Pierre-François Verhulst

Auszug aus „Mathematische Untersuchungen über das Gesetz des Bevölkerungswachstums“ (1844/45)

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Allgemeine Theorie

§1. Von all den Problemen, die die Nationalökonomie den Betrachtungen der Philosophen bietet, ist zweifelsfrei eines der interessantesten die Kenntnis des Gesetzes, das den Fortschritt der Bevölkerung regelt. Um es exakt zu lösen, ist es notwendig, den Einfluß zahlreicher Ursachen einschätzen zu können, die der Vermehrung der menschlichen Rasse entgegenstehen oder sie fördern. Und da viele dieser Ursachen von Natur aus oder in ihrer Wirkung variabel sind, ist das Problem in seiner Allgemeinheit betrachtet sichtlich unlösbar.

Man muß unterdessen bemerken, daß in dem Maß, in dem die Zivilisation sich perfektioniert, der Einfluß der rein störenden Ursachen nach und nach abnimmt und die konstanten Ursachen dominieren, so daß es zu einer bestimmten Zeit erlaubt sein wird, von den ersteren zu abstrahieren, vorbehaltlich man betrachtet die gegebenen Größen des Problems als leichten Variationen unterworfen.

Folglich, um den Kalkül auf das Prinzip der Bevölkerung anzuwenden, beginnen wir mit der Vernachlässigung der zufälligen Ursachen, deren Wichtigkeit zu leugnen wir im aktuellen Zustand der Gesellschaft jedoch weit entfernt sind. Wenn die statistischen Daten dieselbe Genauigkeit aufwiesen wie die der experimentellen Wissenschaften, wie die Physik und die Chemie, könnte man den Einfluß der vernachlässigten Ursachen durch Vergleich der Ergebnisse des Kalküls mit der Beobachtung beurteilen. Aber unglücklicherweise ist die Statistik eine noch zu neue Wissenschaft als daß man den Zahlen, die sie liefert, vollständig vertrauen könnte.

§2. Zur Menge der Ursachen, die einen konstanten Einfluß auf das Bevölkerungswachstum ausüben, zählen wir die Fruchtbarkeit der menschlichen Rasse, die Gesundheitspflege des Landes, die Sitten der betrachteten Nation, ihre zivilen und religiösen Gesetze. Was die variablen Ursachen betrifft, die man nicht als zufällig betrachten kann, vereinigen sie sich im allgemeinen in der nach und nach zunehmenden Schwierigkeit, die die Bevölkerung bei der Beschaffung des Lebensunterhaltes erfährt, sobald sie erst genügend zahlreich ist, so daß alles fruchtbare Land besiedelt ist.

Wenn man die Schwierigkeit, von der wir gerade sprachen, nicht berücksichtigt, muß man aufgrund der konstanten Ursachen annehmen, daß die Bevölkerung in geometrischer Progression wachsen muß. In der Tat, wenn 1000 Einwohner 2000 geworden sind nach Ablauf von beispielsweise 25 Jahren, gibt es keinen Grund, warum nicht diese 2000 Einwohner 4000 werden sollten nach Ablauf der folgenden 25 Jahre.

Die Vereinigten Staaten bieten uns ein Beispiel für diese große Geschwindigkeit des Bevölkerungswachstums. Man zählte dort gemäß offizieller Volkszählungen,
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

1790	....	3,929,827	Einwohner.
1800	....	5,305,925	
1810	....	7,239,814	
1820	....	9,638,134	
1830	....	12,866,020	
1840	....	17,062,566	

Wenn man für die Bevölkerung von 1795 die Zahl 4,617,876 - Mittelwert zwischen der von 1790 und der von 1800 - nimmt und dasselbe für die Jahre 1805, 1815, 1825 und 1835 durchführt, kann man approximativ den Fortschritt der Bevölkerung innerhalb von 5 Jahren berechnen. Auf die Art haben wir die folgende Tabelle aufgestellt, in der wir die Zahlen gerundet haben und mit r das Verhältnis jeder Bevölkerung zu der, die ihr um 25 Jahre vorausgeht, bezeichnet haben:

Jahre	**Bevölkerung**	**Wert von** r
1790	3,930,000	
1795	4,618,000	
1800	5,306,000	
1805	6,273,000	
1810	7,240,000	
1815	8,439,000	2.147
1820	9,638,000	2.087
1825	11,252,000	2.120
1830	12,866,000	2.052
1835	14,964,000	2.076
1840	17,063,000	2.021

Wir haben die Einwanderung nicht berücksichtigt, da wir sie für reichlich ausgeglichen halten durch die Hemmnisse, die die Sklaverei der Vermehrung der Schwarzen in den Südstaaten bereitet.

§3. Bezeichnen wir mit p die Bevölkerung, mit t die Zeit und mit k und l unbestimmte Konstanten: wenn die Bevölkerung in geometrischer Progression zunimmt während die Zeit in arithmetischer Progression fortschreitet, hat man zwischen diesen beiden Größen die Relation

$$p = k10^{lt}$$

Sei p' die Bevölkerung zur Zeit t': es folgt

$$p = p'10^{l(t-t')},$$

und wenn man die zu dem Zeitpunkt, von dem an man die Zeit zählt, vorhandene Bevölkerung mit Π bezeichnet, wird aus der vorhergehenden Gleichung

$$p = \Pi 10^{lt} \tag{1}$$

Unter der Hypothese des geometrischen Wachstums ist die Kurve der Bevölkerung daher eine *logarithmische*, bei der die Ordinaten und Abszissen die jeweiligen Bevölkerungen und die verstrichenen Zeiten widergeben, wobei die Ordinate Π ist im Ursprung.

