf das, was im Kreis A 9 T der anderen Figur gemacht wurde; und folglich ist der Zug des Zirkels auf dem geraden Zylinder gleich einem Viertel des Umfangs des schiefen Zylinders.

Als Schlußfolgerung. Wenn der Kreis der Fig. 4, pl. 20, F 22 E gleich dem der anderen Figur ist, nämlich BDC, und das Lot, das begrenzt wird durch den Zirkel und ausgeht vom Punkt E in die Luft (wenn der Zirkel mehr geöffnet ist als FE), gleich dem Lot von der oberen Basis des schiefen Zylinders auf die andere Basis ist, und das die wirkliche Höhe des schiefen Zylinders ist, und das man als von der oberen Basis auf die Punkte F, N, O, P etc. und auch auf C fallend angenommen hat: alle diese Lote, begrenzt durch den Zirkel auf dem geraden Zylinder, dessen Basis F 22 E ist, sind gleich den Loten vom oberen Kreis des schiefen Zylinders auf die Punkte B, 2, 3, 4, 5 etc., und die Figur, begrenzt durch den Zirkel, ist gleich der Oberfläche des schiefen Zylinders, dessen Basis der Kreis BDC ist, und die doppelte senkrechte Höhe des Lotes in E und begrenzt durch den Zirkel, nämlich des Lotes ebenso darunter wie unter dem besagten Punkt E.

[pl. XXI, Fig. 1] Die Linie CG sei der Durchmesser eines Kreises, der einem geraden Zylinder als Basis dient, dessen Oberfläche man begrenzt hat; ACB sei der Durchmesser eines Kreises, der die Basis eines angenommenen schiefen Zylinders ist; CF sei die Achse dieses schiefen Zylinders, F das Zentrum der oberen Basis, von dem man die Linie FG senkrecht auf AB zieht, FG ist die Höhe des schiefen Zylinders. Aber wenn man die besagte Achse CF senkrecht auf C errichtet, hat man ihre gleiche CL, die die Höhe ist, die man dem geraden Zylinder geben muß, der alsDurchmesser seiner Basis die Linie CG hat; und wenn man von L nach I eine Parallele zu CG zieht, und von I die Linie IFG, ist der geradeZylinder fertig, auf dem man vom Punkt C mit dem Intervall CL mit dem Zirkel die Oberfläche LF ausschneidet etc. Nun haben wir oben gesehen, daß das, was auf der Oberfläche des geraden Zylinders CLIG begrenzt ist, die Oberfläche des vorgeschlagenen schiefen Zylinders AEDB ist, wie der Durchmesser des geraden Zylinders CG, nämlich von seiner Basis zum Radius des schiefen Zylinders AC oder CB. Wenn nun der der Radius des geraden Zylinders gleich dem Radius des schiefen ist, so ist das, was vom geraden Zylinder abgeschnitten ist, gleich der Oberfläche des schiefen Zylinders. Aber da der eine nicht gleich dem anderen ist, ist es nötig, um einen Abschnitt zu finden, der gleich der Oberfläche des schiefen Zylinders ist, einen geraden Zylinder ähnlich dem ersten CLIG zu finden, wie CNMH. Um ihn zu finden, nimmt man eine mittlere Proportionale zwischen CB und CG, welche CH ist: vom Punkt H errichte ich das Lot HOM, welches die Linie CF in O schneidet und das Dreieck CHO dem Dreieck CGF ähnlich macht: diese ähnlichen Dreiecke dienen dazu, den kleinen geraden Zylinder ähnlich dem großen zu finden; denn vom kleinen Zylinder CNMH schneidet man NEO ab,etc. Und was abgeschnitten ist, ist gleich der Oberfläche des angenommenen schiefen Zylinders, denn der Abschnitt LF des geraden Zylinders CLIG ist zur Oberfläche des angenommenen schiefen Zylinders AEDB wie der Durchmesser CG zum Radius CB. Aber da der kleine Zylinder CNMH ähnlich zum großen Zylinder CLIG ist, ist der Abschnitt des einen ähnlich zu dem des anderen: die Oberflächen der Zylinder sind zueienander im doppelten Verhältnis ihrer Durchmesser; folglich ist die Oberfläche des großen Zylinders zu der des kleinen im doppelten Verhältnis von CG, Durchmesser des Kreises des großen Zylinders, zu CH, Durchmesser des Kreises des kleinen; die Oberfläche des einen ist also zu der des anderen im doppelten Verhältnis von CG zu CH, d.h. wie CG zu CB. Aber da die geraden Zylinder ähnlich sind, ist der Abschnitt des einen zu dem des anderen wie die ganze Oberfläche des einen zu der des anderen; folglich ist der Abschnitt des geraden Zylinders CLF zum Abschnitt des kleinen geraden Zylinders CNEO, wie CG zu CB; also ist der Abschnitt des kleinen Zylinders gleich der Oberfläche des schiefen Zylinders, da der eine und der andere dasselbe Verhältnis zum Abschnitt des großen Zylinders haben.

(Satz 37) Alles, was oben gesagt wurde, um auf einem geraden Zylinder einen Raum gleich der Oberfläche eines schiefen Zylinders auszuschneiden, kann man auf das folgende reduzieren.

[pl. XXII, Fig. 1] Sei die Figur 1, pl.22, gemacht, in der der Durchmesser des kleinen Kreises, nämlich AT, gleich sein soll dem Radius des großen Kreises BDC, der unteren Basis, und von F P S 17, der die obere Basis in der Luft des schiefen Zylinders repräsentiert, dessen Zentrum senkrecht auf T hinzugefügt zum Punkt C ist. Ich sage, daß man, wenn man den Zirkel öffnet so viel wie die Seite des schiefen Zylinders, und einen der Füße des Zirkels im Punkt F hinzugefügt zu A läßt, eine Linie auf dem geraden Zylinder mit der Basis A 9 T zieht, so daß der Raum, der durch die besagte Linie und die besagte Basis A 9 T eingeschlossen wird, gleich der Oberfläche des schiefen Zylinders ist.

Seien die Basen des schiefen und des geraden Zylinders in unendlich viele gleiche Teile geteilt, nämlich, wenn man ebensoviele Teilungen auf dem Viertel des Kreises BLD wie auf dem Halbkreis A 9 T macht, und dies ebenso in dem oberen wie in dem unteren Zylinder; und wenn man Linien durch die Punkte der Teilungen zieht, macht man mehrere Parallelogramme, die man zum schiefen Zylinder nimmt von einer Basis zur anderen; aber zum geraden Zylinder nimmt man sie dann von der unteren Basis bis zu dem durch den Zirkel gemachten Schnitt. Nun sind die Parallelogramme in beiden Zylindern an Menge gleich, und wie man zeigen wird, ebenfalls an Größe, wie folgt.

Da die Parallelogramme dieselbe gleiche Basis haben, da sie einen gleichen Teil oder Größe im Umfang der Basis jedes Zylinders einnehmen, bleibt zu zeigen, daß ihre Höhe gleich ist. Diese Höhe ist im geraden Zylinder leicht zu kennen, da die gleiche Seite des Zylinders, geschnitten durch den Zirkel, das schließen läßt: aber im schiefen Zylinder ist diese Höhe die von der oberen Basis gezogene Linie, dargestellt durch die Punkte N, O, P etc. senkrecht auf die Tangente im korrespondierenden Punkt der unteren Basis; also ist die Linie, gezogen von N 2 in die Luft auf die Berührungslinie G 2 (die vom Punkt G der unteren Basis ausgeht, der dem Punkt N der oberen Basis entspricht), in der Weise, daß sie im Punkt 2 einen rechten Winkel bildet, die Höhe des Parallelogramms, gezogen von G zum Punkt N der oberen Basis in die Luft. Und ebenso ist die Höhe des Parallelogramms, gezogen vom Punkt H zum Punkt oberhalb von O in der oberen Basis, die Linie, die vom gleichen Punkt O zum Punkt 3 auf der Beührungslinie H 3 gezogen ist, wo sie zusammen einen rechten Winkel bilden; daher sind die Höhen aller Parallelogramme die Linien, gezogen von den Punkten der oberen Basis senkrecht auf die Tangenten, die von den korrespondierenden Punkten in der unteren Basis ausgehen; daher ist das kleinste aller Parallelogramme das, was vom Punkt D der unteren Basis zum zu S korrespondierenden Punkt in der oberen gezogen ist; denn es hat als Höhe nur die Höhe des schiefen Zylinders, nämlich die Linien, die von den Punkten C, F, N, O etc. zur oberen Basis gezogen sind. Wie das größte der Parallelogramme das von B nach F ist; denn seine Höhe ist die gesamte Seite des geraden Zylinders: es bleibt zu zeigen, daß diese beiden Lote in beiden Zylindern gleich sind.

