Hermann Maier/Heinz Steinbring

Begriffsbildung im alltäglichen Mathematikunterricht – Darstellung und Vergleich zweier Theorieansätze zur Analyse von Verstehensprozessen

Zusammenfassung

Wie kosntruieren Schüler im Rahmen der alltäglichen unterrichtlichen Interaktion Kenntnisse und wie verstehen sie dort Mathematik? Diebeiden Autoren entwickeln die unterschiedlichen theoretischen Konzepte, auf die sie ihre empirischen Untersuchungen zu dieser Frage gründen. Sie analysieren die gleiche Unterrichtsepisode zur Einführung in den Bruchbegriff und vergleichen anschließend ihre Analyseergebnisse aus einer theoretischen Perspektive.

Abstract

How do pupils really construct mathematical knowledge, and how do they really understand in every day classroom interaction? The two authors lay out the different theoretical framework on which they use to base their empirical research into this question. They both analyse the same episode of interaction within a classroom dealing with an introduction into the fraction concept. Afterwards they compare the results of their analysis from a theoretical perspective.

1. Vorbemerkung

Wie werden im alltäglichen Mathematikunterricht Bedeutungen mathematischen Wissens konstituiert? Dies ist die zentrale Fragestellung, an der die beiden Verfasser dieses Beitrags seit mehreren Jahren arbeiten. Dabei folgen sie gemeinsam dem interpretativen Forschungsparadigma und der Methode qualitativer Inhaltsanalysen. Sie interpretiert auf Video aufgezeichnete und anschließend transkribierte Ausschnitte der Unterrichtskommunikation extensiv, d. h. sie deuten in Analysegruppen von zwei bis vier Personen die Sprachbeiträge von Lehrer und Schülern Sinneinheit für Sinneinheit mit Blick auf die oben gestellte Frage. Gleichwohl unterscheiden sich diese Analysen hinsichtlich des ihnen zugrunde gelegten Theorierahmens. Dies hat bei den Autoren das Interesse geweckt, einmal gleiche Unterrichtsausschnitte getrennt zu analysieren und anschließend ihre Ergebnisse miteinander zu vergleichen. Sie taten das insbesondere am Beispiel eines Unterrichtsausschnitts zur Einführung der Schüler in den Bruchbegriff in einer fünften bayerischen Hauptschulklasse. Genau handelte es sich um den Anfang der zweiten Lehreinheit aus der entsprechenden Unterrichtssequenz.
Der Vergleich erschien uns so interessant, daß wir ihn nachfolgend vorstellen möchten. Zunächst wird der erwähnte Unterrichtsausschnitt, bei dem es thematisch um einen Begriffsaufbau geht, auf der Grundlage einer ersten rohen Analyse strukturiert (2). Dann präsentieren wir nacheinander ausführlich die beiden Theorieansätze und die zugehörigen Analyseergebnisse (3 und 4). Schließlich werden die beiden Ansätze miteinander verglichen und auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede hin diskutiert (5).

(JMD 19 (98) 4, S. 292–329)

2. Strukturierung der Episode und kurze Charakterisierung der Phasen

Die interpretierte Unterrichtsepisode (siehe Anhang) hat die "Einführung in die Brüche" zum Thema (in einer 5. Klasse, Hauptschule). Vorausgehend hatten die Schüler möglichst viele Wörter, die zur Wortfamilie "brechen" gehören, gesucht. Dabei wurden neben alltagssprachlichen Beschreibungen (Wolkenbruch, einbrechen, ausbrechen, abbrechen, zusammenbrechen, erbrechen, aufbrechen, Bruchbude, Brüche, bruchstückweise, Bruchteil, Vulkanausbruch, Knöchelbruch, Bruchlandung, Gesetzesbruch), auch schon erste "mathematische" Deutungen in dieser Wortfamilie besprochen. Auf die Frage des Lehrers hin, "was soll in Mathematik eine Wortfamilie brechen", gaben die Schüler weitere Beispiele: "mit Brüchen rechnen", "Bruch", "ein Viertel oder so etwas, das ist ein Bruch, eine Viertel Stunde zum Beispiel – und dann ein Halb. Alles was mit Bruch und so" (Jö), ein "Viertel Liter Wasser", "drei Viertel Liter Wasser" (Jü). Hier beginnt die vorliegende Episode.
Die folgende Strukturierung der Unterrichtsepisode in Phasen und Unterphasen, stützt sich darauf, wie einzelne Gesprächsabschnitte mit Fragen, Problemen oder Aufträgen eröffnet, und dann durch Bemerkungen des Lehrers abgeschlossen oder abgebrochen (unterbrochen) werden, weil die eingangs gestellte Frage beantwortet wurde bzw. der Lehrer signalisiert, daß diese Frage zunächst anhand einer Teilfrage weiter bearbeitet werden soll. Die Stabilität solcher Strukturierungen von Unterrichtsgesprächen ist immer wieder beobachtet worden (s. MEHAN 1979, SINCLAIR & COULTHARD 1975). Diese Einteilung in einzelne Phasen mit ihren inhaltlichen Themen wird zusammenfassend dargestellt, und es werden die vorhandenen Inhalte auf der Basis eines groben Vorverständnisses charakterisiert.

Phase 1	(161-182)	Von "brechen" zu "Bruchteilen"
Phase 1.1	(161-165)	Nicht das Ganze, sondern ein kleiner (großer) Teil davon

Vor dem Hintergrund der Hausaufgabe, viele Wörter zur Wortfamilie "brechen" zu suchen, wird der Begriff "Bruchteil" bezogen auf die Realität und die Erfahrungen der Kinder nach Art einer Anfangsdefinition so beschrieben: "Bruchteile sind nicht das Ganze, sondern nur ein Teil davon." Interessant ist die vom Schüler Ma gegebene Definition: "Wenn es nicht das Ganze ist, sondern nur ein kleiner Teil davon . oder auch ein großer Teil davon."

Phase 1.2	(165-170)	1. Beispiel: Zwei Papierkreise

An zwei Papierkreisen versucht Ma nun beispielhaft diese Deutung von Bruchteil zu belegen. Zusammen mit dem Lehrer formuliert er: "Nicht das Ganze, sondern nur ein Teil davon .... ist ein Bruchteil."

Phase 1.3.1	(170-173)	2. Beispiel: Bruchteile (-stücke) eines Blumentopfes

An dem Beispiel eines Bruchstücks von einem Blumentopf wird noch einmal Bruchteil als ein Teil von einem ganzen (Blumentopf) interpretiert.

Phase 1.3.2	(174-182)	2. Beispiel: Ist ein Teil von vier Teilen eines Blumen topfes ein Viertel?

Mit der Lehrerfrage "Wie viele sind es?" erhält die Lösungssuche eine stärker mathematische Orientierung. Schnell ist klar, daß es vier Bruchteile sind; Ma 'wiederholt' die Definition von Bruchteil und stellt durch sein Zeigen einer kreisförmigen Bewegung einen Zusammenhang des Ganzen mit dem Kreis her. Jö behauptet angesichts der vier Bruchteile die: "Das ist ein Viertel, von einem. Ganzen." Nun stellt der Lehrer eine Gegenfrage, die parallel von Jö und von Ma kommentiert wird. Lehrer: "Wenn du das durch vier teilst, könnte man sagen, das sind in vier Bruchteile?" Jö bestätigt: "Vier Teile, ja." Ma widerspricht mit dem Argument: "Nein, weil, das ist schon mehr .. Bestimmt." Damit schließt die erste Phase.

Phase 2	(183-194)	Aufgabe zur Bearbeitung in Einzel- oder Partnerarbeit: Ein Viertel eines Papierkreises schraffieren.

Lehrer: "Jetzt wollen wir schauen, das Problem heute zu lösen. Was sind eigentlich Bruchteile. Jetzt pass' auf. Jetzt nimmst deinen Kreis .. Ja, nimmst einen Kreis . Deine Aufgabe: <u>Schraffiere</u> . mit Bleistift meinetwegen . <u>ein Viertel</u> des Kreises .. Schraffiere ein <u>Viertel</u> des Kreises."

In Einzel- oder auch in Partnerarbeit sollen alle Schüler diese Aufgabe bearbeiten. Nach ca. drei bis vier Minuten unterbricht der Lehrer. Das Gespräch geht in die Phase der Auswertung über.

Phase 3	(195-224)	Auswertung der Einzel- und Partnerarbeit: Sind tatsächlich "Viertel" schraffiert worden?
Phase 3.1	(195-201)	Die Zeichnungen werden den Mitschülern gezeigt

Die Schüler, die in der Türreihe, "Mittel-" und in der "Fensterreihe" sitzen, halten nacheinander ihre Zeichnungen hoch, damit ihre Mitschülerinnen sie sehen können. Die Frage: "So. Was ist dir aufgefallen? ...Waren es Viertel? . Waren es keine Viertel?" führt in die nächste Unterphase.

Phase 3.2	(201-211)	Problem: Was heißt "genau" zeichnen?

Ma verneint, daß es Viertel waren. Ac gibt eine vorsichtige, relativierende Einschätzung: "Ja, es könnten vielleicht Viertel gewesen sein, aber die sind vielleicht nicht so genau gewesen . wenn man irgendwie so gezeichnet hat . Ich habs so gefaltet und dann." Er vergleicht die erstellten Viertel mit seinem eigenen Verfahren des Faltens; doch der Lehrer nimmt aus der recht umfassenden Anmerkung von Achim nur ein Stichwort heraus: "Du/ Du hast gesagt '<u>genau</u>'. Was verstehst du unter 'genau'"? Da er keine Antwort erhält, bemerkt er: "Viertel, Viertel. Einige haben gesagt, das sind auch Viertel da. Ja, die haben gesagt, das sind Viertel." Nach dieser Gegenüberstellung von "genau" mit der Behauptung von einigen Schülern: "das sind auch Viertel" interpretiert nun Ac, die Eigenschaft des "genau" ganz strikt: "Ja eigentlich nicht, weil die sind verschieden groß ((zeigt nach vorne))". Mit der folgenden Bemerkung bestätigt der Lehrer diese Aussage, und er gibt damit der Interpretation der Eigenschaft "genau" indirekt die von ihm intendierte Bedeutung: "Na bitte, was sagt's ihr darauf? ..Seine Meinung war, es war nicht so genau."

Der Lehrer zeigt nun eine von ihm erstellte Zeichnung (in der wohl recht eindeutig die vier Unterteilungen (oder nur ein einziges Viertel?) des Papierkreises keine Viertel darstellen, während bei den Schülerinnen in den Zeichnungen vor allem vielleicht nur Zeichenungenauigkeiten oder mangelnde Präzision einen falschen Eindruck. Der Lehrer sagt: "Ich habe da auch eine gemacht."

Phase 3.3	(211-218)	Beispiel des Lehrers: Verschieden große Viertel in einem Kreis (und Wasser in vier gleiche Mengen aufteilen)

Mt wirft sofort ein: "Die müssen ja gleich groß sein." und der Lehrer erwidert: "Das ist aber auch irgendein Viertel, vielleicht, was weiß ich?" Ac, Ma und Mt widersprechen, bis Mt ein allgemeines Argument formuliert: "wenn man jetzt . sagen wir einmal von einem Kreis ein Viertel nimmt, dann müssen die anderen . genau so groß sein wieder ... weil sonst (...)." Der Lehrer erinnert an einen Versuch mit dem Wasser und bestätigt die Aussage von Mt: "Da haben wir auch versucht, gleich viel in jedes Glas reinzugeben. Die Idee ...... ist gut gewesen, nicht?" Abschließend soll Mt noch einmal wiederholen.

Phase 3.4	(219-223)	Resümee: Alle Viertel müssen gleich groß sein

Mt argumentiert: "Wenn man jetzt ein Viertel äh, von dem Kreis einzeichnet, dann müssen die anderen drei Viertel genau so groß sein wie das eine ."Der Lehrer wirft präzisierend ein: "Alle Viertel müssen gleich" – Mt: "gleich groß sein" – L: "groß sein .. Ja." An dem Beispiel von Vierteln ist die Aussage getroffen worden: "Mathematische" Bruchteile sind genau gleich große Teile von einem Ganzen. Dies bestätigt der Lehrer mit Berufung auf "die Mathematiker": "Die Mathematiker geben sich nicht zufrieden, einfach irgendwie wie so Blumentopfscherben." Und ein Schüler hält zu Ende die zentrale Eigenschaft fest: "((leise:)) gleich groß."

3. Wissenskonstruktion als individueller Verstehensprozeß

MAIER betrachtet die Konstitution bedeutungshaltigen Wissens im Unterricht als Konsequenz von Verstehensprozessen einzelner Schüler. Eine Erläuterung dieses an individueller Bedeutungskonstruktion interessierten Theorieansatzes, der im Rahmen des Projekts "Verstehen von Lehrerinstruktionen und -erklärungen durch Schüler im Mathematikunterricht" (VIMU) entwickelt wurde, verlangt zum einen eine Antwort auf die Frage, wie hier Verstehen definiert sein soll, zum anderen eine Erläuterung der Gesichtspunkte, nach denen entsprechende Verstehensprozesse beschrieben und evaluiert werden. Die auf den oben vorgestellten Unterrichtsausschnitt bezogenen Analyseergebnisse dienen der Illustration dieser Erläuterung.