Differenziert man Gleichung (1) zweimal und bezeichnet mit M den Wert, mit dem man den natürlichen Logarithmus multiplizieren muß, um ihn in den gewöhnlichen Logarithmus umzuwandeln, erhält man

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{\Pi l^2 10^{lt}}{M^2} = \frac{l^2 p}{M^2};$$

was zeigt, daß die Kurve ihre Konvexität kontinuierlich zur Achse der Abszisse hin ändert.

Die malthusianische Periode von 25 Jahren gibt an, daß p zu $2p$ wird, wenn t zu $t+25$ wird, das Jahr als Einheit der Zeit genommen: man hat daher die Gleichungen

$$2p = \Pi 10^{lt+25l},$$
$$2p = 2\Pi 10^{lt};$$
woraus $2 = 10^{25l}$ und
$$l = \frac{1}{25}\log 2 = 0.01204120$$
folgt.

Wir bestehen nicht länger auf der Hypothese des geometrischen Wachstums angesichts dessen, daß sie sich nur unter außergewöhnlichen Umständen realisiert; z.B. wenn ein fruchtbares und in gewisser Weise unbegrenzt ausgedehntes Gebiet von einem Volk mit sehr fortschrittlicher Zivilisation bewohnt wird wie bei den ersten Kolonien der Vereinigten Staaten.

§4. Differenzierung der Gleichung (1) liefert
$$\frac{Mdp}{pdt} = l:$$
Diese Größe ist konstant, man kann sie als Maß der Energie nehmen, mit der die Bevölkerung neigt sich zu entwickeln, wenn sie nicht durch die Furcht vor Nahrungsmangel zurückgehalten wird. Man hat außerdem mit einer umso größeren Genauigkeit, je kleiner Δp und Δt sind,
$$M\Delta p = lp\Delta t;$$
und, wenn man für Δt den Zeitraum eines Jahres annimmt,
$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{l}{M},$$
das heißt, daß im Fall des geometrischen Wachstums der jährliche Überschuß der Geburten über die Todesfälle dividiert durch die Bevölkerung, die ihn hervorgebracht hat, ein konstanter Bruch sein muß. Hinsichtlich der rein numerischen Ergebnisse ist es unerheblich, ob die Zahl der Geburten zu- oder abnimmt, vorausgesetzt diejenige der Todesfälle nimmt auf dieselbe Art zu oder ab: wenn man jedoch beobachtet, daß der Koeffizient $\frac{l}{M}$ sich verringert, kommt es auf dasselbe heraus, ob man die Ursache dafür auf eine Verringerung der Fruchtbarkeit der Bevölkerung oder auf eine Zunahme seiner Sterblichkeit zurückführt, d.h. auf die vorbeugenden oder die vernichtenden Hemmnisse.

Es ist eine Beobachtungstatsache, daß in ganz Europa das Verhältnis des jährlichen Überschusses der Geburten über die Todesfälle zur Bevölkerung, die diesen hervorgebracht hat - und daher auch der Koeffizient $\frac{l}{M}$ - sich unaufhörlich verringern: auf die Art, daß der jährliche Zuwachs, dessen absoluter Wert kontinuierlich zunimmt bei geometrischer Progression, einer höchstens arithmetischen Progression zu folgen scheint. Diese Anmerkung bekräftigt den gefeierten Ausspruch von Malthus, daß *die Bevölkerung dahin strebt geometrisch zu wachsen, während die Produktion der Lebensmittel höchstens arithmetisch wächst*, da die Bevölkerung nun einmal gezwungen ist, sich nach den Lebensmittel zu richten.[1]

[1] Der zweite Teil dieses Ausspruches läßt sich nur auf von alters her zivilisierte Länder anwenden, die einzigen, die Malthus im Sinn hatte. Man hat diesem hervorragenden Ökonomen vorgeworfen, nicht die Eigenschaft der Lebensmittel bedacht zu haben, in einer schnelleren Progression als die menschliche Rasse zuzunehmen, wenn der Boden erstmals bebaut wird. Aber dieses goldene Zeitalter der Gesellschaft besteht für die europäischen Nationen seit langem nicht mehr. Was die Ressourcen betrifft, die ein zahlreiches Volk aus dem ausländischen Handel schöpfen kann, um sich den Lebensunterhalt zu beschaffen, so reicht es uns daran zu erinnern, daß nach den Rechnungen von Herrn Moreau de Jonnès die Ernte Frankreichs - nur Getreide - 70 Millionen Hektoliter beträgt und daß, um eine derartige Menge zu transportieren, 88,000 Schiffe zu hundert Tonnen notwendig sind!