Zuerst ist es sicher, daß die Öffnung des Zirkels, der den Abschnitt auf dem geraden Zylinder macht, da er der Seite des schiefen Zylinders gleich ist, dem Lot in A im geraden Zylinder, begrenzt durch den Zug des Zirkels, gleich der ist, die vom Punkt B zum korrespondierenden Punkt der oberen Basis des schiefen Zylinders geht, die auch die Seite des schiefen Zylinders ist. Und gleicherweise ist das Lot auf T im geraden Zylinder gleich der Höhe des schiefen Zylinders und der Linie, die senkrecht vom Punkt S auf die untere Basis gezogen ist; denn die Achse des schiefen Zylinders, die vom Zentrum A der unteren Basis zu dem der oberen geht, das über T liegt, ist gleich der Seite des schiefen Zylinders, und folglich der Öffnung des Zirkels: aber besagter Punkt T in der Luft, Zentrum der oberen Basis, ist der Punkt des geraden Zylinders, ausgeschnitten durch den Zirkel; folglich ist besagtes Lot auf T im geraden Zylinder gleich der Höhe des schiefen Zylinders und gleich dem Lot auf S.

Man wird es noch einmal anders zeigen, indem man sich ein rechtwinkliges Dreieck vorstellt, dessen eine Seite DS sei; die zweite die Senkrechte von S auf die obere Basis; und die dritte die, die von D zum selben Punkt S in der Luft geht; denn dieses Dreieck ist ganz gleich dem, das sich im geraden Zylinder bildet, dessen eine Seite AT ist, die andere das Lot in T bis zum Ausschnitt; und die dritte die Öffnung des Zirkels, die von A nach T in die Luft geht und gleich der Seite des schiefen Zylinders ist, nämlich der Linie von D zum Punkt S in der Luft: die Linie AT ist gleich DS, wie leicht zu zeigen, die Winkel in T und S sind rechte; und folglich sind die Dreiecke gleich, und die Linie auf T gleich der Linie auf S.

Man wird wie oben die Gleichheit der anderen Lote zeigen, nämlich das auf 7 im geraden Zylinder gleich dem auf 2 im schiefen; das auf 8 gleich dem auf 3 etc. und wir wiederholen es hier noch einmal. Die Öffnung des Zirkels ist in Potenz gleich den Quadraten von AT und vom Lot in T des geraden Zylinders, und ebenso ist sie gleich den Quadraten von A 7 und vom Lot in 7; und wenn man anstelle des Quadrates AT die Quadrate von A 7 und 7 T, die ihnen gleich sind, nimmt, hat man die Quadrate von 7 T, 7 A, und vom Lot in T gleich den Quadraten von 7 A und vom Lot in 7; und wenn man von beiden Seiten das Quadrat 7 A weglä߸t, hat man das Quadrat des Lotes in 7 gleich den Quadraten von 7 T und vom Lot auf T.

Außerdem hat man gezeigt, daß 2 N gleich 7 T durch das Mittel des Rechtecks 7 A G 2. Man muß sich also für das Lot auf 2 vorstellen ein rechtwinkliges Dreieck in die Luft im Punkt N, dessen eine Seite N 2 ist; die zweite das Lot vom Punkt N auf den korrespondierenden Punkt in der oberen Basis des schiefen Zylinders, und die dritte ist das gesuchte Lot von N in die Luft nach 2, und da diese dritte Seite dem rechten Winkel in N gegenüberliegt, ist sie in Potenz soviel wie die Quadrate des Lotes auf N (gleich dem des Lotes in T) und der Linie N 2 gleich 7 T; also ist das Lot auf 7 gleich der Linie von N auf 2. Aber diese Linien bezeichnen die Höhe der Parallelogramme, die auf den Zylindern gemacht sind; und folglich, da die besagten Parallelogramme gleiche Basen und Höhe haben, sind sie gleich; folglich ist die Obrfläche des schiefen Zylinders gleich der, die aus dem geraden Zylinder ausgeschnitten ist. Aber wenn das Lot, gezogen vom Zentrum der oberen Basis, nicht auf den Umfang der unteren Basis fällt, so daß AT nicht gleich dem Radius der besagten Basis ist, dann muß man es anpassen, wie wir gezeigt haben in der Diskussion über die Figur 1 in pl. 21.

<u>Über den Körper der Roulette [pl. XXI, Fig 2]</u>

(Satz 38) AIB sei der Weg der Roulette; ALMB das Parallelogramm, gemacht durch den Durchmesser IC und durch den Umfang AB, in eine gerade Linie ausgebreitet. Wir suchen das Verhältnis, das es von dem durch das Parallelogramm gebildeten Zylinder zu dem durch die Roulette AIB gemachten Körper gibt, wenn alles um den Umfang ACB rotiert. Zu diesem Zweck ziehe ich eine Linie GDH parallel zu ACB; und diese Linie nimmt sich als Weg des Punktes D, Zentrum der Roulette. Aber diese Linie GDH schneidet die Figur A O I 4 und den Halbkreis CEI, jeden in zwei ähnliche Teile: nun gibt es ein Theorem, das besagt, daß, wenn zwei Figuren so durch eine Linie parallel zur Rotationsachse der beiden Figuren geschnitten werden, die Körper der beiden Figuren zueinander wie die Figuren sind; folglich ist der Körper, gemacht durch A O I 4, gleich dem durch den Halbumfang IEC gemachten; denn wir haben gesehen, wie die Fläche A O I 4 gleich dem Halbkreis IEC ist, den wir als ein Viertel des Parallelogramms gefunden haben; daher sind diese Körper jeder ein Viertel des Zylinders, gemacht durch das Parallelogramm. Aber wenn man nur den einzigen Körper nimmt, der durch A O I 4 gemacht ist, der ein Viertel des Zylinders ist, und wenn man die Linie QRS gezogen hat, die alle Linien, die senkrecht zu AN gezogen sind, dem ersten Viertel des Umfangs ACB, auf GDH repräsentiert, und die Linie VXY , die alle Linien repräsentiert, die vom zweiten Viertel NC auf die gebogene Linie OYI gezogen sind: wir sagen, daß das Quadrat von QR gleich den Quadraten von QS und SR minus zweimal dem Rechteck QSR ist, und genauso die anderen Linien, die auf dem Viertel AN gezogen sind; außerdem, daß das Quadrat von VY gleich den Quadraten von VX und XY plus zweimal dem Rechteck VXY ist; ebenso mit den anderen Linien im zweiten Viertel NC. Nun sind die Rechtecke, die sich im Raum AO finden, gleich denen des Raumes NI; und da sie zu einer Seite hinzugefügt und von der anderen abgezogen werden, läßt man sie auf beiden Seiten weg. Es bleibt also, daß die Quadrate von QR, VY und den anderen Linien von AC auf die Kurve AROYI zusammengenommen gleich den Quadraten des Radius QS oder VX gleichoft genommen sind und gleich den Quadraten von SR, XY und den anderen Linien von GD auf die Kurve AOI ebensooft. Nun sind die Linien SR, XY etc. Sinus rectus, deren Quadrate zum Quadrat des Durchmessers gleichoft so sind wie 1 zu 8, und die Quadrate des Radius sind zu den Quadraten des Durchmessers wie 2 zu 8. Wenn man diese Verhältnisse zusammenfügt, hat man 3 zu 8, welches das der Quadrate der Linien, gezogen von AC auf die Kurve AOI zum Quadrat des Durchmessers gleichoft ist; und wenn man dort das Verhältnis der Figur AOI4 zum Parallelogramm AI hinzufügt, welches wie 2 zu 8 ist, hat man das Verhältnis von 5 zu 8, das das des Körpers, den die Roulette bildet, zum Zylinder AM ist, wenn das ganze um ACB rotiert.

Man schließt dasselbe, wenn man die Quadrate der Sinus versus QR, VY etc. betrachtet, welche zum Quadrat des Durchmessers gleichoft so sind wie 3 zu 8; und der Raum A R I 4 ist zum Parallelogramm AI wie 2 zu 8; was zusammen mit dem Verhältnis 3 zu 8 das Verhältnis 5 zu 8 ergibt; und dies ist das Verhältnis des Körpers der Roulette zum Zylinder, wie in der anderen Schlußfolgerung.