3.1 Formale Charakterisierung von Verstehen

Was soll also mit 'Verstehen' gemeint sein? MAIER (1988) expliziert, bezogen auf mathematisches Wissen (Begriffe, Sätze, Verfahren), einen Verstehensbegriff mit folgenden Merkmalen:

– *Verstehen, ein initiierter und intentionaler geistiger Prozeß*

Zum ersten wird Verstehen als eine durch Wahrnehmung von – vor allem sprachlicher – Äußerungen angestoßene geistige Aktivität aufgefaßt. Sie geschieht nicht nur aufgrund äußerer Anlässe und Gelegenheiten, sondern auch aufgrund interner Antriebe, für die das Bedürfniskonzept von MASLOW (1977) Erklärungshilfen bietet. Neben Bedürfnissen können allerdings, besonderes bei Schülern, auch Pflichten bzw. Verpflichtungen wichtige Aktivierungsimpulse für Verstehensprozesse sein. Der Verstehende versucht, seinen Wahrnehmungen Sinn, und das heißt hier Sinn für sich selbst zu geben. Der Verstehensprozeß wird damit zu einem zielgerichteten, orientierten Handeln (siehe WITTGENSTEIN 1953, CHOMSKY 1965, WESSELS 1990 und SIERPINSKA 1994).

– *Verstehen, ein Prozeß individueller Sinn- und Wissenskonstruktion*
Verstehen wird aufgefaßt als geistiger Prozeß, in dem der Verstehende das Wissen, das er aufgrund äußerer Anstöße generiert, autonom und in individueller Weise konstruiert. Es ist davon auszugehen, daß für die Rezipienten die in Sprache formulierten Wörter und Sätze bzw. die ihnen zugrunde liegenden Bedeutungen nicht etwa vorgegebene mehr oder minder festgelegte Größen sind, die in einem interindividuellen Interaktionsprozeß 'übermittelt' werden könnten. Sprache ist für sie also nicht instruktiv im Sinne eines 'Transporteurs' von Bedeutungen. Vielmehr bilden die Äußerungen lediglich einen Anlaß, um zu ihnen (selbst), in einem subjektiv bestimmten Akt spezifische Bedeutungen zu konstruieren. Dabei liegen die Kriterien, anhand derer diese Bedeutungskonstruktion erfolgt, im individuell unterschiedlichen Erfahrungsraum der jeweiligen Sprecher und Hörer (siehe DILTHEY 1924, NASSEN 1982, GADAMER 1960, SCHAEFFLER 1973, GARDENER 1989, GLASERFELD 1987 und DÖRFLER 1988). Wegen dieser unterschiedlichen Erfahrungen ist Sprachverstehen letztendlich auf eine prinzipiell subjektive Basis gestellt. Als autonome geistige Aktivität ist dieses weder erzwingbar noch manipulierbar.

– *Verstehen, ein mentaler Prozeß*
Gefühlsregungen und andere nicht-kognitve Persönlichkeitsfaktoren sind im Verstehensprozessen zumeist mit dem kognitiven Geschehen so eng und untrennbar verknüpft, daß man sie gleichsam als Komponenten des Verstehens auffassen muß. Dies ist gemeint, wenn Verstehen als ein mentaler Prozeß bezeichnet wird (s. SIERPINSKA 1994).

– *Verstehen, ein auf Verstandenes rekurrierende Prozeßfolge*
Verstehensprozesse lassen sich nicht zureichend allein mit Blick auf das aktuelle Geschehen beschreiben. Zum einen muß berücksichtigt werden, daß jeder Verstehensprozeß in der Regel zu (evtl. minimalen) dauerhaften Veränderungen in der Wissensstruktur des Verstehenden führt, deren Ergebnis sich als Verstehensprodukt bezeichnen läßt. Zum zweiten beginnen Verstehensprozesse nicht voraussetzungslos. Jede Wahrnehmung, die geeignet ist, einen solchen Prozeß auszulösen, aktiviert im Verstehenden Wissen bzw. Vorstellungen, die in vorausgehenden Verstehensprozessen generiert wurden. Der das Verstehen charakterisierende Prozeß der aktiven Sinn- und Wissenskonstruktion wäre ohne Rückgriff auf bereits vorhandene und verfügbare Verstehensprodukte kaum denkbar (siehe REININGER 1970, UHLE 1978, BALLSTAEDT 1981, HÖRMANN 1976, MEYER-DRAWE 1982 und WAGENSCHEIN 1968).
Bei den Verstehensprodukten, auf die zurückgegriffen wird, handelt es sich nicht um zufällig ausgewählte Teile einer amorphen Wissens- oder Vorstellungsmasse, sondern um strukturierte Bedeutungseinheiten, die in der Literatur als Schemata, scripts, frames, Rahmungen, Argumentationsformate, subjektive Erfahrungsbereiche, usw. beschrieben werden. Die Bedeutungseinheiten werden in einem höchst selektiven Vorgang situations- bzw. inhaltsspezifisch eingesetzt und determinieren als Vorauskonstruktion die Deutung der von außen kommenden Impulse und Wissensinhalte durch den Verstehenden. Sie wirken antizipatorisch, indem sie für den Verstehensprozeß Orientierungen erzeugen und Pläne generieren. Sie stellen für ihn die Mittel bereit und

beeinflussen seinen Verlauf (siehe SEILER 1984, DAVIS 1984 und 1992, WACHSMUTH 1985, STEINER 1991, WESSELS 1990, SCHANK & ABELSON 1977, DAVIS & MCKNIGHT 1979 und BAUERSFELD 1983). Aufgrund des Verstehensprozesses, gleichsam als dessen Produkt, entstehen also neue bzw. veränderte Vorstellungen bzw. Wissensstrukturen, die dann ihrerseits in neuen Verstehensprozessen aktualisiert werden können, denen sie wiederum in beschriebener Weise zugrunde liegen.

– *Trennung von Beschreibung und Evaluation des Verstehens*
Vielfach wird Verstehen, insbesondere in Bezug auf mathematisches Wissen, ausschließlich im Sinne bestimmter Kompetenzen, einer bestimmten Art von Wissen, einer Zielqualität aufgefaßt. Es wird als anzustrebender geistiger Zustand beschrieben, der in mehr oder weniger langfristigen Lernbemühungen erreicht werden kann und nach der jeweils erreichten Stufe klassifiziert. Eine solche Beschreibung verlangt nach positiven Normen, aufgrund deren sich entscheiden läßt, ob ein erwünschter Zustand erreicht wurde oder nicht. Wir haben es mit einem produkthaften, normativen Verstehensbegriff zu tun. (Siehe SKEMP 1979, HERSCOVICS & BERGERON 1983, PIRIE & KIEREN 1989, AESCHBACHER 1986 und VOLLRATH 1993).
Bei MAIER sind demgegenüber nicht nur die Verstehensprozesse den Verstehensprodukten vorgeordnet, sondern es wird auch versucht, die Beschreibung des Verstehens von seiner Bewertung bzw. Evaluation zu trennen. Genauer gesagt wird zuerst gefragt, was und wie der einzelne Schüler verstanden hat, und erst dann, wie weit dieses sein Verstehen gewissen empirischen Vorgaben bzw. impliziten oder expliziten Normen gerecht wird. Die Evaluation ist der Beschreibung nachgeordnet, und man kann insofern von einem prozeßhaft-deskriptiven Verstehensbegriff sprechen.

3.2 Inhaltliche Charakterisierung von Verstehen

Wer sich für das Verstehen von Schülern im Mathematikunterricht interessiert, wird sich nicht mit einer formalen Definition bzw. Explikation dieses Begriffs begnügen. Er wird danach fragen, *was* die Schüler verstehen sollen bzw. verstanden haben, genauer gesagt, auf welchen mathematischen Gegenstand, auf welches Element mathematischen Wissens oder Tuns sich das Verstehen richtet. Zu dieser inhaltlichen Charakterisierung des Verstehens werden nachfolgend ein Theoriemodell und das zugehörige Analyseergebnis zum ausgewählten Unterrichtsabschnitt vorgestellt. (Bezüglich des angewendeten Analyseverfahrens siehe MAIER 1991, BECK & MAIER 1994a und 1994b)

a) Inhaltliche Dimensionen des Verstehens

Verstehensinhalte in dem hier gemeinten Sinne können z. B. einzelne mathematische Begriffe, Aussagen (etwa ein Lehrsatz) oder Verfahren sein. In der anschließend zu analysierenden Unterrichtspassage ist es der Begriff *Bruch*. Daher soll am Beispiel dieses Begriffs gezeigt werden, welche inhaltlichen Aspekte das Verstehen eines mathematischen Wissenselements grundsätzlich umfassen kann. Die Aspekte lassen sich nämlich nach zwei Dimensionen entfalten:
Eine dieser Dimensionen betrifft den kognitiven Anspruch, den das betreffende Wissen repräsentiert. Hinsichtlich dieser, als '*mental*' bezeichneten Dimension werden folgende Komponenten unterschieden:
- eine auf das Beschreiben, Definieren, Erklären oder Erläutern bezogene (*konzeptuelle*) Komponente;

- eine auf das Erzeugen, Generieren, Ausführen bezogene (*prozedurale*) Komponente;
- eine Beziehungen, Zusammenhänge und Strukturen betreffende (*relationale*) Komponente;
- eine Ableiten, Begründen, Schlußfolgern (induktiv oder deduktiv), logische Ordnen (lokal oder global) bzw. Beweisen betreffende (*argumentative*) Komponente;
- eine das Lösen mathematischer Probleme und mit ihm zusammenhänge kognitive Aktivitäten wie Mathematisieren, Lösungspläne entwickeln, Umstrukturieren, usw. betreffende (*elaborative*) Komponente und
- eine nicht mathematische Sachverhalte selbst darstellende, sondern aus einer Metasicht auf diese bezogene (*reflexive*) Komponente; es kann sich um Einordnung eines Gegenstands in größere Zusammenhänge, um Evaluierungen, auch um persönliche Einschätzungen, Beurteilungen oder Einstellungen handeln.

Die andere Dimensionen nimmt den Darstellungsmodus bzw. die Verknüpfung von Darstellungsmodi in den Blick, in denen das Wissen repräsentiert werden kann. Diese '*modale Dimension*' gliedert sich

- in eine verbale oder schriftlich-symbolische Darstellung, die auf *vorliegende* konkrete Modelle oder Zeichnungen Bezug nimmt und diese fachinhaltlich interpretiert (*explizit intermodale Komponente*);
- in eine verbale oder schriftlich-symbolische Darstellung, die erkennbar auf *nicht vorliegende* konkrete Modelle oder Zeichnungen Bezug nimmt und diese fachinhaltlich interpretiert (*implizit intermodale Komponente*) und
- in eine rein verbale oder schriftlich-symbolische fachliche Darstellung, die keinen Bezug zu anschaulichen Vorstellungen erkennen läßt (*sprachliche Komponente*).

(Eine nur auf konkrete Modelle oder Zeichnungen bezogene, rein handlungsgebundene bzw. '*anschauliche*' Darstellung liegt eigentlich außerhalb eines mathematischen Verstehens, vor allem wenn die mit ihr verbundenen verbalen Äußerungen diese Darstellung ausschließlich modellimmanent interpretieren.)

Die Vielgestaltigkeit eines mathematischen Wissenselements (Begriff, Aussage, Verfahren) läßt sich nun dadurch entfalten, daß die beiden genannten Dimensionen miteinander verknüpft werden. Zum Begriff Bruch bedeutet die *konzeptuelle Komponente* in *intermodaler* Ausprägung, daß an realen Gegenständen bzw. Modellkörpern auftretende oder zeichnerisch dargestellte, mit einem Bruch beschreibbaren Größenverhältnisse, unabhängig von der spezieller Größenart und -beziehung (auch für Spezialfälle wie 2/2 oder unechte Brüche wie 5/3), mit einer Bruchbezeichnung verbunden oder umgekehrt Modelleigenschaften angegeben, gezeigt oder beim Zeichnen berücksichtigt werden, die einen Bruch charakterisieren. Mit anderen Worten heißt dies, den Umfang des Begriffs (seine Extension) in Gestalt zugehöriger Referenzobjekte festzulegen und deren gemeinsame Kennzeichen (d. h. die Intension des Begriffs) zu benennen. Zur *sprachlichen* Ausprägung gehört es insbesondere, verschiedene Definitionen für Bruch zu formulieren und seine Teile wie auch mögliche Eigenschaften zu beschreiben.

Die *prozedurale Komponente* umfaßt im Beispiel Bruchbegriff *intermodal* Verfahren zur Herstellung von konkreten oder zeichnerischen Bruchmodellen und *sprachlich* die verbale Beschreibung solcher Darstellungsverfahren.

Die *relationale Komponente* umfaßt zum einen die für die Definition und Beschreibung wichtigen multiplikativen Größenbeziehungen, zum anderen den Vergleich von Brüchen hinsichtlich des von ihnen repräsentierten Zahlenwerts. Diese Beziehungen können *sprachlich* und *intermodal* gegeben, d. h. gleichermaßen in Modellen realisiert wie verbal formuliert und in Bruchsymbolen dargestellt werden.

Die *argumentative Komponente* betrifft im Fall des Bruchbegriffs im wesentlichen nur Begründungen dafür, warum von zwei Brüchen einer größer, kleiner als der andere ist oder warum beide Brüche gleich groß sind. Beides sollte wiederum rein *sprachlich* (verbal oder symbolisch) und streng logisch, aber auch in Verbindung mit oder bezogen auf anschauliche Modelle, also *intermodal*, möglich sein.