Man kann eine Unzahl von Hypothesen über das Gesetz der Verringerung des Koeffizienten $\frac{l}{M}$ aufstellen. Die einfachste besteht darin, diese Verringerung als proportional anzusehen zum Zuwachs der Bevölkerung seit dem Zeitpunkt, an dem die Schwierigkeiten fruchtbares Land zu finden bemerkbar wurden. Wir nennen *Normalbevölkerung* und bezeichnen mit b diejenige, die zu diesem ausgezeichneten Zeitpunkt gehört, von dem ausgehend wir die Zeit zählen: n bezeichne einen unbestimmten Koeffizienten. Dann ersetzen wir die zum geometrischen Wachstum gehörende Differentialgleichung $\frac{Mdp}{pdt} = l$ durch

$$\frac{Mdp}{pdt} = l - n(p - b)\,; \tag{2}$$

woraus mit der Abkürzung $m = l + nb$,

$$\frac{Mdp}{pdt} = m - np$$

und

$$dt = \frac{Mdp}{mp - np^2} \tag{3}$$

folgen.
Diese Gleichung liefert integriert unter Berücksichtigung, daß $p = b$ zur Zeit $t = 0$ gehört,

$$t = \frac{1}{m}\log\left[\frac{p(m - nb)}{b(m - np)}\right] \tag{4}$$

Wir werden der durch die vorangehende Gleichung beschriebenen Kurve (*siehe Figur*)[I] den Namen *logistisch* geben. Man sieht, daß sie eine Asymptote parallel zur Abszisse im Abstand $\frac{m}{n}$ vom Ursprung hat, denn $p = \frac{m}{n}$ gehört zu $t = \infty$. Dieser Wert von p ist der der Ordinate OZ, die den Grenzwert der Bevölkerung widergibt.

Differenzierung der Gleichung (2) liefert

$$M^2 \frac{d^2 p}{dt^2} = (m - 2np)(mp - np^2)\,;$$

was zeigt, daß die Kurve einen Wendepunkt I hat bei $p = \frac{1}{2}\frac{m}{n}$. Dort wechselt sie von Konvexität zur Konkavität gegen die Abszisse.

§5. Die Gleichung (4) nimmt eine einfachere Form an, wenn man den Koordinatenursprung in den Punkt O_i, dem Fuß der Ordinate p_i des Wendepunktes, legt; dies erfolgt durch einen Wechsel von t nach $t + t_i$, wobei t_i die Abszisse OO_i bezeichnet. Wenn man feststellt, daß

Man stelle sich nun die Menge der anderen Lebensmittel vor. Selbst wenn ein beachtlicher Teil der französischen Bevölkerung von ausländischem Getreide ernährt werden könnte, niemals wird eine kluge Regierung zustimmen, die Existenz von Millionen von Bürgern vom guten Willen ausländischer Herrscher abhängig zu machen.

[I] hinten angeheftet

$$t_i = \frac{1}{m}\log\left[\frac{p_i(m-nb)}{b(m-np_i)}\right]$$

und $p_i = \frac{m}{2n}$, dann folgt

$$t = \frac{1}{m}\log\frac{p}{\frac{m}{n}-p}. \tag{5}$$

Diese Gleichung ist dermaßen, daß wenn man p durch $\frac{m}{n}-p$ ersetzt, t einfach das Vorzeichen ändert. Daraus ergibt sich die Eigenschaft, daß *die Summe der Ordinaten im gleichen Abstand zum Wendepunkt konstant gleich dem Grenzwert* $\frac{m}{n}$ *ist*.

Nehmen wir $O_iO' = OO_i = \frac{1}{m}\log\frac{b}{\frac{m}{n}-b}$: Dann erhalten wir aufgrund der vorhergehenden Eigenschaft

$$O'P' = \frac{m}{n} - b;$$

d.h. daß *die Bevölkerung, wenn sie den zum Punkt O' gehörenden Zeitpunkt erreicht, nur noch um die Größe der Normalbevölkerung zunehmen kann.*

Die Betrachtung der drei besonderen Punkte O, O_i und O' führt uns zu einer Einteilung der unendlichen Zeitdauer in vier *Zeitalter*, an denen jeweils leicht ein besonderes Kennzeichen festgemacht werden kann, sei es aus der Landwirtschaft oder der politischen Ökonomie. Im ersten Zeitalter ist die Kurve der Bevölkerung eine logarithmische, die im Punkt P zur logistischen wechselt: also ist nur das fruchtbare Land besiedelt. Im zweiten Zeitalter OO_i kann man sagen, daß das mittelmäßige Land besiedelt wird. Im dritten Zeitalter, das genausolang wie das vorhergehende dauert, macht man das schlechteste Land urbar. Im vierten Zeitalter schließlich nimmt die Bevölkerung nur noch aufgrund der Veredelung bereits besiedelten Landes oder von Importen durch den ausländischen Handel zu. Übrigens halten wir es für überflüssig darauf aufmerksam zu machen, daß diese Annäherungen zwischen dem Fortschritt der Bevölkerung und der Ausdehnung der Landwirtschaft nicht sehr genau sind.

•
•
•

§6. Untersuchung des Verhältnisses der Bevölkerungsgröße am Wendepunkt zur Maximalbevölkerung für verschiedene Wachstumsgesetze gemäß $\frac{Mdp}{dt} = mp - np^m$