(Satz 39) Nun muß man sehen, welches Verhältnis sich zwischen dem Körper derselben Roulette und ihrem Zylinder ergibt, wenn sie um LM parallel zu AB rotiert, wo man betrachten muß, daß das Quadrat von N 8 soviel wie die Quadrate von NP und P 8 minus zweimal dem Rechteck N P 8 ist; und ist ebenso das Quadrat N 8 plus zweimal das Rechteck N P 8 gleich den Quadraten NP, P 8. Man weiß, daß die Quadrate von N8, VK und alle anderen zum Quadrat des Durchmessers CI oder seinem gleichen NP gleichoft so sind, wie 5 zu 8, wozu man zweimal das Rechteck N P 8 hinzufügen muß, VZK und alle anderen: nun haben diese Rechtecke alle die Höhe NP, folglich sind sie zueinander wie die Linien P8, ZK, 9 10 und die anderen. Aber der ganze Raum, der von diesen Linien ausgefüllt wird, oder vielmehr alle Linien sind zum gleichoft genommenen Durchmesser, wie 2 zu 8: und man muß zweimal diese Rechtecke nehmen; folglich sind sie zum Quadrat des Durchmessers gleichoft genommen, wie es Linien VK, N 8, Q 10 etc. gibt, wie 4 zu 8; welches Verhältnis hinzugefügt zu dem von 5 zu 8 oben das von 9 zu 8 ergibt, oder 9/8; und weil diese Quadrate Q 9, NP, VZ etc. die 8 repräsentieren, folgt, daß die Quadrate 9 10, P 8, ZK etc. 1/8 sind; da die Quadrate Q 10, N 8, VK etc. mit zweimal den Rechtecken Q 9 10, N P 8, VZK etc. (die alle zusammen mit besagten Quadraten 9/8 wert sind) gleich den Quadraten Q 9, 9 10, NP, P 8, VZ, ZK, etc. sind, die auch 9/8 wert sind. Wenn man nun die Quadrate Q 9, NP, VZ, die 8/9 wert sind, wegläßt, bleibt 1/8 für die Quadrate 9 10, P 8, ZK, und wenn man sie nochmal von denselben Quadrate Q 9, NP, VZ abzieht, bleiben 7/8 für den Körper der Roulette, der zum Zylinder wie 7 zu 8 ist.

Dasselbe kann ich auf andere Weise schließen, indem ich sage, daß das Quadrat P 8 gleich den zwei Quadraten PN, N 8 minus zweimal dem Rechteck P N 8 ist, und alle andern ebenso, nämlich das Quadrat ZK gleich den Quadraten ZV und KV minus zweimal Rechteck ZVK etc. Man hat gesehen, daß die Quadrate von N 8 und den anderen zum Quadrat des Durchmessers gleichoft genommen so sind wie 5 zu 8; und zusammenfügend das Quadrat von NP, das 8 ist, mit 5, hat man das Verhältnis 13 zu 8. Von dieser Summe muß man das Minus weglassen, nämlich die Rechtecke P N 8 etc., die alle dieselbe Höhe haben, nämlich PN; sie sind also zueinander wie ihre Basen VK, N 8, QC etc. Der Raum A 8 I D C, ausgefüllt von den kleinen Linien VK, N 8 etc., ist zum großen Parallelogramm AI wie 6 zu 8; und das Rechteck zweimal genommen ist zum gleichen Parallelogramm wie 12 zu 8; das Verhältnis 12 zu 8 von 13 zu 8 abziehend, bleibt 1 zu 8, wie oben für den Wert der Quadrate ZK, P 8, 9 10 etc.

(Satz 40) (1.) Nun muß man die Körper betrachten, die sich bilden, wenn die Figur um LA rotiert, wo man bemerkt, daß die Linie IC parallel zu LA das Parallelogramm AM und die Figur AIB in zwei gleiche Teile schneidet; folglich sind die Körper zueinander wie die Flächen; also ist der durch AIB gemachte Körper zu dem durch das Parallelogramm AM gebildeten Zylinder wie die Fläche des einen zu der des anderen. Aber die Flächen sind wie 4 zu 3; folglich ist der Zylinder zum Körper der Roulette wie 4 zu 3:

(2.) Betrachten wir jetzt den durch die Fläche der Begleiterin der Roulette gebildeten Körper AOITB. Man sieht, daß die Linie IC ebenso das Parallelogramm AM wie die besagte Figur AOITB in zwei gleiche Teile schneidet; folglich sind die Körper wie ihre Flächen: aber diese sind wie 2 zu 1; also ist der Zylinder zu dem von AOITB gemachten Körper wie 2 zu 1, d.h.doppelt.

(3.) Man schließt hieraus, daß der durch AOI10 gemachte Körper zum Zylinder AI wie 1 zu 4 ist; denn weil der durch A 8 I D C gemachte Körper zum Zylinder AI wie 3 zu 4 ist: wenn man den durch AOIDC gemachten Körper abzieht, der zum selben Zylinder wie 2 zu 4 ist, bleibt das Verhältnis 1 zu 4 für das des Körpers, gemacht durch AOI 10, zum selben Zylinder.

Proportion von Körpern, die aus gekrümmten Linien zusammengesetzt sind, mit dem Zylinder, der dieselbe Basis und Höhe hat, zusammen mit ihrem Schwerpunkt [pl. XXII, Fig. 2]

(Satz 41) (1.) AGEC sei eine beliebige unregelmäßige Linie, aber so versehen, daß sie immer nach C sinkt; und es seien die Linien AB, BC gezogen, die einen Winkel B einschließen sollen, der hier als rechter angenommen [vorausgesetzt] wird, denn dies ist nicht nötig, und man hat die Dreilinie ABC. Diese Linien AB, BC seien in unendlich viele gleiche Teile geteilt, und jeder Teil von AB sei gleich jedem Teil von BC: von jedem Punkt der Teilung seien Parallelen zu AB, BC gezogen, die die Dreilinie teilen, wie man sieht. Von C errichte ich ein Lot zur Fläche ABC, gleich mit BC; dann entwerfe ich eine Fläche auf der Linie AB, so geneigt, daß sie das Ende des Lotes in C trifft. Dann errichte ich von jedem Punkt der Linie BC ein Lot, das diese Fläche schief trifft, und jedes dieser Lote ist gleich seiner Korrespondierenden, nämlich der, die von dem Punkt ausgeht, von dem aus sie bis zur Linie AB gezogen ist: wie das Lot, gezogen auf D, gleich BD ist, das in F errichtete gleich BF etc. Man muß auch ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck ersinnen, das sich aus der Linie BC bildet, aus dem Lot in C, welches gleich BC ist, und der Linie, die von B zum Ende dieses Lotes geht: die Fläche dieses Dreiecks ist gleich der Hälfte des Quadrates BC; dasselbe muß gehört werden von allen Dreiecken, die sich durch das Mittel der geneigten Fläche bilden, die alle gleich der Hälfte des Quadrats ihrer gleichen Seiten sind.

Man muß danach betrachten ein Lot, errichtet in A auf die Linie AGEC, das die geneigte Fläche trifft: diese Linie beschreibt durch ihren Weg eine Oberfläche, daher hat man vier Oberflächen, die einen Körper einschließen, die erste ist die Fläche der Dreilinie ACB; die zweite die geneigte Fläche, die in AB beginnt, die dritte ist das Dreieck auf BC in die Luft und senkrecht auf der Fläche ABC; die vierte ist die, welche des Lot bildet, während es die Linie AGEC durchläuft. Dieser Körper ist unterschieden und wie zusammengesetzt aus einer unendlichen Anzahl von Dreiecken, alle ähnlich und parallel zu dem, das senkrecht auf BC errichte wurde, und das eine der Seitenflächen des Körpers ist; folglich ist der auf diese Weise abgeteilte Körper gebildet aus der Hälfte aller Quadrate der Linie BC und seiner Parallelen.

Wenn man diesen Körper in einem anderen Sinn schneiden will, nämlich durch Ebenen parallel zur Linie AB, dann macht man im Körper Parallelogramme gleich den Parallelogrammen BDN, BFO, BLP etc. Folglich sind alle diese Parallelogramme zusammen gleich den Halbquadraten der Linie BC und seiner Parallelen; denn es ist derselbe Körper, der sich gar nicht verändert. Man kann nun einrichten, daß alle Halbquadrate von BC und ihren Parallelen gleich allen Parallelogrammen NDB, OFB, PLB etc. sind.

(2.) Sei eine Parallele zu AB gezogen, in einem beliebigen Teil: sei diese HI, nämlich außerhalb der Figur, und sei das Parallelogramm HICK fertiggestellt, und sei eine Fläche auf der Linie HI errichtet, geneigt in der Weise, daß sie wie die vorangehende das Ende des Lotes von C in der Luft trifft, genommen mit der Länge IC, außerdem seien die Linien IC der Figur bis nach HI verlängert: man findet, daß die Halbquadrate der Linie IC und der anderen Parallelen zu dieser Linie, die in HI enden, gleich allen Parallelogrammen sind, die in der Figur ABC eingeschlossensind, wenn man sie bis HI verlängert, und im Raum HIBA, nämlich ABI, NDI, OFI etc.