Die *elaborative Komponente* des Verstehens hat ihren Schwerpunkt beim Lösen mathematischer Aufgaben und Probleme. Im Fall eines Begriffs wie Bruch kann sie – gleichsam als Zusatz – allenfalls dadurch zum Tragen kommen, daß der Verstehende das Finden geeigneter Definitionen als selbständig zu lösende Aufgabe übernimmt.

Die *reflexive Komponente* des Verstehens kann sehr verschiedene Sinngebungen umfassen. Mögliche Aspekte sind Spezifika und Bedeutungen des Begriffs Bruch im Kontext verschiedener Zahldarstellungen und sein Bezug zu bestimmten Zahlbereichen (natürliche, rationale und reelle Zahlen).

b) Analyseergebnis

– *S1*

Die zusammenfassende Bemerkung des Lehrers "Ihr habt jetzt so Wörter gehabt irgendwie mit 'brechen'..." (161 f) nimmt S1 als Impuls auf, und stellt, den Lehrer unterbrechend, fest: "Das sind Bruchteile" (162). Er faßt damit die vorausgehend gesammelten Ausdrücke unter einem gemeinsamen Oberbegriff, nämlich 'Bruchteile', zusammen. Mit ihm schafft er einen losen begrifflichen Rahmen, unter den er auch einige weniger passende Beispiele subsumiert und macht damit deutlich, was ihm an der Sammlung von Begriffen für den Mathematikunterricht bedeutsam erscheint. Möglicherweise legt S1 dem Terminus 'Bruchteile' eine eher offene und undeutliche Bedeutungsvorstellung zugrunde oder er bezieht die Bezeichnung nur auf jene Beispiele, auf die eine präzisere Bedeutungsvorstellung relativ genau zutrifft. Um entscheiden zu können, was zutrifft, müßte man wissen, ob sich der Beitrag der modalen Dimension nach auf die *sprachlich-symbolische* Darstellungsebene beschränkt, oder ob S1 der Begriffsbildung *intermodal* auch anschauliche Vorstellung aus den Beispielen zugrunde legt, z. B. einen im vorausgehenden Unterricht durchgeführten Umschüttversuch, wo ein Liter Wasser auf vier Viertellitergläser verteilt und deren Inhalt mit 'ein Viertel Liter' beschrieben worden war. Gleichwohl darf man diese induktive Begriffsbildung auf der Grundlage von Beispielen, der mentalen Dimension nach, als Beitrag zur *konzeptuellen* Komponente des Verstehens betrachten.

– *Markus (Ma)*

Zuerst antwortet Markus auf die durch die Äußerung von S1 angestoßene Lehrerfrage "Was ist jetzt eigentlich ein Bruchteil?" (162 f) so: "Wenn es nicht das Ganze ist, sondern nur ein kleiner Teil davon oder auch ein großer Teil" (163 f). Für den Schüler ist der Begriff 'Bruchteil' mit der Vorstellung einer Beziehung zwischen irgendeinem Ganzen und einem Teil dieses Ganzen verbunden. Genauer stellt er den Ausdruck als Bezeichnung für einen Teil eines Ganzen dar, der etwas kleiner oder größer sein kann, auf jeden Fall aber kleiner sein muß als das Ganze. Man kann, mental gesehen, von einer Begriffserklärung durch Beziehungsangabe sprechen (Beitrag zum *konzeptuellem* und *relationalem* Verstehen).

Markus sieht sich durch die teilweise Wiederholung seiner Aussage durch den Lehrer wohl bestätigt und fährt deshalb in seiner Begriffserläuterung fort. Er bezieht sich dabei auf Produkte der vorbereitenden Arbeit – die Schüler hatten vor Stundenbeginn zwei unterschiedlich große Kreise aus Papier ausgeschnitten – und verwendet diese als Demonstrationsmittel. Am Beispiel zweier Kreise unterschiedlichen Durchmessers versucht er zu verdeutlichen, daß auch in Verbindung mit ihnen von Bruchteilen gesprochen werden könne: "Ich glaub, ich hab hier auch so etwas. Ist auch hier auch so etwas. Ist auch hier auch so ein bißchen was von dem Großen." (165-167). Hier fügt er, modal gesehen, der rein sprachlichen Darstellung – wenngleich mit wesentlich größerer Vorsicht und sprachlichen Unsicherheit – der ersten Erklärung ein anschauliches Element an und zeigt somit ein *explizit intermodales* Verstehen an. Er sieht nämlich die beiden Kreise als Bruchteile eines großen Blattes (welches das Ganze darstellt, und aus dem sie herausgeschnitten worden sind) oder den kleineren der beiden Kreise als Teil des größeren (weil er in ihm Platz hat oder sich aus ihm ausschneiden ließe).
Der *intermodale* Verstehensanteil von Markus zum Begriff Bruchteil als einem irgendwie gearteten Teil eines Ganzen wird kurze Zeit später nochmals deutlich. Markus bestätigt, daß der Lehrer mit vier Scherben eines zerschlagenen Blumentopfes tatsächlich "Bruchteile" vorzeigt Lehrerfrage: "Das wären also vier Bruchteile?" (174) Antwort: "Ja, aber von einem Großen erst mal/ von einem . Großen ist dann das der Bruchteil" (175f). Dazu macht er mit den Händen eine kreisförmige Bewegung. Markus legt also nochmals dar, daß für die Entstehung von Bruchteilen ein Ganzes als Voraussetzung gegeben sein muß. Er bezieht sich dabei wahrscheinlich auf die Äußerung von Stefan, der zuvor (172-173) das Demonstrationsmodell als "Bruchteil von einem Blumentopf" bezeichnet hatte. Vermutlich, weil der Lehrer nicht weiter darauf eingeht, schwächt Markus seine Aussage anschließend mit dem Satz "Also ich finde das einfach so" (176) ab, hält also an seiner Behauptung nicht als Tatsachenfeststellung fest, sondern relativiert sie zu einer subjektiven Anschauung.
Späteren Äußerungen von Markus läßt sich entnehmen, daß er auch Bedeutungsvorstellungen zum Terminus 'Viertel' konstruiert. Durch Kopfschütteln und ein spontanes "Nein" (179) stellt er klar, daß die Bezeichnung 'ein Viertel' auf ein vom Lehrer gezeigtes Bruchstück eines Blumentopfes nicht zutrifft. Vermutlich will er mit seiner strikten Verneinung eine Aussage von Jörg korrigieren. Dieser hatte nämlich behauptet: "Das ist ein Viertel von einem Ganzen" (177-178), was allerdings der Lehrer mit der Frage "Glaubst du, das ist ein Viertel?" (178) schon in Zweifel gezogen hatte. Markus beantwortet zugleich diese Frage. Vermutlich ist ihm zu diesem Zeitpunkt bereits bewußt: die Anwendung der Bezeichnung 'ein Viertel' setzt nicht nur voraus, daß ein Kreis in vier Teile zerlegt ist, sondern darf sich nur auf Kreisstücke beziehen, die (genau) vierte Teile des ganzen Kreises sind. Als Indikator für diese Vermutung kann sein leider abgebrochener Begründungsversuch gesehen werden: "Nein, weil das ist schon mehr" (181). Das gezeigte Stück erscheint ihm größer als der vierte Teil des Blumentopfs, so daß sich beim Zusammensetzen solcher Teile mehr als ein Ganzes ergeben würde.
Kurz darauf, als die Schüler einen Teil ihres in vier Teile zerschnittenen Kreises hochzeigen, verneint Markus, daß es sich um 'ein Viertel' handelt, weil offenbar die Teilung in genau gleich große Teile nicht hinreichend geglückt war: "Ich glaube, das waren keine" (202). Mit einer weiteren Äußerung "Das ist aber eine (...)" (212) wird er leider vom Lehrer unterbrochen. Daß jedoch ein nicht genau dem viertel Teil entsprechendes Teilstück eines Kreises "aber auch irgendein Viertel" (213) sein könnte, verneint Markus erneut entschlossen (214). Wir haben es hier in der mentalen Dimension gleichzeitig mit Elementen *konzeptuellen*, *relationalen* und *argumentativen* Verstehens zum Begriff 'Viertel' zu tun. Dabei versteht Markus offensichtlich, an spezielle Modelle gebunden, *explizit intermodal*.

– *Jörg (Jö)*
Jörg bezieht sich mit seiner Aussage "Das ist ein Viertel von einem Ganzen" (177-178) vermutlich auf die Passage 170 bis 175, in der über Bruchstücke eines Blumentopfes gesprochen wurde. Er vollzieht eine Präzisierung der Aussage von Stefan, der eine Scherbe als Bruchteil bezeichnet hatte (172-173) und versucht, das aktuelle Geschehen zu 'mathematisieren', indem er die Bezeichnungen "Viertel" und "Ganzes" in das Gespräch einführt. Möglicherweise stellt Jörg auch eine Analogie zu dem vorher durchgeführten Versuch des Umschüttens (Ergebnis: viermal ein Viertelliter) her und verwendet die in der vorausgehenden Stunde eingeführte Bezeichnung 'ein Viertel' an dieser Stelle in der Hoffnung, damit der Lehrererwartung gerecht zu werden. Der Lehrer will ihm mit seiner Frage "Glaubst du, das ist ein Viertel?" (178) die Möglichkeit geben, über seine Aussage nachzudenken. Obwohl diese Frage Zweifel an seiner Behauptung zum Ausdruck bringt und trotz des, von Kopfschütteln begleiteten, widersprechenden Zwischenrufs von Markus "Nein! Nein! Oder?" (179), bleibt Jörg bei seiner Darstellung, ja er verstärkt sie sogar noch: "Vier Teile, ja" (180). Ihm scheint das Kriterium der Größengleichheit der Teile in dieser Situation offensichtlich noch nicht bewußt zu sein. Seiner Definition zufolge (*konzeptuelles, intermodales* Verstehen) darf man vier Teile eines Ganzen, unabhängig von den Größenverhältnissen als vier Viertel bezeichnen.

– *Achim (Ac)*
Die Schüler wurden vom Lehrer – bezogen auf vorbereitete, aus Papier ausgeschnittene Kreise, aber ohne irgend eine Anweisung über das Verfahren – aufgefordert, in Allein- oder Partnerarbeit "ein Viertel des Kreises zu schraffieren" (183). Nach der Fertigstellung ihrer Arbeit werden die Ergebnisse gruppenweise vorgezeigt, und der Lehrer stellt den Schülern die alternativ formulierte Frage, was ihnen aufgefallen sei (201) und ob es sich bei dem Gesehenen um Viertel gehandelt habe oder nicht: "Waren es Viertel? Oder waren es keine Viertel?" (201f). Achim scheint nicht nur über ein Beurteilungskriterium, sondern auch über ein angemessenes Verfahren für die Herstellung von Vierteln zu verfügen, wenn er feststellt. "Ja, es könnten vielleicht Viertel gewesen sein, aber die sind vielleicht nicht so genau gewesen, wenn man irgendwie so gezeichnet hat. Ich habe so gefaltet und dann" (203-205). An dieser Stelle wird er vom Lehrer unterbrochen. Mit der Charakterisierung „nicht so genau" (204) bringt der Schüler zum Ausdruck, daß er eine recht präzise *relationale* Vorstellung davon hat, wie sich die Größe eines Viertels zur Gesamtgröße des Kreises verhalten muß. Zudem ist für ihn die zeichnerische Genauigkeit offenbar ein wichtiges Kriterium bei der Beantwortung der gestellten Frage Seinen Mitschülern billigt er zu, daß sie grundsätzlich ein angemessenes Konstruktionsverfahren zur Erzeugung von Vierteln angewendet haben könnten und daß in einigen Fällen die Viertel sogar korrekt gezeichnet waren. Die Teile mancher seiner Mitschüler erfüllen aber offenbar seine strengen Kriterien nicht, da das von ihnen angewendete Verfahren zur Bestimmung der Größe möglicherweise zu ungenauen Ergebnissen führt. Haben sie doch nur "irgendwie so gezeichnet" (205). Achim meint, daß für das zeichnerische Einteilen in Vierteln das Augenmaß nicht ausreiche,

und daß sich dieses auch mit den vorhandenen Arbeitsmitteln (Lineal, Bleistift) nicht in angemessener Weise ausführen lasse (*argumentatives* Verstehen). Daher hat er eine Strategie entwickelt, die seiner Meinung nach zu dem gewünschten Erfolg führt, nämlich doppeltes Falten (*prozedurales* Verstehen). Inwieweit er in diese Situation alltagsweltliche Erfahrungen einspeist oder mathematische Überlegungen zur Viertelung einer symmetrischen Fläche anstellt, muß offen bleiben. Jedoch hat sein *relationales, argumentatives* und *prozedurales* Verstehen zum Begriff 'ein Viertel', der modalen Dimension nach, sicherlich eine *explizit intermodale* Komponente..
Achim verschärft und präzisiert seine Argumentation anschließend noch mit einer negativen Abgrenzung auf die Lehrerfrage "Was verstehst du unter 'genau'?" und dessen provozierenden Impuls "Einige haben gesagt, das sind Viertel da." (206-208): "Ja, eigentlich nicht, weil die sind verschieden groß" (208-209). Damit stellt er klar, daß nur dann von Vierteln gesprochen werden darf, wenn ein Konstruktionsverfahren angewendet wird, das zu möglichst genau gleich großen Teilen führt. Er wendet dieses Argument wohl auch in 214 und 215 nochmals an, wo er mit Bezug auf das vom Lehrer gezeigte Demonstrationsmodell nochmals klar verneint, daß es sich dabei um ein Viertel handelt.