•
•
•

§7. Unter Beibehaltung derselben Abszisse legen wir nun den Koordinatenursprung in einen Punkt C, dessen Abstand zum Punkt O_i mit i bezeichnet werde. Wir ändern folglich t in $t+i$, und es folgt für die allgemeine Gleichung der logistischen Kurve bezogen auf den Fuß einer beliebigen Ordinate

$$t + i = \frac{1}{m} \log \frac{p}{\frac{m}{n} - p}; \qquad (6)$$

in dieser Gleichung ist die Abszisse des Wendepunktes $-i$. Wenn man aus t den Wert von p erhalten will, kann man zur Abkürzung

$$10^{(t+i)m} = z$$

setzen, und man findet

$$p = \frac{m}{n} \cdot \frac{z}{1+z}.$$

§8. Da die Gleichung (6) drei Unbekannte enthält, genügt es, die Bevölkerungsgröße für drei verschiedene Zeitpunkte zu kennen, um das Gesetz ihres Wachstums zu erhalten. Seien also p_0, p_1, p_2 die Ordinaten, die zu den Abszissen 0, t_1 und t_2 gehören, und nehmen wir weiter $t_2 = 2t_1$ an: Gleichung (6) ergibt

$$i = \frac{1}{m} \log \frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0},$$

$$t_1 + i = \frac{1}{m} \log \frac{p_1}{\frac{m}{n} - p_1},$$

$$t_2 + i = \frac{1}{m} \log \frac{p_2}{\frac{m}{n} - p_2};$$

woraus man durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten und der zweiten von der dritten

$$\frac{p_1\left(\frac{m}{n} - p_0\right)}{p_0\left(\frac{m}{n} - p_1\right)} = \frac{p_2\left(\frac{m}{n} - p_1\right)}{p_1\left(\frac{m}{n} - p_2\right)},$$

$$\left(p_1^2 - p_0 p_2\right)\frac{m^2}{n^2} - \left(p_0 p_1^2 + p_2 p_1^2 - 2 p_0 p_1 p_2\right)\frac{m}{n} = 0$$

erhält, und schließlich

$$\frac{m}{n} = \frac{p_1\left(p_0 p_1 + p_1 p_2 - 2 p_0 p_2\right)}{p_1^2 - p_0 p_2}.$$

Dieser Wert für $\frac{m}{n}$ ist endlich und positiv, wenn

$$p_1^2 > p_0 p_2, \quad p_0 p_1 + p_1 p_2 > 2 p_0 p_2$$

gilt: Nun ergibt sich aber die erste Ungleichung aus der Hypothese, mit der wir gestartet sind, nach der die Bevölkerung langsamer als geometrisch wächst, und die zweite kann in der Form

$$p_1 \frac{\frac{1}{2}\left(p_0 + p_2\right)}{\sqrt{p_0 p_2}} > \sqrt{p_0 p_2}$$

geschrieben werden. Man sieht, daß diese nur eine Folgerung ist aus dem bekannten Theorem: *das arithmetische Mittel übertrifft immer das geometrische Mittel*.

Kennt man $\frac{m}{n}$, dann bestimmt man den Koeffizienten m durch die Gleichung

$$m = \frac{1}{t_1} \log \frac{p_1\left(\frac{m}{n} - p_0\right)}{p_0\left(\frac{m}{n} - p_1\right)}$$

und i durch die Gleichung

$$i = \frac{1}{m} \log \frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0}.$$

Man kann dem Wert für $\frac{m}{n}$ eine für die Rechnung mit Logarithmen günstigere Form geben, indem man

$$p_1 - p_0 = u\,, \quad p_2 - p_1 = v\,, \quad \frac{uv}{p_1} = w\,, \quad \frac{u + w - v}{w} = q$$

setzt: es folgt dann

$$\frac{m}{n} = p_1 + \frac{p_1}{q}.$$

Wenn man nun

$$\frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0} = r$$

setzt, dann erhält man für m und i diese sehr einfachen Ausdrücke

$$m = \frac{1}{t_1}(\log q - \log r),$$

$$i = \frac{1}{m}\log r.$$

§9. Wir haben zuvor

$$m = l + nb$$

gesetzt, wobei l das Maß ist für die Geschwindigkeit, mit der die betrachtete Bevölkerung geometrisch zu wachsen strebt, und b die Normalbevölkerung bezeichnet: wenn man die erste dieser Größen kennt, dann ist es folglich leicht, die andere zu bestimmen, und der zugehörige Wert für t ist durch die Gleichung (6) gegeben, in der man $p = b$ setzt. Aber bis zum heutigen Tag ist der numerische Wert von l nicht bekannt für irgendein Volk, es sei denn für die Anglo-Amerikaner. Überdies kann man diesen angesichts der Art und Weise, wie man dahingelangt ist (§3), nur als eine sehr grobe Annäherung betrachten.

Für den Kalkül oder die Aufstellung von auf Bevölkerungen bezogenen Gleichungen kommen wir überein, einen Zehnjahreszeitraum als Einheit der Zeit zu nehmen und eine Million Einwohner als Einheit der Bevölkerung: man vermeidet damit, mit untereinander zu ungleichen Zahlen zu rechnen. Außerdem ist ein Intervall von wenigstens zehn Jahren notwendig, damit sich die Einflüsse der zufälligen Ursachen aufheben können.

§10. Betrachten wir von der logistischen Kurve und jenseits des Wendepunktes eine Folge von Punkten, deren Ordinaten, die gleichen Abstand voneinander haben, mit

$$p',\quad p'',\quad p''',\quad p^{IV},\ \text{etc.}$$

bezeichnet seien: daraus folgt, daß wenn die Kurve konkav zur Achse der Abszisse ist, man

$$p'' > \frac{p' + p'''}{2}, \quad p''' > \frac{p'' + p^{IV}}{2}, \text{ etc.}$$

haben muß. Diesseits des Wendepunktes tritt das Gegenteil ein.

