Hans Niels JAHNKE, Bielefeld

Zur geometrischen Deutung der quadratischen Gleichung

1. Algebra-Arithmetik-Geometrie

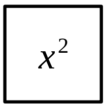
Der folgende Beitrag diskutiert die Möglichkeit, quadratische Gleichungen als Flächen darzustellen und sie durch geometrische Umformungen zu lösen. Diese Deutung ist didaktisch sinnvoll, wenn man sie als Teil einer Leitlinie „Algebraische Terme und Geometrie“ sieht, die den Unterricht von der Grundschule bis zur Oberstufe durchziehen könnte.

Die Flächendeutung der quadratischen Gleichung(en) hat geschichtliche und aktuelle Bedeutung. Babylonier, Araber und Griechen waren in der Lage, quadratische Gleichungen zu lösen, ohne über unsere heutige algebraische Symbolsprache zu verfügen. Für den Unterricht kann es durchaus attraktiv sein, in einem gewissen Umfang auf solche historischen Methoden einzugehen. Neben der geometrischen Veranschaulichung bieten sie die Möglichkeit, eine der größten Umwälzungen in der Geschichte der Mathematik, die Herausbildung der symbolischen Algebra, konkret und zwanglos zu thematisieren ([1, 2]). In den Augen der Öffentlichkeit und auch der Schüler ist der Symbolismus das entscheidende Charakteristikum der Mathematik. Dies sollte in einem allgemeinbildenden Unterricht nicht unerörtert bleiben.

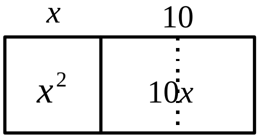
Im heutigen Unterricht wird die Algebra nahezu ausschließlich im Zusammenhang mit der Arithmetik gesehen. Diese Sichtweise wird durch den Einsatz von Computern noch verstärkt. Formeln sind danach einfach Vorschriften, mit deren Hilfe aus gegebenen Zahlen andere berechnet werden. So berechtigt diese Auffassung sein mag, so sehr führt sie potentiell zum Verlust von „strukturellen“ Informationen, die in Formeln enthalten sind. Diese lassen sich zurückgewinnen, wenn man den Zusammenhang von Algebra und Geometrie stärker in den Blick nimmt. In den 80er Jahren hat Freudenthal sich verschiedentlich dafür eingesetzt, im Algebra-Unterricht die geometrischen Bezüge herauszuarbeiten und zu stärken (vgl. etwa [3]). Dem fühlt sich der vorliegende Beitrag verpflichtet.

2. Geometrische Deutungen

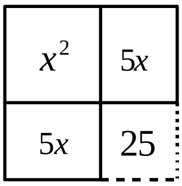
Im wesentlichen gibt es zwei Möglichkeiten zur geometrischen Deutung der quadratischen Gleichung. Die eine stellt den Zusammenhang zur Parabel her und betrachtet quadratische Gleichungen als Nullstellen quadratischer Funktionen. Damit ist eine Beziehung zur Leitlinie „Funktionsbegriff“ hergestellt. Diese Deutung ist verallgemeinerbar und mathematisch weiterführend ([4], 231 ff).



Davon verschieden ist eine Auffassung, bei der Produkte linearer Größen als von ihnen erzeugte Rechtecksflächen betrachtet werden. Die rein quadratische Gleichung $x^2 = 9$ wird dann durch eine Quadratfläche repräsentiert. Die Gleichung besagt, daß das Quadrat (Q) die beiden Größen 9 und x^2 repräsentiert, woraus unmittelbar $x = 3$ folgt.



Entsprechend führt die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + 10x = 39$ zunächst auf ein Rechteck, das einerseits gleich $x^2 + 10x$, andererseits gleich 39 ist. Halbiert man das Teilrechteck $10x$, und fügt einen der Teile $5x$ an eine andere Seite des Quadrats x^2 an, erhält man einen flächengleichen ‘Winkelhaken’, der bei den Griechen als Gnomon bezeichnet wurde. Offensichtlich kann dieser Winkelhaken durch ein Quadrat der Fläche $5 \cdot 5 = 25$ zu einem Quadrat (Q) ergänzt werden, so daß $Q = (x+5)^2$ und zugleich $Q = 39 + 25 = 64$. Mithin ist $x + 5 = 8$, also $x = 3$.

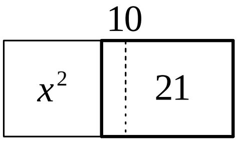


Dieser geometrische Lösungsprozeß beinhaltet eine schöne Deutung des Begriffs „quadratische Ergänzung“: eine gewisse Figur wird durch ein Quadrat zu einem Quadrat ergänzt. Natürlich erhält man auf diesem Wege keine negativen Lösungen und es gibt keinen einheitlichen Lösungsweg. Statt dessen muß man drei (im Grunde sogar vier) wesentlich verschiedene Fälle gemischt-quadratischer Gleichungen unterscheiden, deren Lösungen zum Teil etwas trickreich sind.

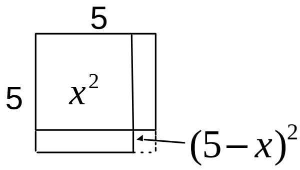
Es ist lehrreich, sich einen Überblick über diese verschiedenen Gleichungstypen zu verschaffen. Entsprechend unserer geometrischen Sichtweise und der historischen Entwicklung bedeuten in der Tabelle p und q positive Größen, und wir fragen nur nach positiven Lösungen.