– *Martin (Mt)*

Der Lehrer scheint eine Auseinandersetzung der anderen Schüler mit Achims Aussage zur Gleichheit der Teile im Fall von Vierteln anzustreben, indem er eine vermutlich (in der Videoaufzeichnung nicht erkennbar) 'falsch geviertelte' Scheibe vorführt (208-209). Martin veranlaßt dies zu der Bemerkung, daß die Gleichheit der vier Teile Bedingung dafür ist, die Segmente als Viertel bezeichnen zu können: "Die müssen ja gleich groß sein" (212). Auf eine vom Lehrer gespielte 'Gegendarstellung' hin - "Das ist aber auch irgendein Viertel, vielleicht, was weiß ich" (213) - bekräftigt Martin mit der, *intermodales* Verstehen signalisierenden Aussage: "Nein, das muß ja/ wenn man jetzt, sagen wir einmal, von einem Kreis ein Viertel nimmt, dann müssen die anderen genau so groß sein wieder ... weil sonst..." (215-217). Hier bricht der Lehrer den Begründungsansatz ab, um die Aussage durch einen Vergleich mit der Umschüttsituation zu unterstreichen und Martin zu bitten, seine Aussage nochmals zu wiederholen (218f). Dieser präzisiert daraufhin: "Wenn man jetzt ein Viertel, äh von einem Kreis einzeichnet, dann müssen die anderen drei Viertel genauso groß sein wie das eine" (219-221). Hier versucht Martin eine argumentative Stützung zu seiner ersten Aussage, und er orientiert sich dabei erneut *intermodal* an dem gegebenen Kreismodell. Hinsichtlich der mentalen Dimension darf man Martins Begriff von 'ein Viertel' einen Beitrag zu *konzeptuellem*, *relationalem* und *argumentativem* Verstehen nennen.

3.3 Evaluation des Verstehens

Mit den dargelegten Beschreibungskategorien und ihrer Exemplifikation am Beispiel des Bruchbegriffs sollte gezeigt werden, wie komplex sich das mathematischen Wissens im Kontext seiner verständigen Aneignung präsentiert. Aus didaktischer Sicht möchte man freilich nicht bei einer bloßen Beschreibung des Verstehens einzelner Schüler stehenbleiben, sondern dieses einer evaluierenden Beurteilung unterziehen. Dafür sollen nachfolgend wiederum zuerst ausführlich das im VIMU-Projekt entwickelte Theoriemodell vorgestellt und dieses dann auf das Analysebeispiel angewendet werden.

a) Evaluationskriterien

Wie im Rahmen der formalen Definition des Verstehensbegriffs dargelegt, wird häufig mit dem Verstehensbegriff selbst unlöslich eine evaluative Komponente verknüpft. Verstehen ist dann eine bewertende Kategorie, wobei allerdings die Kriterien der Bewertung nicht explizit angegeben, vielleicht nicht einmal reflektiert werden. Zum einen handelt es sich hierbei um Leistungsziele, die sich an mathematischen Konventionen und Standards orientieren. Diese sind durch Übereinkunft festgelegte Bestandteile eines fachlichen Instrumentariums wie fixierte Begriffsdefinitionen, normierte Formulierungen von Sätzen und Beweisen, aber auch standardisierte arithmetische, algebraische und geometrische Verfahren sowie Vereinbarungen über die sprachliche, vor allem schriftsprachliche Darstellung fachlicher Inhalte, u. a.
Ein Beurteilung nach solchen Maßstäben scheint jedoch als Grundlage einer tiefergehenden Evaluation inhaltlichen Verstehens nicht ausreichend. Sie muß sich in eine Evaluation nach mathematischen Denk- und Arbeitsweisen einordnen. Gemeint sind dabei insbesondere spezifische Formen

- der Begriffsbestimmung, Begriffsdefinition und begrifflicher Hierarchisierung;
- der Beschreibung arithmetischer, algebraischer und geometrischer Beziehungen sowie der Formulierung von Gesetzen und Lehrsätzen;
- der Entwicklung und Bewertung algebraischer und geometrischer Verfahren und Algorithmen;
- des Argumentierens, Schlußfolgerns und Beweisens zur Sicherung der Gültigkeit von Gesetzen und Sätzen.

Diese Aspekte verbinden sich mit den o. g. Standards und Konventionen zu dem, was nachfolgend mathematische Evaluationskriterien genannt werden soll.
Es scheint in der Tat angemessen und wichtig, das Schülerverstehen auf solche mathematische Kriterien zu beziehen, und es aus deren Sicht zu evaluieren, auch wenn sich darin oft ein hoher Anspruch verbirgt, der sich kaum von einem Schüler in vollem Umfang einlösen läßt. Man muß sich freilich bewußt bleiben, daß es sich dabei um keine objektiv fixierten Maßstäbe handelt. Vielmehr kann der Evaluierende stets nur sein eigenes mathematisches Wissen und seine eigene mathematische epistemologische Kompetenz zugrunde legen. Das heißt, er muß die von ihm angewandten Maßstäbe vor der Beurteilung offengelegt bzw. explizieren und damit der Nachprüfung zugänglich machen. Zudem sollten die mathematischen Kriterien nur als eines von mehreren Kriterien der Evaluierung von Schülerverstehen aufgefaßt und verwendet werden.
Ein zweites Kriterium ist das, was man kurz als *Lehrerintention* bezeichnen kann. Mit der Gestaltung des Unterrichts möchte der Lehrer bei den Schülern bestimmte Verstehens- und Lernprozesse auslösen. Die damit charakterisierten Absichten sind vornehmlich durch Unterrichts- bzw. Lehrziele bestimmt, die ihm teilweise in Lehrplänen und Lehrmitteln vorgegeben sind und die er in ihrer Unterrichtsvorbereitung verfeinert und präzisiert. Allerdings pflegt er solche Vorgaben aufgrund ihrer Einschätzung der Aufnahme- und Leistungsfähigkeit der Schüler zu modifizieren. Die Schüler wissen, daß mit den unterrichtlichen Instruktionen des Lehrers ganz bestimmte Erwartungen verknüpft sind, und sie versuchen im allgemeinen, mit ihren unterrichtlichen Beiträgen diesen gerecht zu werden. Insofern erscheint es sinnvoll, die erkennbaren Lehrerintentionen zu einem weiteren Kriterium für die Evaluierung des Schülerverstehens zu machen und beide miteinander zu vergleichen. Da sie im Unterricht sprachlich nur selten verbal expliziert werden, sind sie oft nicht leicht zu identifizieren. Sie müssen in der

Analyse aus Inhalt, Art und Abfolge der Instruktionen sowie aus Kommentaren zu Schüleräußerungen hypothetisch erschlossen werden. Die Schwierigkeit ihrer Identifizierung liegt auch darin begründet, daß sie oft schon im Bewußtsein des Lehrers selbst nur undeutlich und wenig präzise repräsentiert sind, und sich andererseits durchaus klare und bewußte Intentionen hinter mehrdeutigen, für verschiedene Interpretationen offenen Instruktionen verbergen können.

Wenn der einzelne Schüler im Wege der Sinngebung und der Konstruktion von Bedeutung ein möglichst reichhaltiges Verstehen generieren soll, so braucht er dazu in der Regel adäquate unterrichtliche Anstöße in Form von Lehrerinstruktionen, -erklärungen und -kommentare oder geeigneter Beiträge anderer Schüler zur Interaktion. Man kann vom *unterrichtlichen Sinnangebot sprechen,* das sich in der unterrichtlichen Interaktion konstituiert, und dieses wird – neben den mathematischen Kriterien und den Lehrerintentionen – als wichtigstes Evaluationskriterium für das Schülerverstehen betrachten. Gefragt wird hier danach, welche Verstehensprozesse bei einem einzelnen Schüler die realisierten unterrichtlichen Angebote angestoßen haben und von welcher Art die Verstehensprodukte sind, die er auf diese Weise generiert hat. Es muß beachtet werden, daß das Sinnangebot des Unterrichts ein Ergebnis der Unterrichtsanalyse durch den Evaluierenden, also ein Interpretat ist, und daß es zum Verstehensprodukt eines Schülers in einer komplexen Wechselbeziehung steht. Jedenfalls läßt sich das Verstehensprodukt nicht in naiver Weise aus dem Sinnangebot herleiten. Gleichwohl kann man verschiedene Formen der Verarbeitung dieser Angebote durch Schüler unterscheiden:

– *Reproduktion und Rekonstruktion*

Der evaluative Vergleich von Sinnangebot und Verstehensprodukt geht von ihrer grundsätzlichen Unterschiedlichkeit aus. Gleichwohl läßt sich beobachten, daß Schüler Sinnangebote in gleichem Umfang und in gleicher Gestalt, wie sie vorausgehend im Unterricht dargeboten wurden, gewissermaßen nach Art eines Ton- oder Videobandes, wörtlich wiedergeben, *reproduzieren.* Es dürfte einsichtig sein, daß in diesem, nur selten auftretenden Fall für einen Beobachter Verstehensprozesse analytisch nicht faßbar werden können. Letzteres ist erst dann möglich, wenn die im Unterricht generierten thematischen Sinnelemente in irgendeiner Form 'bearbeitet' werden und sich dieser individuelle Bearbeitungsprozeß auch in der sprachlichen Äußerung des Schülers zeigt. Die einfachste Form der Bearbeitung ist die *Rekonstruktion.* Hier läßt der Verstehende ein Sinnangebot, das in der unterrichtlichen Kommunikation geschaffen wurde, in der nachfolgenden Situation in allen inhaltlichen Aspekten wiedererstehen. Er verwendet dabei allerdings seine eigenen Worte bzw. Darstellungen, und diese unterscheiden sich von den Darstellungen in der Ursprungssituation. Verstehen dokumentiert sich hier in der Form einer individuell geformten Paraphrase, welche die im vorgegebenen Sinnangebot repräsentierten Bedeutungen quantitativ und qualitativ vollinhaltlich zum Ausdruck bringt, diese also nach Inhalt und Zusammenhang unverändert läßt. Bei einer getreuen Rekonstruktion wird man im allgemeinen von erfolgreichem Verstehen sprechen, auch wenn die Verstehensprodukte gegen einige, in der Lehrerintention erkennbare mathematische Evaluationskriterien verstoßen. Freilich kommt auch rekonstruierendes Verstehen eher selten vor. Zumeist geht die 'Bearbeitung', die der Verstehende in seiner subjektiven Konstruktion an den Sinnangeboten vornimmt, weiter. Er verkürzt, modifiziert, ergänzt erweitert diese Angebote; kurz, er verändert sie quantitativ

oder qualitativ in einer Weise, die sich mit ihrem ursprünglichen Gehalt und Zusammenhang nur noch teilweise oder gar nicht mehr deckt. Im einzelnen lassen sich bezüglich dieser Form zwei Arten von Verstehen beschreiben: das *reduktive* und das *abduktive* Verstehen.

– *Reduktives und abduktives Verstehen*

Beim *reduktiven Verstehen* wird das Sinnangebot in irgendeiner Weise qualitativ oder quantitativ verkürzt oder gemindert.

Die Verkürzung oder Minderung kann zum ersten isolierte Bedeutungsinhalte wie Begriffe, Verfahren oder einzelne Beziehungen betreffen, und zwar deren quantitativen Umfang wie deren qualitativen Gehalt (*inhaltliche Reduktion*). Der Schüler kann in dem von ihm generierten Verstehensprodukt Bedeutungsinhalte des Sinnangebots weglassen, d. h. dieses quantitativ verkürzen; er kann Begriffe und Beziehungen ihres Vorstellungsgehalts entleeren, d. h. dekontextualisieren, und im Angebot begründet ausgeführte Verfahren rein mechanisch realisieren.

Zum zweiten kann die Verkürzung bzw. Minderung Bedeutungszusammenhänge, wie z. B. Beziehungen zwischen Begriffen und Sätzen oder die Verknüpfung von Verfahrensschritten betreffen (*strukturelle Reduktion*). Dies trifft zu, wenn ein Schüler solche Zusammenhänge auflöst und die Teile des Zusammenhangs nur noch isoliert betrachtet, also den strukturellen Zusammenhang fraktioniert, wenn er die Teile des Zusammenhangs miteinander vermengt, also Interferenzen bildet, oder wenn er, globalisierend, strukturell relevante Einzelheiten wegläßt.

Schließlich kann die Verkürzung oder Minderung die Darstellungsdimension tangieren (*modale Reduktion*), wenn der Schüler z. B. ein intermodales Angebot auf eine nur sprachlich-symbolische oder auf eine nur anschaulich-modellgebundene Darstellung verkürzt (syntaxreduziert bzw. modellreduziert).

Beim *abduktiven Verstehen* schöpft der Schüler ein unterrichtliches Sinnangebot voll aus, gibt ihm aber seine eigene, subjektiv gefärbte Prägung oder fügt ihm aus dem Vorrat eigenen Wissens bzw. verfügbarer Verstehensprodukte in qualitativer oder auch quantitativer Weise noch etwas hinzu.

Falls die Modifikation bzw. Erweiterung die Bedeutungsinhalte betrifft, legt sich der Schüler z. B. eigene Begriffsvorstellungen oder Aussagen zurecht, handelt also 'theoriebildend', er leitet aus Einzelbeobachtungen selbständig Regeln und Gesetze ab, handelt damit generalisierend oder übergeneralisierend, oder er bildet für das Lösen von Aufgaben- oder Problemen eigene Formen und Muster aus und handelt strategisierend (*inhaltliche Abduktion*).