Die vorangehende Bemerkung bietet ein sehr nützliches Kriterium, um zu erkennen, ob gegebene Punkte auf einer logistischen Kurve liegen können, und um näherungsweise den Ort des Wendepunktes bestimmen zu können, sofern er in der beobachteten Periode enthalten ist. Um aber behaupten zu können, daß sie sich tatsächlich auf einer Kurve dieser Art befinden, muß man ein anderes Kriterium, das man aus der Differentialgleichung der logistischen Kurve erhält, anwenden. Wenn man $\Delta t = 1$ setzt und die Differentiale durch endliche Differenzen ersetzt, erhält man näherungsweise

$$M\Delta p = mp - np^2$$

$$M\Delta^2 p = m\Delta p - 2np\Delta p$$

und folglich

$$\frac{n}{M} = \frac{\Delta p^2 - p\Delta^2 p}{p^2 \Delta p} = \frac{\Delta p}{p^2} - \frac{\Delta^2 p}{p\Delta p};$$

eine Differenz, die fast konstant sein muß.

Nehmen wir zum Beispiel die durch die Gleichung

$$t + i = \frac{1}{m} \log \frac{p}{\frac{m}{n} - p}$$

gegebene logistische Kurve und nehmen

$$\frac{m}{n} = 90.888, \quad m = 0.0502125, \quad n = 0.000552464, \quad i = -6.47846$$

an. Bildet man eine Tabelle wie folgt,

t	p	Δp	$\Delta^2 p$	$\frac{\Delta p}{p^2} - \frac{\Delta^2 p}{p\Delta p}$
0	29.178	2.337	0.084	0.0015131
1	31.515	2.421	0.070	0.0015201
2	33.936	2.491	0.059	0.0014651
3	36.427	2.550	0.043	0.0014588
4	38.977	2.593	0.024	0.0014694
5	41.570	2.617		
6	44.187			

dann erkennt man, daß die Zahlen der letzten Spalte sich untereinander wenig genug unterscheiden, so daß sie als konstant angesehen werden können. Aber sie entfernen sich weiter vom wirklichen Wert für $\frac{n}{M}$, der gleich 0.0012721 ist, wobei M den Wert 0.4342944819 hat.

•
•
•

§§11-14 Erweiterung des logistischen Modells auf Bevölkerungen, die schneller als geometrisch wachsen, Untersuchungen anderer Wachstumsgesetze gemäß $\frac{Mdp}{pdt} = l - n(p-b)^2$ und $\frac{Mdp}{pdt} = l - n\sqrt{p-b}$, führt aber auf zu komplizierte Gleichungen

•
•
•

Anwendungen

§15. BEVÖLKERUNGSGESETZ VON BELGIEN. Die Grundlagen der Tabellen, die uns die für die Suche nach dem Bevölkerungsgesetz Belgiens notwendigen Daten liefern, sind aus den folgenden Werken gewonnen:

Recherches sur la reproduction et la mortalité de l´homme aux différents âges, et sur la population de la Belgique[I], von den Herren A. Quetelet und Ed. Smits, 1832.

Bulletin de la commission centrale de statistique[II], 1. Band, 1843.

Annuaire de l´observatoire de Bruxelles[III], *für* 1844.

Man kann sie daher als amtlich ansehen. Um sie aber für unseren Zweck zurechtzumachen, mußten wir sie verschiedenen Vorbereitungen und Korrekturen unterziehen, die wir mitteilen werden.

Zuerst liefern uns die oben erwähnten Werke ohne irgendeine Voraussetzung und mittels einfacher Additionen und Subtraktionen die folgende Tabelle[IV]:

•
•
•

§15 (Rest) Anmerkungen zur Tabelle (Feststellung außergewöhnlicher Ereignisse wie Grenzverschiebungen und Kriege, Daten von 1815-1824 erscheinen Verhulst weniger vertrauenswürdig)

§16 Bereinigung der statistischen Daten (Abschätzung der Geburten und Todesfälle im belgischen Teil von Limburg und Luxemburg 1803-1838, Korrektur der Zahl der Todesfälle vor 1841, die aus zwei Gründen zu hoch ist: (1) Totgeborene sind nur in den Todesfällen aber nicht in den Geburten enthalten, (2) Todesfälle, die sich nicht in der Heimatgemeinde ereignen, werden in der Heimatgemeinde und in der Gemeinde, in der sich der Todesfall ereignet, registriert und damit doppelt gezählt)

§17 (Anfang) Abschätzung der Geburten und Todesfälle im Jahr 1830 (arithmetisches Mittel der Jahre 1829 und 1831), Angabe der Geburten und Todesfälle für das Jahr 1843 (andere Quelle), Abschätzung des Wachstums im Jahr 1844 (arithmetisches Mittel der Jahre 1841-1843), Angabe der Bevölkerungsgröße Belgiens am 1.1.1841 (aus Daten des Militärs), Annahme Zahl der Auswanderer = Zahl der Einwanderer

•
•
•

Zusammenfassung

Bevölkerung am 1. Januar 1815	3,627,253
Wachstum während des Zeitraums 1815-1829	619,860
Bevölkerung am 1. Januar 1830	4,247,113
Wachstum während des Zeitraums 1830-1844	553,748
Bevölkerung am 1. Januar 1845	4,800,861

[I] Untersuchungen über die Vermehrung und Sterblichkeit des Menschen zu verschiedenen Zeiten und über die Bevölkerung Belgiens
[II] Bericht der zentralen Kommission für Statistik
[III] Jahrbuch der Brüsseler Sternwarte
[IV] nächste Seite