Wir betrachten jetzt die Figur, wenn sie um HI rotiert. Sie bildet also drei Körper, nämlich einen Zylinder durch HIBA, einen Körper, der sich Höhle nennt durch die Figur ACB; einen anderen durch HACBI, und den großen Zylinder HICK. Wir suchen die Verhältnisse dieser Körper. Für den kleinen Zylinder, so ist er zum großen Zylinder wie das Quadrat von HA zum Quadrat HK; der aus HIBCA gemachte Körper ist zum großen Zylinder wie das Quadrat von IC und der anderen Parallelen bis zu HA zum Quadrat von HK gleichoft; der Körper der Figur ABC ist zum großen Zylinder wie das Quadrat IC und der anderen Parallelen minus gleich oft dem Quadrat IB, zum Quadrat HK gleichoft: und wenn man die Hälfte des Körpers nimmt, ist sie zum großen Zylinder wie die Hälfte der Quadrate IC und der anderen minus die Hälfte des Quadrats IB gleichoft, zum Quadrat HK, gleichoft genommen. Anstelle der Halbquadrate nehme ich, was ihnen gleich ist, nämlich alle Parallelogramme minus die kleinen der Figur HABI, und sie sind zum großen Quadrat HK, gleichoft genommen, wie die Hälfte des Körpers der Figur zum großen Zylinder. Wenn man die Figur ABC um AB dreht, so ist die Hälfte des Körpers von ABC zum Zylinder von ABCK wie die Hälfte der Quadrate von BC und ihrer Parallelen zum Quadrat von BL gleichoft; und allgemein hat man auf jeder Linie, um die man die Figur dreht, und die parallel zu AB ist, immer dieselbe Gleichung; nämlich, daß die Hälfte des Körpers, der Figur zu ihrem Zylinder so ist wie die Hälfte der in der Figur eingeschlossenen Quadrate zum großen Quadrat gleichoft. Ich meine, daß die Figur an der Linie beginnt, auf der sie rotiert, und daß das Parallelogramm auf derselben Linie beginnt.

(Satz 42) Nachdem ich dieses alles gesetzt habe, suche ich den Schwerpunkt der Fläche der Figur ABC. Zu diesem Zweck nehme ich an, daß die Linie BC ein Hebel ist, von dem der Punkt B der Stützpunkt ist und in C die Kraft: alle diese Punkte sind Orte, auf denen Gewichte lasten; man nennt diese Punkte Schwerpunkte jedes Teils der Figur, die sich in Parallelogramme teilt, die alle ihren Schwerpunkt haben, nämlich den Punkt, auf dem jedes von ihnen lastet; und alle diese Schwerpunkte zusammen werden (wenn man das Gewicht, das sie unterstützen, berücksichtigt) gleich dem Gesamtschwerpunkt der Figur sein. Nun sagen wir, daß der erste Punkt, nämlich D, der Schwerpunkt des ersten Parallelogramms ist; F des zweiten Parallelogramms, L des dritten etc. Die Schwerpunkte sind zueinander in der zusammengesetzten Beziehung der Seiten ihrer Figuren; z.B. ist der Schwerpunkt D zum Schwerpunkt F in dem zusammengesetzten Verhältnis von ND zu FO und dem von BD zu BF; was sagen will, wie das Rechteck oder Parallelogramm der vorangehenden zu dem der folgenden, nämlich wie das Parallelogramm NDB zum Parallelogramm OFB: also sind alle Gewichte in allen Punkten oder Schwerpunkten zueinander wie alle Parallelogramme zueinander. Anstelle der Parallelogramme nehme ich ihre Höhen, nämlich die Linien AB, ND, OF, und ich setze jede dieser Linien für die ausgebreitete Last, die an jedem der Punkte angreift. Um den Schwerpunkt der Figur zu finden, nämlich den Punkt auf BC, wo die Teile im Gleichgewicht sind, nehme ich durch die Analyse an, daß er in M ist, und ich setze auf diesen Punkt M ein Gewicht gleich allen andern obigen, repräsentiert durch alle Linien, die auf den

Punkten sind. Dieses Gewicht ist also eine Linie gleich allen obigen Linien, und ich sage daher, alle Gewichte oder Schwerpunkte zusammen sind zum Gewicht der ganzen Figur, wie alle Parallelogramme der Figur zum großen Parallelogramm, das eine Seite gleich allen obigen Linien hat, und die Linie BM als andere Seite (denn man nimmt hier Parallelogramme, die senkrecht auf den Linien ND, OF, PL etc. sind und daher den Punkt auf C in der Luft in der Höhe von CB treffen, wie oben gesagt). Aber alle Gewichte zusammen sind gleich dem Gewicht in M; folglich sind alle Parallelogramme der Figur gleich dem Parallelogramm mit allen Linien BA, DN, FO etc. als einer Seite und BM als der andern: da sie gleich sind, haben sie dasselbe Verhältnis zu einer anderen Größe; daher sind alle Rechtecke zum großen Quadrat BC gleichoft, wie das große Rechteck mit allen Linien AB, ND, OF etc. als einer Seite und BM als der anderen zum selben Quadrat, genommen wie oben.

Anstelle aller obigen Rechtecke nehme ich, was ihnen gleich ist, nämlich die Halbquadrate der Linien BD, BF, BL, BM, BC etc. Sie sind nun zum großen Quadrat BC gleichoft so wie das große obige Rechteck mit einer Seite BM; und der anderen aus allen Linien AB, ND, OF etc. zum besagten Quadrat BC ist, genommen etc. Aber wir haben gesehen, daß, wie der Zylinder aus ABCK zur Hälfte des durch die Rotation um AB gemachten Körpers auch das Quadrat von BC, gleichoft, zum Halbquadrat der Linien BD, BF, BL etc. ist. Also ist das Rechteck, das die Linien AB, ND, OF etc. als eine und BM als andere Seite hat, zum Quadrat BC gleichoft, wie die Hälfte des durch ABC gemachten Körpers zum Zylinder. Durch die Indivisibeln mache ich Körper aus allen diesen Flächen, und ich sage, daß die Hälfte des Körpers, gemacht durch ABC, zum durch ABCK gemachten Zylinder so ist, wie der Körper mit der Figur ABC als Basis und der Höhe BM zum Körper mit dem Parallelogramm ABCK als Basis und der Höhe BC. Nun sind diese Körper zueinander im zusammengesetzten Verhältnis ihrer Basen und Höhen; folglich sind die Hälfte des Körpers von ABC und der Zylinder des Parallelogramms ABCK das zusammensetzende Verhältnis der beiden Körper, die zueinander im zusammengesetzten Verhältnis aus der Figur ABC zum Parallelogramm ABCK mit dem der Linie BM zu BC sind. Wir kennen dieses zusammensetzende Verhältnis, d.h. von der Hälfte des Körpers zum Zylinder; denn (Anwendung) (wenn es eine Parabel ist) ihr Körper ist zu ihrem Zylinder wie 8 zu 15: hier haben wir nur die Hälfte des Körpers, also ergibt sich 4 zu 15. Ebenso ist das Verhältnis der Fläche der Parabel zu ihrem Parallelogramm bekannt, welches 2 zu 3 ist; wenn wir nun von 4 zu 15 das Verhältnis 2 zu 3 oder 4 zu 6 weglassen, bleibt 6 zu 15; und dies ist das Verhältnis von BM zu BC, und der Punkt M ist das Zentrum.

(2. Methode) Wenn wir uns einen Zylinder so vorstellen, daß er die Hälfte eines Körpers sei, und wenn wir sagen: wie der Zylinder zur Hälfte des Körpers ist, so ist jede Linie, wie z. B. eT, zur Linie BM; und wie das Parallelogramm ABCK zur Fläche ABC ist, so ist dieselbe Linie eT zur Linie BC: diese drei Linien setzen das Verhältnis zusammen, das zwischen der Hälfte des Körpers und dem Zylinder ist, welches das zusammengesetzte Verhältnis von eT zu BC und BC zu BM ist, daher ist der Punkt M der Schwerpunkt.

Bevor man nach dieser Weise verfährt, muß man diese Linie eT gefunden haben, indem man, wie die Fläche ABC zum Parallelogramm ABCK, so die Linie BC zu eT sein läßt; dann sagt man: Wie der Zylinder, gemacht aus ABCK, zur Hälfte des Körpers, gemacht aus ABC rotierend um AB, so sei die Linie eT zu BM: der Punkt M bezeichnet den Schwerpunkt. Diese Methode ist eleganter zu behandeln, und kürzer als die erste, die sicherer ist, nämlich durch die Zusammensetzung des Verhältnisses der beiden Körper, die zueinander im zusammengesetzten Verhältnis ihrer Basis und ihrer Höhen stehen, wie oben gesagt.

(Anwendung) [pl. XXII, Fig. 3] Man muß nun den Schwerpunkt eines Viertels des Kreises suchen durch den Körper, der sich macht, wenn ein Viertel des Kreises, der von A nach C geht, dann vom Punkt C das andere Viertel des Kreises die Linie AB trifft, verlängert soviel wie nötig. Wenn dieses Viertel des Kreises um AB rotiert, bildet sich ein Körper aus diesem Viertel, und es bildet sich ein Zylinder aus dem Parallelogramm ABCK, welches in dieser Figur ein Quadrat ist; denn AB ist gleich BC, und jede ist der Radius des Kreises. (1. Methode) Ich finde zuerst den Schwerpunkt des Kreises, nämlich M, in der üblichen Weise, nämlich, daß der Halbkörper des Kreisviertels zu seinem Zylinder so ist wie der Körper mit dem Viertelkreis als Basis und der Linie BM als Höhe zu dem Körper, der zusammengesetzt ist aus dem Quadrat BC ebensooft, wie es Teilungen in BC gibt. Aber die Körper stehen im zusammengesetzten Verhältnis ihrer Höhen und ihrer Bases, nämlich wie der Viertelkreis zum Quadrat BC und wie die Linie BM zu BC; in der Art, daß diese vier Terme das Verhältnis der Hälfte des Körpers aus dem Viertelkreis zu ihrem Zylinder zusammensetzen, welches bekannt ist; denn der Zylinder ist zum Körper wie 6 zu 4; aber hier haben wir nur die Hälfte, folglich ist das Verhältnis wie 6 zu 2. Das Verhältnis von Fläche zu Fläche und von Linie zu Linie ist also wie 2 zu 6, das Verhältnis von Fläche zu Fläche ist bekannt; denn in dieser Figur ist sie nach Archimedes wie 11 zu 14. Wenn ich nun das Verhältnis 11 zu 14 von 2 zu 6 oder 11 zu 33 subtrahiere, bleibt 14 zu 33 für das Verhältnis der Linien BM zu BC; und der Punkt M wird der Ort des Schwerpunktes sein, in der ersten Art.