Falls sich die Modifikation oder Erweiterung auf Bedeutungszusammenhänge bezieht, stellt der Schüler z. B. solche strukturelle Beziehungen selbst her, synthetisiert, ergänzt im Angebot vorgegebene Zusammenhänge um strukturverträgliche Einzelheiten, er differenziert, oder er faßt weniger relevante Einzelheiten unter übergeordneten Gesichtspunkten zusammen und reduziert so die Komplexität (*strukturelle* Abduktion).

In der modalen Dimension bedeutet die Abduktion entweder einen Übergang von einer rein modellgebundenen oder interaktiven zu sprachlich-symbolischer Darstellung, der Schüler abstrahiert oder mathematisiert, oder umgekehrt einen Übergang von rein sprachlich-symbolischer Darstellung zu interaktiver oder anschaulicher Darstellung, d. h. der Schüler konkretisiert oder exemplifiziert (*modale Abduktion*).

In einer Übersicht läßt sich das damit skizzierte Evaluierungsmodell so zusammenfassen (die Einträge in die Felder stellen Beispiele dar):

	inhaltlich	strukturell	modal
reduktives Verstehen	verkürzt quantitativ dekontextualisiert mechanisiert	fraktioniert bildet Interferenzen globalisiert	reduziert auf Syntax reduziert auf Modell
abduktives Verstehen	bildet Theorien generalisiert/ übergeneralisiert strategisiert	synthetisiert differenziert reduziert Komplexität	abstrahiert/ mathematisiert konkretisiert/ exemplifiziert

b) Analyseergebnis

In den unter 3.2 gegebenen Analysebeispielen geht es um das Verstehen zweier Begriffe, nämlich des Begriffs 'Bruchteile' und des Begriffs 'Viertel' bzw. 'ein Viertel'. Wie läßt sich dieses für die Schüler S1, Markus, Jörg und Martin evaluieren?

– *Evaluation hinsichtlich mathematischer Kriterien und Lehrerintentionen*

Der Lehrer greift das von S1 in den Unterricht eingeführte Wort *'Bruchteil'* zwar auf, läßt aber kaum erkennen, welche Bedeutung er ihm zugeschrieben wissen möchte. Es wird aber deutlich, daß er 'Bruchteil' nicht als einen nach den Formen der mathematischen Begriffsdefinition festgelegten Fachterminus verwendet, sondern in einer Mischung von anschaulichen und fachlichen Aspekten. Die von Markus gegebene Definition als mehr oder weniger großer Teil eines als Ganzes betrachteten Gegenstandes scheint allerdings, den Kommentaren zufolge, seiner eigenen Bedeutungsvorstellung zumindest nicht völlig zu widersprechen. In der Alltagssprache bezeichnet man ja üblicherweise mit 'Bruchteil' einen quantitativ nicht genau bestimmten, aber doch meist sehr kleinen Teil einer Größeneinheit oder eines 'Ganzen'. (Ein 'Bruchteil einer Sekunde' meint eine unbestimmte, aber sehr kurze Zeitspanne, 'Bruchteile eines Knochens' sind eher kleine Splitter von ihm.) Aus späteren Instruktionen und Erklärungen läßt sich erkennen, daß der Lehrer, im Gegensatz dazu, eher an Teile einer Größeneinheit oder eines konkreten 'Ganzen' denkt, die durch gleichmäßige Teilung entstanden sind und daher mit einem Bruch beschrieben werden können: 'die Viertel' eines Kuchens bzw. einer Kreisscheibe oder die 'Drittel' einer Stunde. S1 verwendet den Ausdruck offensichtlich weder in dem erwähnten alltagsweltlichen noch in dem vom Lehrer zugrunde gelegten Sinne. In der Bedeutungszuschreibung von Markus fehlt bezüglich der alltagssprachlichen das Element des Kleinen und bezüglich der Lehrerintention vermutlich das Element der gleichmäßigen Aufteilung.

Was die Ausdrücke 'Viertel' bzw. 'ein Viertel' angeht, bezeichnen sie mathematischen Kriterien zufolge u. a. den vierten Teil einer (als Einheit gewählten) Größe, dienen also der Beschreibung einer Größe in Bezug auf eine andere Größe des gleichen Größenbereichs. Mit dieser Auffassung deckt sich offenbar auch die Lehrerintention, so daß hier mathematische Kriterien und Lehrerintention einen einheitlichen Evaluationsmaßstab bilden. Diesem kommt die Bedeutungszuschreibung von Markus zum Terminus 'ein Viertel' weitgehend nach, falls die unter 3.2 entwickelte Deutung seines Verstehens zutrifft. In besonderer Weise werden ihm sicherlich Achim und Martin mit ihrer starken Betonung der Größengleichheit der vier Teile gerecht. Fachlichen Anforderungen

zufolge müßte Achim allerdings auch klar sein, daß dem arithmetischen und geometrischen Gleichheitsideal mit Falten zwar vielleicht besser, aber grundsätzlich auch nur näherungsweise entsprochen werden kann. Jörg verfehlt mit seinem Definitionsversuch für 'ein Viertel' natürlich gleichermaßen mathematische Bedingungen und Lehrerintention insofern, weil für ihn eine Teilung der Größe in vier Teile ausreicht und er diese Teile auch dann 'Viertel' nennt, wenn sie verschieden groß sind.

– *Evaluation hinsichtlich des unterrichtlichen Sinnangebots*

Was den Begriff 'Bruchteil' angeht, geben die vorausgehenden Sinnangebote des Unterrichts, vor allem in der analysierten Stunde, keinerlei Anlaß zur Verwendung dieses Wortes und keinerlei Anstoß für eine spezielle Bedeutungszuschreibung. Somit stellen die bei S1 zu beobachtende Wortschöpfung und die von S1 und Markus entwickelten Begriffsvorstellungen eher recht eigenständige Konstruktionen dar und lassen sich daher als *abduktives* Verstehen evaluieren. S1 subsumiert die unter dem Wortfeld 'brechen' gesammelten Beispiele *abstrahierend* unter diesem Terminus, wobei freilich auch alltagssprachliche Bedeutungsvorstellungen (im Sinne (kleiner) Stücke, die durch Teilung eines Gegenstandes entstanden sind) nur auf wenige der genannten Beispiele zutreffen. Warum führt er das Wort überhaupt in die unterrichtliche Kommunikation ein? Allenfalls könnte S1 aufgrund kumulierter Erfahrungen aus dem bisherigen Unterrichts oder durch Einsichtnahme in das Schülerarbeitsbuch zu der Überzeugung gekommen sein, daß diese Vokabel dem Lehrer als wichtiges Wort erscheint, und daß er mit dessen Nennung das Unterrichtsgespräch im Sinne des Lehrers voranbringen könnte. In der Tat greift der Lehrer die Bezeichnung auch auf und fragt nach seiner Bedeutung. Markus versucht spontan eine *theoriebildende* Antwort, die sich zumindest nicht vollständig an alltagssprachlichen Gepflogenheiten orientiert und die in dieser Form nicht durch unterrichtliche Sinnangebote veranlaßt sein kann.

Zum Begriff 'ein Viertel' hat Markus wohl das Sinnangebot der vorausgehenden ersten Unterrichtseinheit der Sequenz im Sinne der Lehrerintention verarbeitet, wo das Zerschlagen des Blumentopfs in vier unterschiedlich große Teile dem 'genauen' Aufteilen eines Liters Wasser in vier gleich großen Quanten gegenübergestellt und nur im letzten Fall von 'Vierteln' gesprochen worden war. Man darf in diesem Fall von *rekonstruktivem* Verstehen sprechen. Achim und Martin verbinden ihre Begriffserklärung mit der Aufgabe der Teilung eines Kreises in 'Viertel', die sie ohne vorherige Definition oder Arbeitsanleitung des Lehrers schöpferisch korrekt lösen. Sie haben dabei vermutlich einen Transfer von der Situation des Umschüttens eines Liter Wassers in Viertellitergläser auf die Situation der Kreisteilung gebildet. (Daß dies auch der Erwartung des Lehrers entsprach, zeigt sich an seiner Bemerkung in Zeile 218, wo er ausdrücklich die Erkenntnis, die Martin aus dem Umgang mit dem Kreismodell gewonnen hat, mit dem in der vorausgehenden Stunde durchgeführten Versuch verknüpft.) Insoweit kann man beiden Schülern *abduktives* Verstehen im Sinne einer Generalisierung bescheinigen. Daß Achim meint, die genaue Vierteilung auch empirisch realisieren zu können, kann seinen Grund darin haben, daß der Lehrer mit seinem Arbeitsauftrag den Gedanken nahezulegen scheint, die Aufgabe sei empirisch vollständig lösbar. Jörg hingegen gelingt es offenbar nicht, den Gedanken von der Größengleichheit der vier Teile aus dem unterrichtlichen Sinnangebot herauszufinden. Das Beispiel des Umschüttversuchs (ein Liter in vier Gläser), war für ihn offenbar zu wenig deutlich. Jedenfalls gelingt ihm der Transfer auf die Teilung des Blumentopfs nicht, diese ist ihm wohl nicht – wie vom

Lehrer intendiert – als Gegenbeispiel bewußt. Sein Verstehen bleibt *reduktiv* im Sinne einer strukturellen Globalisierung.

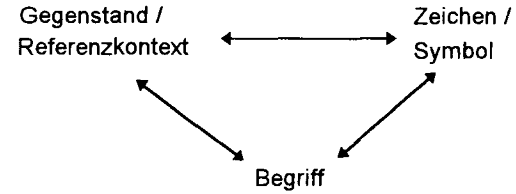
4. Epistemologische Analyse interaktiver Bedeutungskonstitutionen

STEINBRING untersucht in epistemologischen Analysen mathematischen Wissens, wie sich in alltäglichen Unterrichts-, Lern- und Kommunikationsprozessen mathematische Bedeutungen interaktiv entfalten. Der entsprechende Theorieansatz soll nachfolgend erläutert und dann am Beispiel der im Abschnitt 2 beschriebenen Unterrichtsepisode verdeutlicht werden.

4.1 Theoriegrundlage

Die Konstruktion mathematischen Wissens und mathematischer Bedeutung geschieht im Rahmen der Etablierung von Beziehungen und Strukturen zwischen Zeichen (Symbolen, Diagrammen, Operationszeichen usw.) und Objekten / Referenzbereichen (konkrete und abstrakte). Die Herstellung solcher Beziehungen zwischen Zeichen / Symbol und Referenten kann man aus epistemologischer Sicht als ein sozial-historisches Problem analysieren; hier ist es interessant festzustellen, wie sich Begriffe oder neue Bedeutungen mathematischen Wissens entwickelt haben, welche epistemologischen Hindernisse auftraten, wie und ob diese "überwunden" werden konnten, oder wie in der mathematischen Community eine Balance zwischen inhaltlichen und konventionellen Aspekten mathematischen Wissens hergestellt wurde (JAHNKE & OTTE 1981).
Aber auch die Entwicklung mathematischen Wissens und mathematischer Bedeutungen in verschiedensten Lehr-Lern-Situationen und in mathematischen Kommunikationsprozessen kann unter der epistemologischen Perspektive der (durch Lehrer und Schüler interaktiv vorgenommenen) Herstellung von Beziehungen zwischen Zeichen / Symbol und Referenten analysiert werden.
Die Strukturen, die bei einer epistemologischen Analyse des schulmathematischen Wissens zwischen den Zeichen und Referenten untersucht werden, umfassen Bedingungen des mathematischen Wissens selbst (als eines sozial-historisch gewachsenen Wissensbestandes an Begriffen, Aussagen, Regeln, etc.) und die durch die Besonderheit der Lehr-Lern-Situation einwirkenden und konstituierenden sozialen und individuellen Aspekte. Das in der Kommunikation verhandelte mathematische Wissen hat eine historisch-sozial vorgegebene Struktur, die in der interaktiven Diskussion mit je spezifischen sozialen, institutionellen, individuellen, etc. Faktoren in Konflikt und in Konkurrenz treten; sie sind teilweise 'Hindernisse' und zum anderen notwendige Katalysatoren für die Entwicklung theoretischen mathematischen Wissens und mathematischer Bedeutung.
In der qualitativen, epistemologischen Analyse des schulmathematischen Wissens wird dieses Spannungsfeld zwischen den sozial-historisch gegebenen Strukturen des mathematischen Wissens und den besonderen sozialen Rahmenbedingungen (von Unterricht und Lernen) untersucht und beschrieben, und zwar insbesondere mit Blick auf die Vielfalt und die Bedingungen bei der Konstitution von Beziehungen zwischen Zeichen/ Symbol und Referenten in mathematischen Lehr-Lern-Situationen.