Allgemeine Übersicht
der Geburten und Todesfälle in Belgien, seit dem 1. Januar 1803
bis zum 31. Dezember 1842

Jahre	Für **ganz Limb. und Luxemb.** Geburten	Todesfälle	Für den **Rest Belgiens** Geburten	Todesfälle	Anmerkungen
1803 bis 1812	183206	142085	938015	735720	Die Totgeborenen sind in den Todesfällen enthalten, ohne es in den Geburten zu sein, außer für 1841 und 1842
1813	"	"	"	"	
1814	"	"	"	"	
1815 bis 1824	194027	129249	1038182	728627	
1825	20636	13408	114544	74992	
1826	21089	14017	113593	78004	
1827	20995	13596	107633	75709	
1828	20841	13937	114481	74011	
1829	21482	15864	114084	86489	
1830	"	"	"	"	
1831	19894	14678	115156	83411	
1832	20269	15347	108801	99563	
1833	21731	14685	116061	96617	
1834	21726	16096	118036	100477	
1835	22314	14675	120613	86468	
1836	22300	15019	121914	86214	
1837	21035	18585	121679	99557	
1838	22371	15151	129799	94779	
	Für das belgische Limb. und Luxemb. allein				
1839	10796	8312	125226	97136	
1840	11153	8041	126989	95861	
1841	11283	8023	126852	94617	
1842	11288	9138	123739	99404	

•
•
•

§18 "Verteidigung" der Korrektheit der von Verhulst bestimmten Bevölkerungsgrößen durch Vergleich mit England und Frankreich: In England gibt es nur Zählungen durch die Kirche, so daß Ungetaufte oder Kinder, die vor der Taufe sterben, nicht berücksichtigt werden. In Frankreich wurden zur Erstellung von Statistiken sogar Dokumente mit erfundenen Daten verwendet.

•
•
•

§19. Um die Formeln des §8 auf Belgien anzuwenden, haben wir

$$p_0 = 3.627253,$$
$$p_1 = 4.247113,$$
$$p_2 = 4.800861,$$
$$u = p_1 - p_0 = 0.619860,$$
$$v = p_2 - p_1 = 0.553748,$$
$$w = \frac{uv}{p_1} = 0.080876$$

gesetzt, was uns

$$\frac{m}{n} = 6.5837$$

liefert, und unter Berücksichtigung von $t_1 = 1.5$

$$m = 0.113785$$
$$i = 0.78060.$$

Also sind die Formeln für die Bevölkerung von Belgien

$$\log z = 0.113785(t + 0.78060)$$
$$p = 6.5837 \frac{z}{1+z} \qquad (12)$$

Diese numerischen Ergebnisse lehren uns, daß wenn die Gesetze und Sitten von Belgien nicht irgendeine bemerkenswerte Änderung durchmachen, *die Bevölkerung dieses Königreichs, ungeachtet des heutigen Wachstums, sich niemals auf sechs Millionen sechshundert Tausend Einwohner belaufen wird*. Unter der gleichen Annahme angewendet auf die Vergangenheit, *ist es seit den ersten Monaten des Jahres 1807, daß diese Bevölkerung begonnen hat, in einer weniger schnellen Progression als die arithmetische Progression zu wachsen*. Was den Zeitpunkt betrifft, zu dem sie aufgehört hat in geometrischer Progression zu wachsen, ist es unmöglich ihn zu bestimmen, da man nun einmal die Normalbevölkerung nicht kennt und da der Koeffizient der dem Volk von Belgien eigenen Fruchtbarkeit uns ebenfalls unbekannt ist.

Wenn man $t = 3.6$ setzt, dann ergibt die Gleichung (12) als Zahl der Bevölkerung am 1. Januar 1851

$$p = 4.9976\,;$$

und da nach den Berechnungen von Herrn Quetelet diese Zahl 4.6504 am 1. Januar 1841 betrug, *muß die Bevölkerung während des Zeitraums* 1841-1850 *um* 347,200 *Einwohner wachsen.* Nun ergibt aber die weiter oben angegebene allgemeine Übersicht über die Geburten und Todesfälle für das Wachstum der Bevölkerung während des vorangehenden Zeitraums (1831-1840) die Zahl 365,231: wenn man nun diese letzte mit der Zahl 397,602 vergleicht, die zum Zeitraum 1815-1824 gehört, dann wird die fortschreitende Abnahme des Wachstums in jeweils zehn Jahren offensichtlich.

Wenn man schließlich wissen möchte, welche Zahl von unserer Formel für die Bevölkerung Belgiens zum Ende des XIX. Jahrhunderts bestimmt wird, dann reicht es, $t = 8.6$ zu setzen, und man wird als Antwort 6.0643 finden, d.h. *etwas mehr als sechs Millionen Einwohner*.