(2. Methode) Die zweite Art ist, indem man sagt, wie der Zylinder von ABCK zur Hälfte des Viertelkreises ist, so ist die Linie eT zu BM; (man findet die Linie eT wie oben; nämlich indem man, wie die Fläche des Viertelkreises zum Parallelogramm ist, so die Linie BC zu eT seiend macht); daher sehen wir, daß die Hälfte des Körpers zum Zylinder in der zusammengesetzten Relation von eT und BC ist, und von BC zu BM; daher ist der Punkt M wieder der Schwerpunkt, nach der zweiten Methode.

(3. Methode) Die dritte Methode ist die subtilste, und sie geht so. wie das Viertel und die Hälfte des Umfangs, nämlich AC und seine Hälfte, das ganze als gerade Linie genommen, zum Radius BC ist, so ist BC zum Drittel von eT, gefunden wie oben; und es findet sich, daß BM ein Drittel von eT ist; daher ist M der Schwerpunkt: Man muß zeigen, daß BM das Drittel von eT ist; außerdem, daß ein Viertel und die Hälfte des Umfangs zu seinem Radius so ist, wie derselbe Radius zu BM, dem Drittel von eT.

Das erste ist leicht zu sehen; denn wenn man macht, daß, wie die Hälfte des Körpers zum Zylinder oder vielmehr wie der durch ABCK gemachte Zylinder zur Hälfte des durch den Viertelkreis gemachten Körpers, daß so die Linie eT zu BM ist. Wir wissen, daß der Zylinder das Dreifache der Hälfte des Körpers ist; folglich ist eT das Dreifache von BM; was zu beweisen war.

Man muß nun zeigen, daß die drei Linien, nämlich das Viertel und die Hälfte des Umfangs als gerade Linie, der Radius und das Drittel von eT proportional sind. Dies zeigt sich durch die verdüsterte Proportion, die ich wie folgt auseinandersetze. Sei das Viertel und die Hälfte des Umfangs a; das halbe Viertel desselben Umfangs sei b; der Radius sei c; derselbe Radius sie auch d; die Linie eT sei e, und das Drittel von eT oder die Linie BM sei m. Man macht die folgenden Proportionen.

Wie a zu b ist, so ist e zu m; und wie b zu c ist, so ist d zu e, folglich wie a zu d ist, so ist d zu m; folglich sind die drei Linien a, c, m proportional, was zu zeigen blieb.

Alles bisher gesagte dient nur dazu, den Schwerpunkt von Flächen mit Hilfe von Körpern zu finden. Jetzt suchen wir den Schwerpunkt einer Linie so wie sie sein mag [einer beliebigen Linie], sei sie gerade, kreisförmig oder unregelmäßig.

<u>Den Schwerpumkt der Linie AGEC finden [pl. XXIII, Fig. 1, 2]</u>

(Satz 43) Die Linie AGEC sei in unendlich viele gleiche Teile geteilt; und wenn man die Linie AB, BC wie oben auch gezogen hat, seien ebenfalls Parallelen zu AB von jedem Punkt der Teilung gezogen, die die Linie BC in ungleiche Teile teilen. Die Teile der Linie AGC haben jeder ihr Gewicht; und das Gewicht eines Teils ist nicht gleich dem Gewicht eines anderen. Nun ist das Gewicht jedes Teils repräsentiert durch den Punkt der Teilung: die Parallelen tragen jedes Gewicht auf dem Hebel BC zu den Punkten der Teilung; und auf diesen Punkten von BC lasten alle Teile der Linie AGC. Wir wissen, daß die Gewichte zueinander wie die Rechtecke sind; d.h. daß das Gewicht vom Punkt D zum Gewicht des Punktes H so ist, wie das Rechteck, gemacht aus AD und BF zum Rechteck, gemacht aus AD oder ihrer gleichen DH und aus BI. Statt zu sagen, wie die Rechtecke, sage ich, wie die Linie BF zu BI, weil alle Rechtecke eine Seite gleich haben, nämlich den Teil der Linie AGC. Ich stelle mir vor, das Zentrum sei in M, von welchem Punkt aus ich eine Linie gleich zu AGC hängen lasse, die das Gewicht darstellt; dann sage ich, daß das Gewicht des Punktes F zum Gewicht des Zentralpunkte M ist, wie die Linie BF zur Linie BM; das Gewicht des Punktes I ist zum Gewicht des Punktes M wie die Linie BI zu BM etc. Hiervon kehren wir zu den Rechtecken zurück, und wir sagen, daß alle Punkte, die auf denen der Linie BC lasten, zum universellen Gewicht, das auf dem Punkt M, dem Gesamtzentrum, liegt, so sind, wie das Rechteck, gemacht aus einem einzigen Teil der Linie AGC und allen Linien BF, BI, BL, BM etc. zum Rechteck, gemacht aus der Linie AGC, angehängt im Punkt M, und durch die Linie BM. Nun sind alle diese kleinen Gewichte eingesammelt zusammen gleich dem Gewicht in M, welches das Gewicht der ganzen Linie ist; folglich sind die beiden Rechtecke gleich, und ihre Seiten sind vier proportionale Linien. Um die Lösung der Frage des durch einen Teil der Linie AGC und die Linien BF, BI, BC etc. gemachten Rechtecks zu erleichtern, lasse ich durch die Indivisibeln den Teil der Linie AGC weg, da dieser Teil einzig und begrenzt ist, verkleinert er nichts im Unendlichen; (denn alles, was endlich und begrenzt ist, wie 1, 2, 3, 4 und ebensoviele begrenzte Zahlen, wie man will, vergrößert sich nicht noch verkleinert sich ins Unendliche) wenn man also diesen einzigen Teil der Linie weggenommen hat, bleibt mir der durch die Linien BF, BI, BL etc. eingeschlossene Raum, der gleich demselben Rechteck von AGC mal BM ist. Ich setze, daß die Linie AGC die gerade TN sei, welche unendlich oft geteilt ist, und ich errichte auf jedem Punkt der Teilung senkrecht die Linie RS gleich BF, QX gleich BI etc. Die so errichteten Linien bilden eine Figur gleich dem Rechteck TP, dessen Seite NP gleich BM ist, und TN gleich AGC, dann suche ich ein Quadrat, das gleich der Figur oder dem Rechteck ist, (denn beides ist gleich). Seine Seite sei die markierte Linie V. Wir sagen, daß, wie die Linie AGC zur Linie V ist, so die Linie V zur gesamten Linie BM; und dies ist die universelle Aussage. Wie die vorgeschlagene Linie zur Linie ist, deren Quadrat gleich der Figur oder Fläche ist, gemacht aus allen Linien BF, BI, BL etc., so ist dieselbe Linie, welche die Seite des besagten Quadrates ist, zur gesuchten Linie BM; und so sind diese drei Linien, nämlich die gegebene, die, welche die Seite des besagten Quadrates ist, und die gesuchte BM anhaltend proportional.

(Satz 44) Wir suchen jetzt den Schwerpunkt des Viertels des Umfangs AEZ [AEZ ist der Viertelumfang]. Nun muß man sagen: wie die Linie AEZ ausgebreitet in eine gerade LInie, zu ihrem Radius BZ, so ist dieser Radius zur gesuchten Linie BM. Aber der Viertelumfang ist zum Radius, wie alle Sinus, gezogen von den Punkten, in denen der Umfang geteilt ist, zum Gesamtsinus, gleichoft genommen; aber alle diese Sinus sind die Linien BF, BI, BL etc, die den Punkten des Umfangs antworten, der in unendlich viele gleiche Teile geteilt ist; und alle diese Sinus sind gleich den Quadraten des Radius, wie es in der dritten Proposition sichtbar wurde.