Entsprechend dieser Darstellung der Forschungskonzeption wird das epistemologische Dreieck als ein zentrales Instrument der Beschreibung und der Analyse von mathematischem Wissen benutzt (s. STEINBRING, 1989; 1991a, 1991b):



Dieses theoretische Schema geht auf die Unterscheidung von Bezeichnetes, Bezeichendes und Zeichen aus der Sprachphilosophie zurück. (vgl. insbesondere OGDEN & RICHARDS 1923, sowie für die Mathematik FREGE 1969. Zu einer Analyse des Dreiecks der Bedeutung von OGDEN & RICHARDS im Unterschied zum epistemologischen Dreieck vgl. STEINBRING 1998. Das Dreieck von FREGE: „Zeichen – Sinn – Bedeutung" hat eher eine *statische* Funktion, wogegen mit dem epistemologischen Dreieck unter einer *dynamischen* Sichtweise die interaktive mathematische Bedeutungsentwicklung untersucht werden soll.)
Das Charakteristikum des epistemologischen Dreiecks für die Analyse der interaktiven Konstitution mathematischen Wissens in unterrichtlichen Lehr-Lern-Prozessen besteht in der besonderen Wechselbeziehung zwischen den Zeichen / Symbolen und dem Gegenstand / Referenzkontext. Die Beziehungen zwischen den Eckpunkten dieses Dreiecks sind nicht explizit definiert, sie bilden ein sich wechselweise stützendes und ausbalancierendes System. In der fortschreitenden Entwicklung des Wissens verändert sich die Interpretation der Zeichensysteme und der entsprechenden Referenzkontexte. Wichtig ist, daß der Referenzkontext, bzw. der Gegenstand, nicht vorab eindeutig vorgegeben wird, sondern daß er im Verlaufe der Entwicklung des mathematischen Wissens mehr und mehr in einen strukturellen Zusammenhang umgedeutet wird. Dann läßt sich mathematische Bedeutung im Wechselspiel zwischen einem Referenzkontext und einem Zeichensystem herstellen, indem von einem relativ vertrauten, oder teilweise bekannten Referenzbereich mögliche Bedeutungen auf ein neues, noch bedeutungsloses Zeichensystem übertragen werden.
Bei mathematischen Verstehensprozessen geht es immer darum, 'Zeichen / Symbole' zu deuten, d.h. im Rahmen des epistemologischen Dreiecks den Bezug zu einem 'Gegenstand / Referenzkontext' herzustellen. Die Konstitution einer solchen Beziehung zwischen 'Gegenstand / Referenzkontext ↔ Zeichen / Symbol' kann in verschiedener Weise vorgenommen werden:

- explizit oder implizit, d.h. sie kann direkt ausgesprochen bzw. durch Zeigen oder aber nur durch den interaktiven Kontext / Rahmen "stillschweigend anwesend" sein.
- individuell oder interaktiv, d.h. sie kann von einzelnen Personen hergestellt oder interaktiv konstituiert sein.

Neben der Art und Weise der Konstitution einer Beziehung zwischen 'Gegenstand / Referenzkontext ↔ Zeichen / Symbol' ist es bei der Analyse wichtig zu beachten, daß es unter den an der Kommunikation beteiligten Personen meist nicht explizit klar ist, welche Aspekte des Wissens die Rolle des relativ vertrauten 'Gegenstandes / Referenzkontextes' und welche die Rolle des relativ neuen und unbekannten 'Zeichens / Symbols' spielen. Verschiedene Personen können hierbei von verschiedenen Voraussetzun-

gen ausgehen, also mit unterschiedlichen, jeweils vertrauten Referenzkontexten andere unbekannte Zeichensysteme deuten wollen. Erst im Verlaufe der interaktiven Kommunikation mögen sich teilweise und für gewisse Zeitspannen Übereinstimmungen bei den Beteiligten über die Rollen von 'Gegenstand / Referenzkontext' und 'Zeichen / Symbol' einstellen, die jedoch - auch im Sinne der Entwicklung neuen Wissens und der Aushandlung neuer Bedeutungen - in Frage gestellt und wieder verändert werden.
Die beiden zentralen epistemologischen Charakteristika bei der Wissensanalyse mit Hilfe des epistemologischen Dreiecks:

- die Art und Weise der Konstitution einer Beziehung zwischen 'Gegenstand / Referenzkontext ↔ Zeichen / Symbol',
- die temporäre Festlegung und interaktive Auswechslung der Rollen von 'Gegenstand / Referenzkontext' und 'Zeichen / Symbol'

werden nun bei der epistemologischen Analyse der Bedeutungskonstitution des Bruchbegriffs im Verlauf der Episode angewendet und auf diese Weise auch verdeutlicht.

4.2 Analysebeispiel

a) Die interaktive Entwicklung einer gemeinsamen Deutung von "ein Viertel"

Zu Beginn der Episode findet sich entsprechend dem epistemologischen Dreieck auf der Ebene von Zeichen / Symbol der zu interpretierende Name "Bruchteil"; diesem Namen bzw. *Wort*begriff soll durch Bezug auf die Wortfamilie von "brechen" Bedeutung gegeben werden; diese Wortfamilie stellt gewissermaßen den Referenzbereich / Gegenstand für den Namen "Bruchteil" dar. In der Beziehung zwischen:

Gegenstand / Referenzkontext ⟷ Zeichen / Symbol

zu Bruch gehen / zerbrechen ⟷ Bruchteile

erhält der *Wort*begriff in der Phase 1.2 interaktiv die folgende "Working definition": "Bruchteile sind kleine oder auch große Teile eines Ganzen". Die Relativierung "kleine oder *auch große* Teile" stammt von Ma und sie hebt diese Definition schon ein wenig aus dem konkreten Referenzkontext heraus und verleiht ihr erste mathematische Aspekte (denn, wenn in der Realität etwas zu Bruch geht, dann in viele kleine Stücke).

In den Phasen 1.2 und 1.3 werden zwei unterschiedliche Beispiele für mögliche referentielle Gegenstände von Bruchteilen herangezogen, einmal der Kreis (ein wichtiges paradigmatisches Modell, auch später für die Idealisierung benutzt) und vier Scherben eines Blumentopfes (als einem konkreten Gegenstand, der im folgenden auch als "abschreckendes" Gegenbeispiel für mathematische Genauigkeit dient).

Kreis / Blumentopfscherben ⟷ Bruchteile (Namen)

Aspekt des Bruchbegriffs

Mit dem Referenzgegenstand Blumentopf wird in Phase 1.3.2 weitergearbeitet; er dient einer ersten "Mathematisierung", indem der Lehrer auf die *Anzahl* der Scherben verweist. Damit ergibt sich in der Beziehung zwischen Referenzkontext und Zeichen / Symbol eine Deutungsverschiebung von konkreten "Eigenschaften" der Bedeutungen der Wortfamilie "brechen" zu "Quantitäten". Das epistemologische Dreieck wird nun interaktiv so gestaltet:

vier Blumentopfscherben ⟷ Spezieller Bruchteil ein Viertel

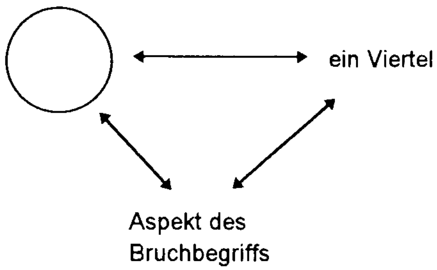
Aspekt des Bruchbegriffs

In der interaktiven Bedeutungsaushandlung zu diesem Beziehungsrahmen zwischen "*vier* Blumentopfscherben" und "ein *Viertel*" treten die quantitativen (mathematischen) Aspekte in den Vordergrund und der eher konkrete Aspekt des "Brechens" wird durch den eher mathematisch zu verstehenden Aspekt des "Teilens" ersetzt. Die Fokussierung des Lehrers auf die "Vier" provoziert bei Jö die spontane Behauptung "Das ist ein Viertel, von einem Ganzen" (177/8/9), also eine Ersetzung von Bruchteil durch ein Viertel. Der Lehrer verstärkt mit seiner Frage: "Wenn du das durch vier *teilst* könnte man sagen, das sind in vier Bruchteile?" (179/80/81) die mathematisch, quantitative Interpretation (absehen von Bruch, betonen von Teil, teilen); Jö gibt eine "abwartend, bestätigende" Antwort: "Vier Teile, ja." (180); während Ma mit dem Argument: "Nein, weil, das ist schon mehr .. Bestimmt. " (181/2) bezug auf die mathematische Operation des Teilens zu nehmen scheint, bei der es ja auch um gerechtes, gleiches Aufteilen geht. Tendenziell wird somit das Augenmerk in der Interaktion nur noch auf die quantitativen Beziehungen in Referenzbereich und Zeichen / Symbol-Ebene im epistemologischen Dreieck gerichtet.

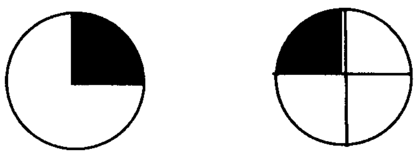
vier (gleiche) Teile, teilen ⟷ ein Viertel

Aspekt des Bruchbegriffs

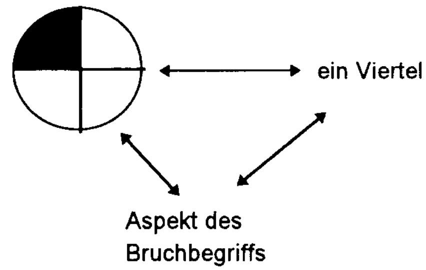
Im Kern sind schon ansatzweise und implizit zu Ende der ersten Phase im epistemologischen Dreieck die Interpretationen und Deutungen enthalten, die der Lehrer anzielt und zu Ende der Episode auch erreicht. An dieser Stelle gilt es nun, diese Sichtweise bei allen Schülern explizit zu machen, was durch die Phase 2 der Einzel- und Partnerarbeit geschehen soll. Die Aufgabe besteht darin, ein Viertel eines Papierkreises zu schraffieren; jetzt wird der (mathematische) Kreis als Referenzkontext für das Zeichen / Symbol "ein Viertel" benutzt. Hier stellt sich das Problem: Sollen die Kinder ausgehend von der Kenntnis, was ein Viertel ist, ein Viertel des Kreises schraffieren, oder umgekehrt, sollen sie aus der Kenntnis von einem Viertel eines Kreises (oder der Aufteilung eines Kreises in vier gleiche Teile) eine Erklärung für den neuen Begriff des speziellen Bruchteiles "ein Viertel" geben können (so etwas wie eine exemplarische Definition für ein Viertel)? Das nun von den Schülerinnen zu deutende epistemologische Dreieck kann man folgendermaßen verstehen:



Nach den Äußerungen während der Phase 3.2 läßt sich vermuten, daß die Kinder wohl in die Kreise in folgender "ungenauer" Weise Viertel eingezeichnet und dann eines schraffiert haben; es ist dem Dokument nicht zu entnehmen, ob die Kinder immer alle vier Teile eingezeichnet haben oder auch nur nach Abschätzen oder Abmessen genau ein einziges Viertel versucht haben zu schraffieren (der Lehrer hatte den Auftrag gegeben, *ein Viertel* zu schraffieren, aber in der Diskussion zuvor wurde schon immer auch auf "vier Teile", "durch vier teilen", "ein Bruchstück des Blumentopfes ist schon mehr als die anderen" usw. hingewiesen). Beispiele für mögliche Zeichnungen der Kinder:



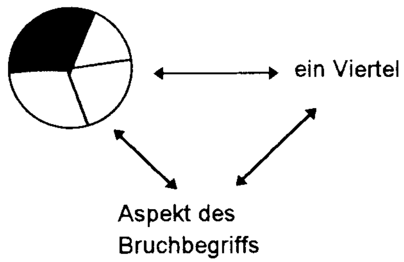
Eine exemplarische Deutung des epistemologischen Dreiecks könnte somit an dieser Stelle der Interaktion folgendermaßen aussehen:



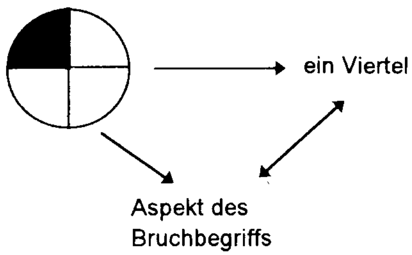
Handelt es sich um eine korrekte Interpretation? Sind es wirklich Viertel, die die Kinder schraffiert haben? Es gibt zwei mögliche Interpretationen: Aus der Kenntnis, was ein Viertel ist, kann man zum Beispiel diesen Kreis mit der eingezeichneten Schraffur durchaus als ein Viertel, also als korrekte Antwort interpretieren. Diese Interpretation scheint Achim zu Beginn im Auge zu haben, wenn er bemerkt: "Ja, es könnten vielleicht Viertel gewesen sein, aber die sind vielleicht nicht so genau gewesen . wenn man irgendwie so gezeichnet hat." (203/4/5). Dies wäre eine wechselweise Deutung zwischen "Referenzkontext / Gegenstand" und "Zeichen / Symbol", die zudem angemessen erscheint, da Zeichnungen nie völlig genau sind, man schon weiß, was ein Viertel ist, also einen ersten Begriff davon hat und damit bestimmte Situationen im Blick auf mathematische Bruchteile bewerten kann, insbesondere auch den Charakter einer mathematischen Repräsentation / eines Diagramms für eine begriffliche Beziehung hervorheben möchte: Der schraffierte Teil in der Zeichnung *ist* nicht ein Viertel, er *soll* ein Viertel *darstellen*, er *repräsentiert* (die mathematischen Beziehungen für) ein Viertel; man kann in das Diagramm ein Viertel *hineindeuten*.

Der Lehrer will eine andere Deutung der Beziehung zwischen Zeichnung und ein Viertel: Die Zeichnung muß genau sein, damit sie die Erklärungsgrundlage für den noch unbekannten Begriff "ein Viertel" werden kann; dazu isoliert er aus der Bemerkung von Achim nur das Stichwort "genau", bringt auch hiermit dann Achim dazu, seinen Vorschlag nicht weiter zu erläutern, sondern gewissermaßen zurückzuziehen und sich dem Argument des Lehrers anzuschließen, daß andere Teile nicht verschieden groß sein dürfen.