§ 20. BEVÖLKERUNGSGESETZ VON FRANKREICH. Die *Annuaire du bureau des longitudes*[V] für 1844 bietet einen Überblick über die Bevölkerungsbewegungen in Frankreich während des Zeitraums 1817-1841. Daraus haben wir folgende Tabelle abgeleitet:

[V] „longitude“ = geographische Länge

Jahr	Zunahme der Bevölkerung	Jahr	Zunahme der Bevölkerung	Jahr	Zunahme der Bevölkerung
1817	195902	1822	198634	1827	189071
1818	161948	1823	221286	1828	139402
1819	199863	1824	220546	1829	161074
1820	188227	1825	175974	1830	157994
1821	212144	1826	157533	1831	183948
Summe . . .	958084	Summe . . .	973973	Summe . . .	931489

Jahr	Zunahme der Bevölkerung	Jahr	Zunahme der Bevölkerung
1832	4453	1837	64648
1833	157435	1838	115277
1834	68662	1839	177140
1835	177420	1840	135832
1836	208120	1841	172167
Summe . . .	616090	Summe . . .	665064

Vor Nutzung dieser Zahlen für die Bestimmung des Bevölkerungsgesetzes muß der Einfluß der Cholera berücksichtigt werden. Die durch diese Geißel hervorgerufene Störung war in Frankreich sehr viel stärker als in Belgien. Damit sie so wenig wie möglich die Elemente der Kurve, die wir berechnen werden, beeinflußt, ersetzen wir die Zahl 4,453 – Überschuß der Geburten über die Todesfälle von 1832 – durch die Zahl 170,691, dem Mittelwert derjenigen der Jahre 1831 und 1833. Dadurch wird die Summe 616,090 des Zeitraumes 1832-1836 durch 782,328 ersetzt.

Genauso wie in Belgien sind die Totgeborenen vor 1839 in den Todesfällen enthalten ohne es bei den Geburten zu sein. Das Jahrbuch des Bureau des Longitudes lehrt uns, daß es davon soviele gab:

In 1839	. . . .	27,490 Totgeborene
1840	. . . .	29,278
1841	. . . .	28,274

Da die letzte Zahl nur wenig verschieden ist vom Mittelwert der beiden anderen, fügen wir ihr Doppeltes der Zunahme der Bevölkerung während des letzten Fünfjahreszeitraumes und ihr Fünffaches der Zunahme während jeden der vier anderen Zeiträume hinzu. Diese Korrektur erscheint uns ausreichend, da die Zahl der Todesfälle zwischen 1817 und 1841 kaum variiert[1]. Wir denken darüber hinaus, daß eine zu große Genauigkeit illusorisch wäre angesichts der Unwissenheit, wo man korrekte Zahlen der Bevölkerung Frankreichs findet, für die wir gezwungen sind, diejenigen der letzten Volkszählung zu nehmen.

Aufgrund dieser Bemerkungen nehmen wir die folgenden Größen für das Bevölkerungswachstum in jeweils fünf Jahren an:

[1] Hat die in §16 erwähnte Doppeltzählung bei der Angabe der Todesfälle in Frankreich nicht stattgefunden wie früher in Belgien?

1817-1821	1822-1826	1827-1831	1832-1836	1837-1841
1,099,454	1,115,343	1,072,859	923,698	721,612

und zur Vereinfachung runden wir diese Werte und ersetzen sie durch folgende:

1,099,000, 1,115,000, 1,073,000, 924,000, 722,000.

Die Volkszählung von 1841 hat als Größe der Bevölkerung 34,230,000 Einwohner ergeben. Wir fügen dem 172,000 hinzu für das Bevölkerungswachstum in 1841; das ergibt für die Bevölkerung Frankreichs 34,402,000 Einwohner am 1. Januar 1842. Ausgehend davon haben wir die folgende Tabelle erstellt

Jahre	**Bevölkerung**
1817	29,469,000
	1,099,000
1822	30,568,000
	1,115,000
1827	31,683,000
	1,073,000
1832	32,756,000
	924,000
1837	33,680,000
	722,000
1842	34,402,000

§21. Wir merken zuerst an, daß das Bevölkerungswachstum von 1817 bis 1822 noch schwächer ist, als es aufgrund der folgenden Zeiträume sein müßte; aber wir werden bald sehen, daß diese Unregelmäßigkeit nicht auftritt, wenn wir die Werte auf eine andere Art anordnen.

Wenn wir eine logistische Kurve durch die Punkte 1822, 1827, 1832 [1]; eine zweite durch 1827, 1832, 1837 und eine dritte durch 1832, 1837, 1842 legen; ergibt die erste für die Größe der Maximalbevölkerung

$$\frac{m}{n} = 46.711;$$

die zweite

$$\frac{m}{n} = 38.271;$$

die dritte

$$\frac{m}{n} = 36.746.$$

[1] Wir glauben diese Art der Abkürzung anwenden zu können zur Bezeichnung der Punkte der Kurve durch die Jahre, die ihnen entsprechen.

Nun unterscheiden sich diese Werte aber zu sehr voneinander, um sie als zur selben logistischen Kurve gehörend betrachten zu können. Man muß daher suchen, ob eine andere Art die Größen anzuordnen zu besser übereinstimmenden Ergebnissen führt.