(Satz 45) [pl. XXIII, Fig. 3] Aber wenn man annimmt, daß die Linie AC gerade sei, um dort den Schwerpunkt zu finden, teile ich sie in unendlich viele gleiche Teile, und von jedem Punkt der Teilung ziehe ich Linien parallel zu AB, die auf den Hebel BC fallen und ihn in einander gleiche Teile teilen, und die Figur ABC in ähnliche Dreiecke teilen: die Punkte der Linie BC bezeichnen die Schwerpunkte jedes Teils der vorgeschlagenen Linie AC. Nun sind alle Schwerpunkte oder Gewichte zueinander wie die Rechtecke untereinander, d.h.wie das Rechteck BF mal AD zum Rechteck BI mal DH oder ihre gleiche AD; und weil der Teil von AC in allen Rechtecken immer derselbe ist, sind die Zentren untereinander, wie die Linien BF, BI, BL etc., so daß diese kleinen Zentren oder Teilgewichte zum Gesamtzentrum oder Gesamtgewicht, das im Punkt M ist (von wo man eine Linie aufgehängt hat, die an Größe und Gewicht gleich AC ist), so sind, wie alle Linien BF, BI, BL etc. zum Rechteck AC mal BM; denn durch die Indivisibeln hat man vom Rechteck aus dem Teil AD der Linie AC und allen Linien BF, BI, BL etc. zusammen besagten Teil AD abgezogen. Man muß eine Linie finden, die in Potenz gleich dem Raum sei, der gemacht ist aus allen Linien BF, BI, BL etc.; dann sage ich, daß wie die gegebene Linie, nämlich AC, zu der Linie ist, deren Quadrat gleich dem obigen Raum und Fläche ist, gemacht durch alle Linien BF, BI, BL etc., so ist diese Linie oder Seite vom Quadrat zu BM; in der Weise, daß die obige Linie, die den Raum kann, gemacht aus den Linien BF, BI, BL etc. die mittlere Proportionale zwischen der angenommenen Linie AC und der gesuchten Linie BM sei. Aber alle diese Linien sind zu BC, gleichoft genommen, wie das Dreieck zum Quadrat der Summe oder Vielzahl besagter Punkte, d.h. wie 1 zu 2; folglich ist die Linie BM in Potenz soviel wie ein Viertel des Quadrates BC, folglich ist BM die Hälfte von BC; und so ist das Zentrum der besagten angenommenen Linie in ihrer Mitte: denn vom Punkt M eine Linie parallel zu AB ziehend, geht sie durch den Punkt G, Mitte der Linie AC, und bezeichnet die Stelle ihres Schwerpunktes.

(Satz 46) Ich werde nun den Schwerpunkt eines Körpers suchen, sei es ein Kegel, Zylinder, parabolisches oder hyperbolisches Conoid, elliptischer Körper oder irgendein anderer bekannter Körper. Sprechen wir zuerst über den Kegel, der dargestellt ist durch die Linie AC und durch CB, gezogen senkrecht auf AB. Die Spitze des Kegels ist C, die Achse CB, und die Linie AB verdoppelt wird der Durchmesser des Kreises oder der Basis des Kegels. Die Achse des Kegels, BC, sei geschnitten durch Flächen senkrecht zu dieser Achse in unendlich viele gleiche Teile: alle diese Teilungen sind ebensoviele Kreise; die alle zusammen durch die Indivisibeln den Kegel zusammensetzen und zueinander sind wie die Quadrate ihrer Durchmesser; da wir wissen, wie die Durchmesser zueinander sind, wissen wir auch die Proportion der Quadrate. Nun macht diese Teilung im Kegel und auf seiner Achse ähnliche Dreiecke, wie ABC, DFC, HIC, KLC etc. Daher sind die Radien AB, DF, HI, KL etc. zueinander wie die Teile der Achse BC, FC, IC, LC: nun haben diese Teile gleiche Differenz, daher folgen sie der natürlichen Ordnung der Zahlen, die Radien folgen also untereinander der natürlichen Ordnung der Zahlen. Wenn die Durchmesser der natürlichen Ordnung der Zahlen folgen, folgen ihre Quadrate der natürlichen Ordnung der Quadrate besagter Zahlen; folglich sind die Kreise untereinander wie die Quadrate der Zahlen, die der natürlichen Ordnung folgen, d.h. wie 1, 4, 9, 16, 25 etc.

Wenn man dieses gesetzt hat, um den Schwerpunkt dieses Kegels zu finden, muß man eine Fläche suchen, in der die gezogenen Linien derselben Proportion gehorchen, d.h. daß die Linie zur Linie sei wie ein Quadrat zum Quadrat; denn die Fläche, die diese Bedingung hat, wird ihren Schwerpunkt an derselben Stelle haben wie der Körper. Ich nehme als Fläche eine Parabel mit dem Scheitelpunkt E (Fig. 4): ihre Achse sei ER, und die Berührungslinie EN stellt die Achse des Kegels BC dar. Ich teile EN in unendlich viele gleiche Teile, und von jedem Punkt ziehe ich Linien parallel zu NO (AB repräsentierend), die die Fläche oder Dreilinie EON teilen. Man hat gezeigt, daß diese Dreilinie zu ihrem Parallelogramm wie 1 zu 3 ist: man sagt also, wie die Dreilinie zu ihrem Parallelogramm, so ist NE zu einer anderen Linie V; folglich ist V das Dreifache von NE, und wenn NE gleich 4 ist, dann ist V gleich 12. Ich sage außerdem, wie der Zylinder, gemacht aus dem Parallelogramm der Parabel, zur Hälfte des Körpers, gemacht durch die Dreilinie OEN, die im Zylinder eingeschlossen ist, so ist 4 zu 1; und so die Linie V, die 12 wert ist zu 3, was die Linie CS sein wird, und der Punkt S zeigt den Schwerpunkt. Da nun BC 4 ist, ist BS 1 und CS 3.

Schwerpunkt des parabolischen Conoids

(Satz 47) Wenn ich den Schwerpunkt des parabolischen Conoids suche, schneide ich es, oder seine Achse, in unendlich viele gleiche Teile durch Ebenen, die den ganzen Körper in Kreise teilen (denn im parabolischen Conoid ebenso wie im Kegel, ergeben die Sektionen durch eine Ebene parallel zur Basis Kreise). Nun sind alle diese Kreise zueinander wie die Quadrate ihrer Durchmesser; folglich, wenn wir wissen, wie die Durchmesser sich verhalten, wissen wir, wie ihre Quadrate sind. Aber in der Parabel sind die Quadrate der Ordinaten zueinander wie die Teile der Achse: diese Teile sind hier gleich; folglich sind sie zueinander wie die natürlichen Zahlen; die Quadrate der Durchmesser sind also zueinander in der Ordnung der natürlichen Zahlen; und wenn das erste Quadrat 1 ist, ist das zweite 2 , das dritte 3 etc.

[pl. XXIII, Fig. 3, 4] Durch unsere Lehre muß man eine Figur oder Fläche finden, die diese Eigenschaft hat. Ich finde, daß das Dreieck dieselbe macht; man muß sich nun vorstellen, daß ABC ein Dreieck ist. Ich teile BC in unendlich viele gleiche Teile, und durch die Punkte ziehe ich Parallelen zu AB: nun repräsentiert BC die Achse des Körpers, dessen Schwerpunkt man sucht. Wenn das gemacht ist, sage ich: wie die Fläche des Dreiecks zu seinem Parallelogramm, so ist BC zur Linie V. Man weiß, daß das Dreieck zum Parallelogramm wie 1 zu 2 ist, folglich ist V gleich zweimal BC; wenn BC gleich 3 ist, dann ist V gleich 6: Dann sagt man: wie der Zylinder, gemacht aus dem Parallelogramm des Dreiecks, zur Hälfte des Körpers, oder des aus dem Dreieck gebildeten Kegels ist, so ist die LInie V zu BM, die den Schwerpunkt markiert. Nun ist der Zylinder zur Hälfte des Kegels wie 6 zu 1: folglich ist BM 1/6 der Linie V, und 1/3 von BC; der Schwerpunkt des parabolischen Conoids ist also bei einem Drittel seiner Achse der Seite der Basis, und wenn die Achse in drei gleiche Teile geteilt ist, ist der erste Punkt der Seite der Basis der Schwerpunkt.

Man muß im allgemeinen beachten, daß, wenn man den Schwerpunkt eines beliebigen Körpers finden will, nachdem man seine Achse in unendlich viele gleiche Teile geteilt hat und folglich den ganzen Körper, wenn man weiß, welcher Proportion oder welchem Verhältnis alle Schnitte gehorchen, die durch die den Körper teilende Ebene gemacht werden: man muß eine Fläche finden, deren Eigenschaft so beschaffen ist, daß die Linien, die sie in unendlich viele gleiche Teile teilen, zueinander sind wie alle Sektionen des Körpers zueinander: wenn die Sektionen oder Flächen des Körpers zueinander wie Quadrate zu Quadraten sind, müssen die Linien der Fläche zueinander wie Quadrate zu Quadraten sein. Wenn die Proportion oder das Verhältnis im Körper ein anderes ist, muß sie in der Fläche ebenso sein: immer im Körper beobachtend, daß wenn die Fläche zur Fläche wie das Quadrat ihres Radius zum Quadrat des Radius der anderen ist, in der Fläche die Linie zur Linie wie ein Quadrat zum Quadrat ist. Dies muß man anmerken.