Um seinen Standpunkt zu verdeutlichen und ihn in prägnanter Weise explizit zu machen, zeigt er den Schülerinnen eine eigene Zeichnung mit Schraffur (nicht in dem Dokument enthalten), die wohl in extremer Weise die Ungenauigkeit einer Zeichnung / Schraffur für ein Viertel beinhaltet und somit sein Argument stützt. Man kann sich vielleicht eine folgende Zeichnung und damit für die Interaktion das folgende epistemologische Dreieck vorstellen:



Mit dieser extremen (oder einer ähnlich extremen) Zeichnung und Schraffur "zwingt" der Lehrer seine Schülerinnen, seinen Standpunkt in "absoluter" Weise einzunehmen, das heißt, keine "Ungenauigkeiten" irgendwelcher Art zuzulassen und als Grundlage für die Bestimmung von einem Viertel davon auszugehen, daß dann die anderen Viertel alle genauso groß sein müssen, ähnlich wie von Mt beschrieben. " wenn man ... von einem Kreis ein Viertel nimmt, dann müssen die anderen . genau so groß ..." (215-217).
Die idealen, genau gleich großen vier Teile, wie man sie im Kreis eintragen kann (und wie im Beispiel mit dem Wasser vorher schon vorgeführt) werden zur konkreten, festen Basis der Definition von einem Viertel; die genaue Zeichnung und Schraffur wird zur Definition des Zeichens "ein Viertel"; für die abschließende Phase 3.4 kann man sich in der Interaktion als Hintergrund das folgende epistemologische Dreieck vorstellen:



Die "einseitigen" Pfeile im Dreieck sollen andeuten, daß die ideale und genau gleiche Aufteilung des Papierkreises in vier Teile die Grundlage ist, von der aus man den neuen Begriff "ein Viertel" mathematisch exakt definieren kann, so wie es der Lehrer intendiert hat. Die Schlußbemerkung des Lehrers verstärkt diese Deutung in negativer Abgrenzung zu den Blumentopfscherben: "Die Mathematiker geben sich nicht zufrieden, einfach irgendwie so Blumentopfscherben." (222/3).
Die Analyse hat gezeigt, daß eine interaktive Transformation der Deutung der Ausgangsdefinition von Bruchteil stattgefunden hat; zu Beginn gab es eine auf konkrete Gegenstände und Referenzkontexte (Wortfamilie von "brechen") bezogene Definition: "Bruchteile sind kleine oder auch große Teile eines Ganzen." Am Ende der Episode kann man eine in der Interaktion verhandelte (vom Lehrer intendierte) exemplarische Definition finden, die Bruchteile nun neu definiert: "Bruchteile sind genau gleich große Teile eines Ganzen." Diese hier so nicht explizit formulierte Definition hat eine exemplarische Form für Viertel: "Die speziellen Bruchteile der Viertel sind die genau gleich großen vier Teile eines Kreises." Diese Definition ist in der Interaktion zu einer "mathematischen Definition" geworden.

Wir beobachten somit die folgende Ablösung/Ersetzung einer Definition für Bruchteile:

Definition:	mit Bezug auf	Referenzkontext:
Bruchteile sind kleine oder große Teile eines Ganzen	⟶	Blumentopf
wird in der Interaktion ersetzt durch:		
Bruchteile sind genau gleich große Teile eines Ganzen	⟶	Kreis

In welchen Schritten und mit welchen Umdeutungen und Einschränkungen kommt es zu diesem Definitions-Wechsel?

Phase, Etappe	Gegenstand / Referenzkontext	Beziehung ⟷	Zeichen / Symbol
1), 1.1	zu Bruch gehen, zerbrechen	⟶	Bruchteile (Namen)
2), 1.2, 1.3.1	Kreise, Blumentopf	⟶	Bruchteile (Namen)
3), 1.3.2	vier Blumentopfscherben	⟶	spez.Bruchteil: Viertel
4), 1.3.2	vier (gleiche) Teile, teilen	⟶	ein Viertel
5), 1.3.2	Kreis	⟷	ein Viertel
6), 3.1, 3.2	ungenau gezeichnete und schraffierte Viertel im Kreis	⟷	ein Viertel
7), 3.3	extrem ungenau gezeichnetes und schraffiertes Viertel	⟶	ein Viertel (kann kein Viertel sein)
8), 3.4	vier genau gleich große Teile im Kreis	⟶	ein Viertel

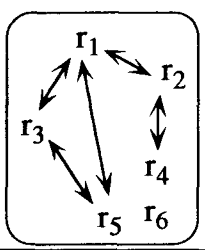
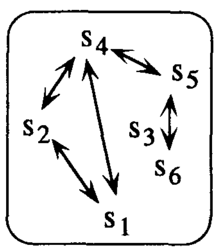
Ausgangspunkt ist, wie gesehen, folgende Definition: "Bruchteile sind kleine oder große Teile eines Ganzen". Die hier zu beobachtende Umdeutung dieser Definition beruht im wesentlichen auf einer Idealisierung und Einengung des referentiellen Gegenstandes, also einem Prozeß einer "aristotelischen Abstraktion einher gehend mit einer Einschränkung von Bedingungen". Das benutzte Beispiel für einen den Begriff "Bruchteil" erklärenden Gegenstand, nämlich der Blumentopf, wird durch die "Anzahl 4", durch "teilen durch 4", und dann schließlich durch den "Kreis als einem idealen Ganzen" ersetzt. Man abstrahiert durch Absehen von Eigenschaften des konkreten Blumentopfes, kommt so auf Zahlen und mathematische Operationen / Beziehungen. Schließlich wird noch eine "verschärfte" Bedingung zusätzlich eingeführt: Beim mathematischen Teilen in vier Teile müssen alle 4 Teile genau gleich groß sein; diese Bedingung wird zur Definition von einem Viertel herangezogen: wenn man ein Viertel von einem Kreis bestimmt, dann müssen alle vier Viertel gleich groß sein. Damit ist interaktiv die vom Lehrer angestrebte mathematische Definition von Bruchteilen im Prinzip erreicht: "Bruchteile sind genau gleich große Teile eines Ganzen."
Im Prinzip haben beide Definitionen von Bruchteilen den gleichen epistemologischen Status; die erste beruht auf *konkreten* Gegenstandsbezügen, während die zweite einen *idealen* Gegenstand als Referenz benutzt. Beiden ist der Typ der Definition gemeinsam: Die Gegenstände (ob nun konkret oder ideal) und ihre Eigenschaften sind die einzige, erklärende Grundlage für die Definition von Bruchteilen; was Bruchteile sind, das kann man eindeutig aus den Eigenschaften der Gegenstände ableiten.

Der interaktive Diskussionsverlauf zeigt, wie die Rollen von "Gegenstand / Referenzkontext" und "Zeichen / Symbol" zeitweise partiell festgelegt und wie diese Rollen von "Gegenstand / Referenzkontext" und "Zeichen / Symbol" interaktiv ausgetauscht werden; insbesondere die Rolle für den Kreis und die "Bruchteile" des Kreises wechselt in der Interaktion; einmal ist der Kreis ein "Gegenstand", auf den Bezug genommen wird, ein anderes Mal ist der Kreis im Sinne eines idealen geometrischen Modells als ein "Zeichen / Symbol" zu verstehen.

b) Epistemologische Begriffsanalyse des interaktiven Verständnisses von "ein Viertel"

Bei Prozessen der mathematischen Bedeutungsentwicklung ist es möglich, mittels der epistemologischen Analyse von alltäglichen interaktiven Kommunikationsprozessen folgende erkenntnistheoretische Problematik zu untersuchen. Bei der Erklärung von unbekannten Symbolen geht es zunächst und auch nur vordergründig darum, die unbekannten Zeichen mit Hilfe des relativ vertrauten Referenzkontextes und mittels bekannter Sachverhalte zu deuten bzw. den unbekannten Symbolen einen bekannten Namen zu geben. Im Verlaufe der Entwicklung des theoretischen, mathematischen Wissens im eigentlichen Sinne wird es immer mehr notwendig, daß man anstelle einer eindeutigen Beziehung zwischen einzelnen Elementen eines Referenzbereichs und eines Zeichensystems, sowohl den Referenzbereich als auch das Zeichen / Symbolsystem als eine reichhaltige Struktur sieht und demgemäß Beziehungen zwischen den strukturellen Verbindungen von Referenzkontext und Zeichensystem herstellt.

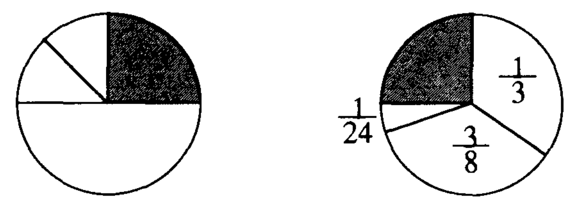
Der grundlegende Unterschied zwischen diesen beiden Formen der Verknüpfung zwischen "Gegenstand / Referenzkontext" und "Zeichen / Symbol" läßt sich in folgender Gegenüberstellung verdeutlichen:

	Gegenstand/ Referenzkontext	Wechselbeziehungen / Deutungen	Zeichen / Symbol
direkte Beziehung zwischen einzelnen Elementen	einzelne Elemente $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$	$\longleftrightarrow$	einzelne Elemente $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$
systemische Beziehung zwischen Netzwerken von Beziehungen zwischen verschiedenen Elementen	Netzwerk zwischen einzelnen Elementen 	$\longleftrightarrow$	Netzwerk zwischen einzelnen Elementen 

In der betrachteten Unterrichtsepisode wird vor allem immer wieder zwischen dem "Gegenstand / Referenzkontext" und dem "Zeichen / Symbol" eine direkte Beziehung zwischen einzelnen Elementen hergestellt. Z. B. wird im Verlaufe der Interaktion - stark durch den Lehrer veranlaßt - folgendes kollektive Argument entwickelt: "Wenn man jetzt ein Viertel äh, von dem Kreis einzeichnet . dann müssen die anderen drei Viertel genau so groß sein wie das eine ." L: " Alle Viertel müssen gleich " Mt: "gleich groß sein" L: " groß sein .. Ja." (219-223).

Dieses Argument läßt sich folgendermaßen zusammenfassen: "Wenn man ein Viertel eines Kreises zeichnen möchte, und vier Teile des ganzen Kreises zeichnet, dann müssen alle vier Teile gleich groß sein." (gemäß der angezielten Definition: "Bruchteile sind genau gleich große Teile eines Ganzen."). Kurz: "Wenn man ein Viertel eines Kreises hat, dann sind die anderen drei Viertel alle gleich groß." Bzw. mit dem Hinweis des Lehrers: "Wenn man ein Viertel eines Kreises hat, dann sind alle Viertel gleich groß." Diese Aussage wird vom Lehrer wohl zunächst spontan als Herstellungsregel für ein Viertel entsprechend einem „prozeduralen Verständnis (im Sinne von MAIER) intendiert gewesen sein; solche Regeln gerinnen jedoch häufig in der mathematischen Interaktion mangels der bewußten Reflexion einer expliziten Definition zu einer festen Working Definition. Im weiteren Gesprächsverlauf kann man beobachten, daß diese Regel als Definition für ein Viertel benutzt wird, und damit tritt die Ungenauigkeit, ja der Mangel dieses Arguments deutlich hervor, insbesondere in der letzten kurzen Form. Zunächst: Wenn von den drei anderen Teilen schon als drei Vierteln gesprochen wird, dann müssen diese vier Teile alle per Viertel gleich groß sein; damit ist wohl in dem Argument gemeint: "Wenn man ein Viertel eines Kreises hat, dann sind alle vier Teile alle gleich groß."

Diese "Wenn - Dann - Aussage" ist nur in der umgekehrten Form allgemeingültig: "Wenn alle vier Teile eines Ganzen gleich groß sind, dann hat man ein Viertel (bzw. vier Viertel)." Die interaktiv konstituierte Aussage: "Wenn man ein Viertel hat, dann müssen alle vier Teile gleich groß sein." ist nicht gültig, wie man an verschiedenen Beispielen belegen kann.



Diese Beispiele zeigen, daß der Bruchteil "ein Viertel" nicht in strikter und direkter Abhängigkeit oder Vergleich mit den anderen drei (oder auch nur zwei oder fünf und mehr) Teilen eines Ganzen verstanden und definiert werden muß. Der Bruchteil "ein Viertel" existiert als ein eigenständiges Konzept unabhängig von der idealen Teilung eines Ganzen in vier gleiche Teile. Diese Vorstellung hilft zwar, die Idee von vier Vierteln und auch von einem Viertel sich in einfachen Fällen zu vergegenwärtigen; so "sieht" man etwa in beiden Kreisen beim Blick auf das schraffierte Viertel vielleicht spontan dahinter die prototypische Vierteilung des Kreises, die Achim sich mit der entsprechenden Faltung des Papierkreises hergestellt hat, aus der man - im Rahmen zulässiger Ungenauigkeiten - entnehmen kann, daß es sich in der Tat um ein Viertel des Kreises handelt.