$x^2 + px = q$	$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$	es gibt immer genau eine positive Lösung (die negative Wurzel würde zu einer negativen Lösung führen)
$x^2 = px + q$	$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$	es gibt immer genau eine positive Lösung (die negative Wurzel würde zu einer negativen Lösung führen)
$x^2 + q = px$	$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	es gibt nur Lösungen, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 \ge q$; dann sogar zwei positive Lösungen

Betrachtet man also die quadratischen Gleichungen durch die Brille positiver Größen, dann wird es verständlich, warum das Auftreten von zwei Lösungen historisch lange Zeit als Randphänomen angesehen wurde.



Zur Veranschaulichung der wachsenden geometrischen Schwierigkeiten betrachten wir noch den nächst einfachen Fall der Gleichung $x^2+21=10x$, und zwar die Lösung mit $x<\frac{p}{2}$. Hier wird man auf ein Rechteck geführt, das einerseits gleich x^2+21, andererseits gleich $10x$ ist. Abtrennen der Fläche $5x$ vom fett umrandeten Rechteck 21 und Wiederansetzen ergibt einen Winkelhaken, der durch das Quadrat $(5-x)^2$ zu einem Quadrat (Q) ergänzt wird. Es ist $Q=21+(5-x)^2$ und zugleich $Q=25$, folglich $(5-x)^2=4$ und $x=3$.



Historisch bedeutete es eine große Rationalisierung, als im 16. Jahrhundert unter Benutzung negativer Zahlen eine einheitliche Lösungsformel aufgestellt werden konnte. Letztlich zeigt dies, daß die Algebra der entscheidende Grund für das Rechnen mit negativen Zahlen gewesen ist.

3. Algebraische Terme und Geometrie

Derartige geometrische Lösungsverfahren sollten nur als Vertiefung und ohne Anspruch auf Vollständigkeit behandelt werden. Sie machen auch nur dann Sinn, wenn sie als ein Element im Rahmen einer umfassenden Leitlinie „Algebraische Terme und Geometrie“ gesehen werden. In der Grundschule haben figurativ-geometrische Darstelllungen von Zahlen und Zahlbeziehungen durch Cuisenaire-Stäbe, am Hunderterfeld usw. eine lange Tradition. Dies wird seit einigen Jahren wieder verstärkt kultiviert ([5]). Üblich sind auch Flächendarstellungen der binomischen Formeln in der SI. Jedoch sollten solche Darstellungen nicht nur als nachträgliche „Veranschaulichungen“ benutzt werden, sondern durch geometrische Umformungen von Flächen und Körpern kann man auch direkt neue Formeln gewinnen.

Der Zusammenhang von geometrischer Dimension und algebraischem Grad eines Terms ist hierbei speziell wichtig. Die Dimension eines Terms sollte über die Geometrie eine quasi-ontologische Qualität erhalten, quasi-ontologisch: weil es nur für die ersten drei Dimensionen funktioniert. Identifikation der Terme gleicher Dimension bedeutet, sich zu frgaen, aus welchen *Bausteinen* eine Formel besteht. Bei Schülerfehlern der Art: $3x+4=7x$ ist die Probe durch Einsetzen von Zahlen nur begrenzt überzeugend. Vielmehr muß klar werden, daß hier ein anderer Typus von Größen addiert wurde.

Auch unter Anwendungsgesichtspunkten ist eine stärkere Berücksichtigung der Dimensionen von Formeln essentiell. Physiker überprüfen die Dimensionen ihrer Gleichungen und Ähnliches sollte auch im Mathematikunterricht kultiviert werden: „bei diesem Problem geht es um die Berechnung einer Oberfläche, also muß ich auf eine Formel 2. Grades kommen“, „war es zu erwarten, daß diese Aufgabe auf eine quadratische Gleichung führt?“ (vgl. [6]), „hier geht es um ein Volumen, also 3. Grad“, „hier muß ich mich verrechnet haben, denn es können eigentlich nur Terme 2. Grades vorkommen“, „$U_{Kreis} = 2r\pi$: natürlich, denn es handelt sich um eine Länge“. In diesem Sinne kann man in einer Stunde auch einmal die Formeln der Formelsammlung durchgehen.

Offensichtlich können Dimensionsbetrachtungen nicht immer mechanisch erledigt werden. Ist z. B. in einer Aufgabe eine Kante eines Volumens als Zahl gegeben, erhält man algebraisch nur eine Formel 2. Grades. Aber natürlich ist es lehrreich, das zu reflektieren.

Dimensionsbetrachtungen sollten den ganzen Unterricht durchziehen. Sie spielen selbstverständlich auch in der Oberstufe noch eine Rolle. Herausragende Beispiele sind die Formeln für die Potenzsummen und die Überlegung, warum das Ableiten von x^n den Grad um 1 erniedrigt.

Literatur

1. Jahnke, H. N., *Mathematik historisch verstehen - oder: Haben die alten Griechen quadratische Gleichungen gelöst?* mathematik lehren, 1991(47 (August-Heft)), 6-12.
2. Jahnke, H. N., Al-Khwarizmi und Cantor in der Lehrerbildung, In *Mathematik allgemeinbildend unterrichten: Impulse für Lehrerbildung und Schule*, R. Biehler, Heymann, H.-W. & Winkelmann, B., Hrsg. 1995, Aulis: Köln, 114-136.
3. Freudenthal, H., Variables and Functions, In *Conference on functions, part 1*, G.v. Barneveld and H. Krabbendam, Hrsg. 1982, National Institute for Curriculum Development: Enschede, 7-20.
4. Vollrath, H.-J., *Algebra in der Sekundarstufe*. 1994, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich: BI-Wissenschaftsverlag.
5. Müller, G. N. and E.C. Wittmann, *Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd. 1 und 2*. 1990, Stuttgart: Klett.
6. Hefendehl-Hebeker, L., *Mathematik lernen für die Schule?* Mathematische Semesterberichte, 1995. **42**, 33-52.