(Satz 48) [pl. XXIV, Fig. 1] Sei die gekrümmte oder kreisförmige Linie BTEA in unendlich viele gleiche Teile geteilt in den Punkten V, T, F, E, D etc., und von jedem der Punkte sei eine Berührungslinie gezogen wie VS, TR, FI, EH, DG etc. mit der Bedingung, daß, wenn die letzte wie DG gezogen ist, alle anderen die Linie CS höher treffen, nämlich weiter entfernt vom Punkt C, wie in den Punkten H, I, R, S etc., die folglich alle entfernter von C sind als der Punkt G in der Linie CS. Außerdem ziehe ich vom Punkt B die Berührungslinie, die parallel zu CS sein wird. Danach ziehe ich von den Berührungspunkten wie D eine Linie, nämlich DO, die gleich und parallel zu CG sei; vom Punkt E die Linie EP gleich und parallel zu HC; von F die Linie FQ gleich und parallel zu IC; ähnlich die Linie TY gleich RC und VZ gleich SC, und ebenso von unendlich vielen anderen Punkten, wenn die Linie CS beliebig verlängert ist, und die Berührungslinie in B ins Unendliche gezogen, welche Asymptote im Hinblick auf die Linie sein wird, die sich bildet durch das Ende der Linien, die von den Punkten der Teilung parallel zu CS gezogen sind, welche die gekrümmmte Linie COPQYZ ist. Dann, wenn man vom Punkt C Linien zu jedem Punkt der Teilung der Kurve BFA zieht, ist der ganze Raum AFBC in unendlich viele Sektoren geteilt, die sich durch die Indivisibeln in Dreiecke verwandeln, weil die kleinen Teile der gekrümmten Linien durch die unendliche Teilung gerade werden. Ich sage außerdem, daß der ganze Raum BFACQZ bis zum Ende der Kurve CQZ, gezogen ins Unendliche und der zwischen der genannten Kurve ist, sich in unendlich viele Parallelogramme geteilt findet, von denen eines DOCG ist, welches das kleinste darstellt. Dies ist ein Parallelogramm, weil in den Indivisibeln die Berührungslinie DG zu einem Teil der gekrümmten Linie DA übergeht, wie oben gesagt in einer anderen Proposition: da nun DO gleich und parallel zu GC gemacht ist und gleichermaßen von allen Punkten, hat man Linien gezogen, die gleich und parallel zu ihren Korrespondierenden in CS sind.

Um zur Schlußfolgerung zu kommen, die Parallelogramme haben alle eine selbe Seite wie die Dreiecke, welche jeder gleiche Teil der gekrümmten Linie AEB ist. Ich sage also, daß die Dreiecke, die als Spitze den Punkt C haben, von dem die beiden Seiten des Dreiecks ausgehen, und deren dritte der Teil der Kurve BFA ist, die ins Unendliche geteilt ist; alle diese Dreiecke, sage ich, die den Raum AFBC ausfüllen, gehen vom Punkt C aus wie von ihrer Spitze. Aber die Parallelogramme, die auf den gleichen Basen und zwischen denselben Parallelen liegen wie die Dreiecke, sind das Doppelte der Dreiecke, und beide sind zwischen den Parallelen CO und DG und zwischen CP und EH etc. (diese Linien CO; CP sind nur vorgestellt, um zu zeigen, daß die Dreiecke und die Parallelogramme zwischen denselben Parallelen und auf den gleichen Basen sind; denn die Basen der einen und der anderen sind Teile der gekrümmten Linie, geteilt ins Unendliche, und die Teile der Tangente, eingeschlossen zwischen den Parallelen zu CA, gehen über und sind genommen als Teile von Kurven, auch eingeschlossen zwischen denselben Parallelen).

Da die Parallelogrammme das Doppelte der Dreiecke sind, ist durch die Indivisibeln der Raum, der durch die besagten Parallelogramme eingenommen wird, der sich eingeschlossen findet zwischen der Kurve AEB auf der einen Seite und der Kurve CQZ, erzeugt zum Unendlichen, auf der anderen Seite; und zwischen den geraden Linien AC und der Berührungslinie B ins Unendliche gezogen, dieser ganze Raum, nämlich die Vierlinie ZBFACQZ, ist das Doppelte des Raumes AFBC. Aber der Raum AFBC ist der, welcher durch die Dreiecke gemacht wird; folglich ist er gleich dem anderen Raum, eingeschlossen in ZBCQZ, die zwei Linien BZ und CZ ins Unendliche gezogen; was zu zeigen war.

Nun ist die Berührungslinie BZ Asymptote, weil, wie die Linie DO, die von der Berührungslinie DG ausgeht, gleich der Linie GC ist, die vom Ende derselben Berührungslinie ausgeht, und so mit allen anderen Linien, die von Berührungslinien ausgehen, muß es sein, daß die vom Punkt B ausgehende Linie, die dieselbe Linie CQZ in einem weiter entfernten Punkt treffen muß, gleich dem Teil der Linie CAI ist, die verlängert und eingeschlossen zwischen dem Punkt C und dem Treffpunkt der Tangente in B ist. Aber es ist unmöglich, daß die Berührungslinie in B sie treffen kannn, weil sie parallel sind; also trifft sie nie die Linie CQZ, folglich ist sie Asymptote.

(Satz 49) [pl. XXIII, Fig. 5] Betrachten wir die Figur, wenn wir die Ordinaten der Punkte D, E, F etc. auf der Achse CA gezogen haben, und gleicherweise der Punkte O, P, Q etc. auf der Achse C 10, in der Annahme, daß die Figur ABC eine Parabel sei.

Sei D 1 die erste Ordinate der Figur ABC, und O 6 von C Z 10, man hat DO gleich zu GC, und auch zu 1 6; und wenn man von zwei gleichen Linien GC und 1 6 die Linie C 1 wegläßt, die beiden gemeinsam ist, bleibt G 1, gleich zu C 6. Nun ist wegen der Eigenschaft der Parabel G 1 in zwei gleiche Teile geteilt durch den Scheitelpunkt A; folglich ist C 6 gleich zweimal A 1; ebenso alle andern; nämlich C 7 gleich zweimal A 2, C 8 gleich zweimal A 3 etc. Daher, wie die Linien oder Teile der Achse der Parabel ABC untereinander sind, so sind die doppelten Teile zueinander in der anderen Figur C Z 10. Aber in der Parabel sind die Teile zueinander wie die Quadrate der Ordinaten, folglich sind in der Figur C Z 10 die Teile der Achse ebenso zueinander, wie die Quadrate der Parallelen zu den Ordinaten (welche die Ordinaten der besagten Figur C Z 10 sind), nämlich wie das Quadrat von O 6 zum Quadrat von P 7, so ist C 6 zu C 7 ; daher folgt, daß die Figur C Z 10 auch eine Parabel ist, die das Doppelte der Parabel ABC ist.

Aber wenn man will, daß die Teile der Achse zueinander sind wie die Kuben der Ordinaten, und daß auch G 1 gleich dem Dreifachen von A 1 ist, dann ist C 6 gleich dem Dreifachen von A 1, und die Parabel C Z 10 gleich dem Dreifachen der Parabel ABC. dasselbe macht sich immer, wenn man die Parabeln ändert, und machend, daß die Teile der Achse zueinander sind wie Biquadrate, Quadratkuben etc. der Ordinaten zur Achse der besagten Parabeln.

(Satz 50) Nun muß man sehen, wie man die Quadratur der Parabel macht. Zu diesem Zweck muß man in ABC betrachten, daß die Ordinaten und die Teile der Achse Parallelogramme bilden, die die Figur ausfüllen. Für die andere Figur C Z 10, die kann ich betrachten, als wenn ich vom Punkt B eine Berührungslinie gezogen hätte, die CI in I trifft (denn in der Parabel ist die Berührungslinie im Punkt B gar nicht parallel zu CI; wie in der vorangehenden Figur, und folglich muß die Linie CI treffen). Von demselben Punkt B zieht man BZ parallel zu CI, die die Linie CQZ trifft; denn diese Linie ist nur gebildet durch das Ende der Linien parallel zu CA. Vom Schnittpunkt sei die Figur C Q Z 10 gezogen. Die Ordinaten der Parabel ABC sind gleich den Ordinaten der Parabel C Z 10. Aber die Teile der Achse der Parabel ABC sind nur soviel wie die Hälfte der Teile der Achse der Parabel C Z 10; folglich sind diese das Doppelte jener, folglich sind die Parallelogramme der Parabel C Z 10 das Doppelte der Parallelogramme der Parabel ABC; und folglich ist die Parabel C Z 10 das Doppelte der Parabel ABC, oder der Dreilinie BCQZ, die ihr gleich ist; und das Parallelogramm C B Z 10 das Dreifache derselben Parabel ABC; also ist die besagte Parabel C Z 10 gleich zwei Dritteln des besagten Parallelogramms C B Z 10; und von dieser Art finde ich die Quadratur der Parabel, da ich ein Parallelogramm habe, das ein Verhältnis zu einer Parabel hat, die gleich oder zumindest in einem Verhältnis zu einem Dreieck ist. Wenn man Kuben nimmt, Biquadrate oder andere Potenzen der Ordinaten, schließt man daraus ebenfalls die Quadratur dieser Parabeln.