Unter Durchführung derselben Korrekturen bezüglich der Cholera und der Totgeborenen wie zuvor kann man den Zeitraum 1818-1841 wie folgt in vier Gruppen zu sechs Jahren aufteilen:

Jahre	**Zunahme der Bevölkerung**	**Jahre**	**Zunahme der Bevölkerung**	**Jahre**	**Zunahme der Bevölkerung**	**Jahre**	**Zunahme der Bevölkerung**
1818	161948	1824	220546	1830	157944	1836	208120
1819	199863	1825	175974	1831	183948	1837	64648
1820	188227	1826	157533	1832	170691	1838	115277
1821	212144	1827	189071	1833	157435	1839	177140
1822	198634	1828	139402	1834	68662	1840	135832
1823	221286	1829	161074	1835	177420	1841	172167
Totgeb.	169644	Totgeb.	169644	Totgeb.	169644	Totgeb.	84822
Summe	1351746	Summe	1213244	Summe	1085744	Summe	958006

woraus man folgert

Jahre	**Bevölkerung**
1818	29,793,000
	1,352,000
1824	31,145,000
	1,213,000
1830	32,358,000
	1,086,000
1836	33,444,000
	958,000
1842	34,402,000

Unter Benutzung dieser Daten zur Bestimmung der drei neuen logistischen Kurven, die jeweils durch die Punkte 1818, 1824, 1830; 1824, 1830, 1836; 1830, 1836, 1842 gehen, findet man als Bestandteile der ersten

$$\frac{m}{n} = 39.311\,, \quad m = 0.143\,, \quad i = 3.465$$

als Bestandteile der zweiten

$$\frac{m}{n} = 39.763\,, \quad m = 0.136\,, \quad i = 3.509$$

und als Bestandteile der dritten

$$\frac{m}{n} = 39.982\,, \quad m = 0.138\,, \quad i = 3.338$$

Die Übereinstimmung dieser Werte erlaubt es, ihre Mittelwerte zu nehmen, die

$$\frac{m}{n} = 39.685\,, \quad m = 0.139\,, \quad i = 3.437$$

sind. Folglich wird das Bevölkerungsgesetz für Frankreich durch die Gleichung

$$0.139(t + 3.437) = \log\left(\frac{p}{39.685 - p}\right)$$

beschrieben.

Man gelangt zu fast demselben Ergebnis, wenn man nur eine einzige logistische Kurve durch die Punkte 1818, 1830 und 1842 berechnet. Die Bestandteile dieser Kurve sind

$$\frac{m}{n} = 40.035\,, \quad m = 0.134\,, \quad i = 3.455$$

Wenn man diese benutzt, um die Bevölkerung von 1824 und diejenige von 1836 zu berechnen, dann findet man für die erste 31.142 anstelle des durch Beobachtung gegebenen Wertes 31.145, wohingegen der Wert für die zweite vollkommen exakt ist. Man kann also, wenn man es möchte, die letztere Kurve anstelle der mittleren logistischen Kurve setzen, ihre Unterschiede sind von kleinerer Ordnung als die Fehler, die die Beobachtungen aufweisen: man findet, für jetzt, daß die Bevölkerung Frankreichs 1848 35,242,000 Einwohner betragen muß, in 1854 35,970,000 und in 1860 36,684,000. Was die *Maximal*bevölkerung betrifft haben wir gesehen, daß sie ungefähr *vierzig Millionen* Einwohner beträgt.

§22. Wenn man das Elend bedenkt, das die Überschwenglichkeit des heutigen Bevölkerungswachstums notwendigerweise herbeiführen muß, und die sich heutzutage zeigende Unzulänglichkeit, der in der modernen Zeit versuchten Mittel, um es zu verhindern, dann kann man sich nicht davon enthalten, betroffen zu sein von diesem Gedankengang Aristoteles anläßlich der *Rebublik* von Platon: „ Vielleicht wäre es eine gute Politik, die Zahl der Kinder eher als die des Besitzes festzulegen und Geburten aufgrund von Berechnungen über die Unfruchtbarkeit oder die Zahl der Toten zu erlauben oder zu beschränken. Es ist die Unvorsichtigkeit der Regierungen gegenüber einem überaus wichtigen Punkt, die heute unsere Städte mit soviel Elend bevölkert; daher soviele Aufstände und Verbrechen, deren Mutter die Armut ist[1].“ Es muß so sein, daß die Übel, die er erörtert, sehr schmerzlich empfunden wurden von den Alten, damit einer ihrer berühmtesten Moralisten[2] gewagt hat, die Armen zu loben für das Aussetzen oder Umbringen ihrer Kinder in der Furcht sie zur Bedürftigkeit und Unterwürfigkeit zu erziehen: „denn, sagt er, sie können den Gedanken nicht ertragen, ihnen als Erbe die Armut zu hinterlassen, die sie als die größte aller Übel, als eine schwere und grausame Krankheit, betrachten.“

Schlußfolgerungen

§23. Das Bevölkerungsgesetz ist uns unbekannt, denn man kennt nicht die Natur der Funktion, die als Maß für die Hindernisse, sowohl vorbeugende als auch zerstörende, dient, die sich dem unbeschränkten Wachstum der menschlichen Rasse entgegenstellen.

Wenn man jedoch annimmt, daß diese Hindernisse *genau in demselben Verhältnis* zunehmen wie die überzählige Bevölkerung, erhält man die vollständige Lösung des Problems vom mathematischen Standpunkt aus.

---

[1] *Politik*, Buch II, Kapitel 4 (richtig: Kapitel 6, Anm. d. Übers.)

[2] Plutarch, *De amore prolis*, V

Man findet dann unter Benutzung von durch die belgische und französische Regierung veröffentlichten statistischen Dokumenten, daß die äußerste Grenze der Bevölkerung *vierzig Millionen* Einwohner für Frankreich und *sechs Millionen sechshundert Tausend* für Belgien ist.

Eine lange Reihe von Beobachtungen, ununterbrochen durch bedeutende soziale Katastrophen oder Weltrevolutionen wird wahrscheinlich die rückstellende Funktion, die eben erwähnt wurde, aufdecken.