(Satz 51) Man muß nun beweisen, daß die beiden Dreilinien D A 1 und OCL gleich sind; dazu, gezogen habend die gerade Linie CD, sage ich, daß die Dreilinie CDA die Hälfte der Vierlinie CODA ist. wenn ich also von der Vierlinie das Parallelogramm C L D 1 weglasse, bleiben die Dreilinien COL und A D 1; wenn man von der Dreilinie das Dreieck C D 1 wegläßt, bleibt die Dreilinie D A 1; daher habe ich von einer Größe, die das Doppelte einer anderen Größe ist, einen Teil gezogen, der das Doppelte eines Teils ist, den ich in der anderen gezogen habe, folglich ist der Rest der großen das Doppelte des Restes der kleinen, und auf diese Weise sind D A 1 und LCO das Doppelte von D A 1; also ist D A 1 gleich LCO, was zu zeigen war.

(Lemma) Man muß noch zeigen, daß die Linie CD die Vierlinie CODA in zwei gleiche Teile schneidet (denn das ist nicht immer klar). Dazu nimmt man OD als eine der Seiten des Parallelogramms an, und als die andere den indivisiblen Teil DA auf der Berührungslinie DG oder auf der Kurve DA, was dasselbe ist, und das Dreieck CDA mit demselben indivisiblen Teil DG oder DA. Ich sage, daß das Parallelogramm das Doppelte des Dreiecks ist, denn sie haben gleiche

Basen, welche die besagten indivisiblen Teile sind, und zwischen denselben Parallelen, nämlich OC und DG; so schneidet CD das Parallelogramm oder besser gesagt, die Vierlinie ODAC in zwei gleiche Teile; denn wir betrachten nicht mehr den Raum DAG noch den, der zwischen der Kurve OC und der Gerade OC eingeschlossen ist; denn diese Räume sind nicht unsere Parallelogramme und Dreiecke. Nun sind alle diese Dreiecke nur als Linien betrachtet, nämlich CD, CE und die anderen ins Unendliche; und alle Linien oder Dreiecke füllen den Raum ABC aus, wie die Parallelogramme (anstelle dieser nehmen wir die Linien DO, EP, FQ etc.) den Raum ZBACQZ ausfüllen, sei es, daß die Linien BZ und CQZ sich treffen, oder nicht.

(Satz 52) Kommen wir nun zum Körper, der sich bildet durch die Umdrehung der Figur um die Achse AC. Wir sehen, daß sich mehrere Zylinder bilden, Rollen von Zylindern, Kegel oder Rollen von Kegeln; wie der Zylinder, gemacht auf der Achse CA durch das Parallelogramm CADO; der Kegel gemacht auf derselben CA und durch das Dreieck CAD; dann die Rollen von Zylindern, gemacht durch die kleinen Parallelogramme, wie DOPE und andere ähnliche, die als Basis die indivisiblen Teile der Kurve haben, und Rollen von Kegeln, die gemacht sind durch die Dreiecke wie CDE, CEF und die anderen ähnlichen um die Achse CA. Aber die Kegel sind zu den Zylindern mit derselben Basis wie 1 zu 3, und die Rollen der Kegel sind zu den Zylinderrollen im selben Verhältnis, folglich ist der durch ABC gemachte Körper ein Drittel des Körpers ZBACQZ; und wenn die Linien BZ, CZ sich nicht schneiden, muß man annehmen, daß der Körper von der Seite dort bis ins Unendliche fortgeht, und wenn man den Körper, gemacht von ABC, wegläßt, bleibt der Körper BCZ, der das Doppelte von ABC ist. In den Flächen haben wir gefunden, daß die Fläche ABC gleich der Fläche BCZ ist, fortgesetzt bis ins Unendliche, wenn nötig. (Satz 53) Man muß nun diese Figuren als Parabeln betrachten; folglich trifft die Berührungslinie im Punkt B, oder vielmehr die von B parallel zu AC gezogene Linie, die fortgesetzte Kurve CZ. Sei also die Figur im Schnittpunkt geschlossen, und sei C Z 10 die um ihre Achse drehende Figur, und wenn man die Zylinder vergleicht, gemacht durch die Parallelogramme D 1 A, E 2 A, etc. mit denen der anderen Parabel wie O 6 C, P 7 C etc., weil die Ordinaten D 1, O 6 etc. beider Figuren gleich sind; aber die Teile der Achse der Prabel C Z 10, wie C 6 etc. sind das Doppelte der Teile der Achse AC, wie A 1 etc. Es folgt, daß jeder Zylinder von unten das Doppelte dessen von oben ist; folglich ist der ganze Körper von unten, gemacht durch C Z 10, rotierend um C 10, zum Körper, gemacht durch ABC, drehend um AC, wie 2 zu 1. Aber man hat gesehen, daß der Körper von AB zum Körper von ZQCB wie 1 zu 2 war; folglich ist der besagte Körper von ZQCB gleich dem Körper von C Z 10; also ist der Körper von C Z 10 die Hälfte des Zylinders des Parallelogramms C B Z 10, was zu zeigen war.

(Satz 54) Man muß nun eine andere Figur betrachten, die sich bildet, wenn man vom Punkt L eine Linie gleich und parallel zu CG errichtet, nämlich L 11; vom Punkt M: M 12 gleich und parallel CH, etc., und durch das Ende dieser Linien bildet sich eine Kurve A 11 12 16, und von jedem der besagten Punkte zieht man die Ordinaten 11 G, 12 H, 13 R etc., die gleich den von ABC gezogenen von den korrespondierenden Punkten DEF etc. sind, die unendlich sind: außerdem ist AG gleich A 1, AH gleich A 2 etc. in der einfachen Parabel.

Man betrachtet auch, daß die Linien L 11 und DO gleich sind, und ebenso M 12 und EP; N 13 und FQ usw. und folglich sind die Parallelogramme 11 L M 12, 12 M N 13 etc. gleich den Parallelogrammen ODEP, PEFQ etc., denn man nimmt hier nur die Linien DO, EP oder ihre gleichen L 11, M 12 etc. anstelle der genannten Parallelogramme. Nun hat man gezeigt, daß die Dreiecke CAD, CDE, CEF etc. die Hälfte der Parallelogramme AO, DP, EQ etc. sind; folglich bilden sie auch die Hälfte der Parallelogramme A C L 11, 11 L M 12, 12 M N 13 etc. Der Raum ABC ist also die Hälfte des Raumes 16 A C B, ob die Linien A 16 und B 16 sich treffen oder nicht. Daraus folgt, daß ABC gleich dem Raum B A 16 ist, wenn auch die Linien A 16 und B 16 , ins

Unendliche verlängert, sich nicht treffen. Man kann dasselbe kürzer zeigen, wie folgt: Die Linien 11 L, 12 M, 13 N usw., unendlich viele, sind gleich den Linien DO, EP, FQ etc., daher folgt, daß der Raum ZCAB gleich B C A 16; wenn man also das gemeinsame ABC wegläßt, bleibt B A 16 gleich BCZ, was oben gleich ABC gezeigt wurde, folglich ist 16 A B auch gleich.

(Satz 55) Sei jetzt ABC die erste Parabel, die Berührungslinie BI treffe CI, die Linie B 16 gleich und parallel zu CI wird die Kurve A 16 im Punkt 16 treffen, und die Figur A 16 I ist eine Parabel gleich und ähnlich zu ABC; denn die Ordinaten der einen sind gleich den Ordinaten der anderen, nämlich D 1 gleich G 11, E 2 gleich H 12 etc., weil sie zwischen denselben Parallelen sind, und durch die Eigenschaften der Parabel ist AG gleich A 1, AH gleich A 2, AR gleich A 3 etc. d.h. die Teile der Achse, wo die korrespondierenden Ordinaten enden, sind gleich; folglich ist die ganze Parabel ABC gleich der ganzen Parabel A 16 I. Nun hat man gefunden, daß der Raum B A 16 gleich ABC ist; folglich sind die drei Stücke oder Räume ABC, A 16 I, B A 16, die im Parallelogramm I C B 16 eingeschlossen sind und es bilden, einander gleich.

Was wir sagen können von der ersten Parabel oder der Parabel der ersten Art, ist dasselbe, was man meinen muß auch von den Parabeln anderer Arten, nämlich: wenn die Parabel ABC von der dritten Art ist, ist die Parabel A 16 I auch von der dritten Art; aber sie ist nicht dieselbe wie die Parabel ABC: denn die Teile AG, AH, AR etc. sind in demselben Verhältnis wie die Teile A 1, A 2, A 3 etc., aber AG ist nicht gleich A 1, noch AH gleich A 2 etc., wie sie es in der Parabel der ersten Art sind.

ENDE