In der Episode wird das pragmatische Argument herausgebildet: "Wenn man ein Viertel eines Kreises hat, dann müssen alle vier Teile gleich groß sein." Dies ist ein exemplarischer Fall für das der allgemeinen Definition unterliegende Argument: "Bruchteile sind genau gleich große Teile eines Ganzen." Wir sehen, daß auch diese allgemeine Definition nicht stimmt, Bruchteile eines Ganzen können durchaus verschieden groß sein. Auch Blumentopfscherben können als mathematische Bruchteile interpretiert werden, auch wenn sie zugegebenermaßen nur schwer mit Zahlenverhältnissen zu quantifizieren sind.

Im Grunde unterliegt der Idee, nach der der Lehrer ein Viertel definiert, nur eine brauchbare Vorgehensweise zur Konstruktion eines Viertels eines Kreises, indem man den Kreis - etwa mit Hilfe der Faltungs-Idee von Achim - in vier möglichst genau gleich große Teile teilt und sich so ein Viertel herstellt. Diese Herstellungsregel eines Viertels: "Wenn man ein Viertel eines Ganzen konstruieren möchte, dann teile man das Ganze in genau vier gleiche Teile." wird in unzulässiger Weise zu einer Definition "verallgemeinert": "Wenn man ein Viertel hat, dann sind alle Teile gleich groß."

Hinter dieser Deutung steht die folgende unzulässige logische Aussage:

"Einer von vier Teilen eines Ganzen ist eine Viertel."	$\Leftrightarrow$	"Alle vier Teile eines Ganzen sind gleich groß."

In einer "Richtung" ist diese Aussage allgemeingültig:

"Einer von vier Teilen eines Ganzen ist eine Viertel."	$\Leftarrow$	"Alle vier Teile eines Ganzen sind gleich groß."

In der anderen "Richtung" ist diese Aussage falsch:

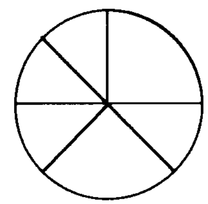
"Einer von vier Teilen eines Ganzen ist eine Viertel."	$\Rightarrow$	"Alle vier Teile eines Ganzen sind gleich groß."

Die hier analysierte pragmatische, allgemeine Definition von "einem Viertel", wie sie im Verlaufe der Unterrichtsinteraktion konstituiert wird, dient vor allem dazu, im Rahmen der Änderungen und Entwicklungen der Beziehungen zwischen "Gegenstand / Referenzkontext" und "Zeichen / Symbol" im epistemologischen Dreieck die Erklärung / Definition dieses speziellen Bruchteils immer eindeutig auf der Grundlage des Gegenstandes (erst konkret, dann ideal) zu belassen; es gibt scheinbar eine feste, empirisch idealisierte Grundlage, die genau bestimmt und sagt, was ein Viertel ist. Auf diese Weise wird somit angestrebt, eine möglichst eindeutige und direkte Beziehung zwischen den einzelnen Elementen von Referenzbereich und Symbolbereich festzulegen. Die Interaktion zur Konstituierung dieser "Definition" von "ein Viertel" läßt sich als ein "thematisches Muster" (VOIGT 1994, S. 98) verstehen, in welchem vor allem die konkreten Aspekte des idealen Kreises thematisiert werden.

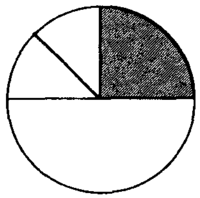
Würde man die hier anhand der Diagramme dargestellte Situation zulassen, also auch Viertel in Kreisen mit verschieden großen und nicht immer genau vier gleichen Bruchteilen, dann müßte ein Viertel als mathematischer Begriff auch unabhängig von einer genauen Aufteilung eines Ganzen in vier gleiche Teile existieren; ein Viertel wäre nicht mehr absolut durch eine Standardkonfiguration vorgegeben. Und dies wäre

eine theoretische, flexible Auffassung des Bruchbegriffs, nach der letztlich die mathematischen Begriffe in einer grundlegenden Beziehung eigenständig existieren und nicht auf empirische oder idealisierte, quasi empirische Gegenstände reduziert werden können. Man denke etwa an die Verstehens-Probleme bei der Bruchrechnung im Mathematikunterricht, wenn bedeutungslos und schematisch die Regeln der Addition, Multiplikation und der Division von Brüchen benutzt werden, weil die anfangs hergestellte konkrete Festlegung der Brüche als feste Teile eines gegebenen Ganzen keine inhaltliche Bedeutung mehr beitragen kann, die hier nur von einer Interpretation eines mathematischen Bruchs als einer variablen "Beziehung" zwischen Zahlen (Teilen und Ganzem) zu erwarten ist.

Eine solche Loslösung der Deutung des Bruchteiles von einer festen Bindung an einen Gegenstand zu einem eigenständigen Konzept in einer echten Wechselbeziehung zwischen "Gegenstand / Referenzkontext" und "Zeichen / Symbol" macht den Begriff "Bruchteil" nach und nach eigenständig und weist dem Kreis und den Darstellungen von Bruchteilen im Kreis die Rolle eines strukturellen Referenzkontextes / Diagramms zu, welches in bestimmten Formen die Beziehungen von Bruchteilen symbolisiert. Man muß aber auch eine tatsächlich eigenständige Idee von "ein Viertel" haben, um diese Beziehung ins Diagramm hineinlesen, in ihm entdecken zu können. So wird man die verschiedenen "Viertel" in diesem Kreis nicht einfach ablesen und entnehmen können, man muß mit einer eigenständigen begrifflichen Idee von "ein Viertel" viele Viertel in dieses Diagramm hineinsehen (genauer: die entsprechenden Beziehungen, die die Beziehung "ein Viertel" symbolisieren, ins Diagramm aktiv hineinkonstruieren).



Auf diese Weise ließe sich eine systemische Beziehung zwischen Netzwerken von Beziehungen zwischen verschiedenen Elementen im Referenzbereich sowie im Symbolbereich entwickeln. Vielleicht war in der Ausführung von Achim der Keim einer solchen begrifflich eigenständigen Idee mit einer relationalen Deutung von einem Viertel enthalten, oder er wäre vielleicht in der weiteren Interaktion entwickelbar gewesen. Auf die Frage des Lehrers: "Waren es Viertel? . Waren es keine Viertel?" (201/2) hat Achim folgendermaßen reagiert: "Ja, es könnten vielleicht Viertel gewesen sein, aber die sind vielleicht nicht so genau gewesen . wenn man irgendwie so gezeichnet hat." (203/4/5). Um solch eine Aussage treffen zu können, daß ungenau gezeichnete vier Teile (oder auch nur ein Teil) eines Ganzen eines oder mehrere Viertel sind, muß man sich auch schon Viertel partiell unabhängig von einer empirisch reduktiven Definition vorstellen können. Eine offene, die Unterschiede von Zeichenungenauigkeit und idealem Modell betreffende Diskussion von "genau", oder auch die Präsentation einer Lehrerzeichnung in ihrer Struktur ähnlich zu dieser Figur,



hätte zu einer Öffnung in der Beziehung zwischen "Gegenstand / Referenzkontext" und "Zeichen / Symbol" beitragen und sie ausbauen können; statt dessen führt der Lehrer durch seine Einschränkung der Aussage von Achim auf das Stichwort "ungenau" auf eine eindeutig festgelegte Beziehung zwischen "Kreis mit vier genau gleich großen Teilen" und "einem Viertel" zurück.

5. Vergleich der Analyseansätze von MAIER und STEINBRING

Nachdem nun die beiden Ansätze von MAIER und STEINBRING zur Analyse von Schülerverstehen im alltäglichen Mathematikunterricht vorgestellt und exemplifiziert wurden, erheben sich Fragen des Vergleichs:

- Was haben die beiden Ansätze gemeinsam und worin unterscheiden sie sich?
- Basieren eventuelle Gemeinsamkeiten und Unterschiede auf wesentlich verschiedenen Auffassungen und verfolgen beide Ansätze unterschiedliche Erkenntnisinteressen und Ziele?

Übereinstimmung besteht in der *formalen Charakterisierung von Verstehen* insoweit, als MAIER wie STEINBRING Verstehen auf Zeichen und Symbole, auf Sprache beziehen, die der Verstehende wahrnimmt. Verstehen bedeutet Generierung von Bedeutung durch und von Sinn für den Verstehenden, die nicht etwa in den wahrgenommenen Zeichen und Symbolen fertig, gleichsam übernehmbar gegeben sind. Sie werden im Verstehensprozeß durch Entschlüsseln, Deuten, Rekonstruieren oder Konstruieren erst geschaffen. Die Bezugnahme auf Referenzobjekte kann dabei explizit oder implizit erfolgen.

Es gibt aber auch gravierende Unterschiede in der Art, wie sich beide dem Phänomen Verstehen nähern. Für MAIER handelt es sich um einen intentionalen Prozeß, um ein zielgerichtetes geistiges Handeln einer Person, das in einer rekurrierenden Prozeßfolge immer wieder auf früher Verstandenes zurückgreift. Damit richtet er den Blick deutlich auf ein verstehendes Individuum, das – angestoßen durch Äußerungen anderer – sein Wissen aufbaut, indem es Neues in bereits Verfügbares integriert. STEINBRING hingegen betont das interaktive Hervorbringen, die gemeinsame Konstitution von Sinn und Bedeutung im gedanklichen Austausch und sieht Verstehen damit mehr als einen sozialen Prozeß, der sich aktuell in der unterrichtlichen Interaktion entfaltet. Dieser Unterschied zeigt sich schon sprachlich in den beiden Analyseniederschriften. Bei MAIER haben alle Sätze, die über Analyseergebnisse berichten, stets einen einzelnen Schüler bzw. eine einzelne Person zum Gegenstand: „Zuerst antwortet Markus...“, „Für ihn ist der Begriff 'Bruchteil' mit der Vorstellung ... verbunden“, „Markus sieht sich ... bestätigt“, usw. Bei STEINBRING dagegen herrschen als Modus das überindividuelle Passiv und die objektivierende Satzkonstruktion vor: „...wird zu einer ersten 'Mathematisierung' benutzt, ...“, „Damit ergibt sich ... eine Bedeutungsverschiebung...“, „...treten die quantitativen (mathematischen) Aspekte in den Vordergrund...“, „Tendenziell wird somit das Augenmerk in der Interaktion nur noch ...“ Wenn er dennoch Äußerungen des Lehrers oder einzelner Schüler anspricht, dann geschieht dies im Sinne eines Beitrags zur interaktiven Konstitution gemeinsamer Bedeutungen und gemeinsamen Wissens.

Freilich versucht auch STEINBRING, das Verstehen von Mathematik im alltäglichen Unterricht in zweierlei Hinsicht zu erfassen: zum einen als Verstehen, das der einzelne Schüler von gewissen mathematischer Inhalten entwickelt; zum anderen als ein Prozeß, der sich in Wechselbeziehung zwischen inhaltlichen und sozialen Bedingungen vollzieht. In dessen Verlauf geht es nicht bloß um das Aufassen eines mathematischen Sachverhalts selbst, sondern gleicherweise darum, ihn so aufzufassen, wie ihn der Lehrer (oder auch ein Mitschüler) versteht bzw. verstanden wissen möchte. Diese schwierige Wechselbeziehung zwischen dem individuellen und interaktiven, vom Lehrer bestimmten mathematischen Verstehen kann sich verallgemeinernd oder auch einschränkend auf das Wissen um mathematische Sachverhalte auswirken.

Die individuelle wie die soziale Perspektive auf Verstehen haben ihre Vorzüge und Nachteile. Seine kollektive Betrachtung der Wissenskonstitution ermöglicht es STEINBRING, die Prozesse der Bedeutungsfindung in ihrer Entwicklung im Verlauf einer Unterrichtsepisode zu betrachten und Modifikationen der konstituierten Bedeutung in den Blick zu nehmen. Man findet in seinem Analysebeispiel immer wieder Sätze der Art „In welchen Schritten und mit welchen Bedeutungen und Einschränkungen kommt es zu diesem Definitionswechsel?“ oder „Die hier zu beobachtende Umdeutung...“. Die individuellen Beiträge einzelner Schüler zur unterrichtlichen Kommunikation sind hingegen in der Regel von so lokaler Art, daß MAIER bei ihnen Veränderungen und Entwicklungen in ihrem Verstehen zunächst nicht zu erfassen vermag. (Sogar die von ihm durchgeführten Einzelinterview im Anschluß an den Unterricht können in der Regel nur „Momentaufnahmen“ liefern.)

Umgekehrt konzentriert die soziale Perspektive STEINBRING die Aufmerksamkeit auf das rational-kognitive Geschehen, das den unterrichtlichen Diskurs prägt. MAIER hingegen versucht, mehrere am Verstehen des Individuums beteiligt personale Dimensionen zu betrachten und dabei insbesondere auch emotionale Aspekte einzubeziehen (Verstehen als mentaler Prozeß). Freilich zeigt sich in seinen Analyseergebnissen deutlich, wie schwer andere als kognitive Aspekte des Verstehens der Interpretation zugänglich sind. Die Schwierigkeiten, andere als kognitive bzw. epistemologische Dimensionen des mathematischen Verstehens von Schülern zu erfassen, sind aber zu einem beträchtlichen Teil auch darin begründet, daß beide Autoren sich vornehmlich solcher Analyse-Instrumente bedienen, die auf die kognitiven mathematischen Aspekt ausgerichtet sind.

Deutliche Unterschiede zwischen den beiden Ansätzen zeigen sich in der *inhaltlichen Charakterisierung von Verstehen* mathematischen Wissens. STEINBRING konzentriert sich hier auf eine sehr eingehende, vertiefte Analyse dessen, was MAIER die modale Dimension des Verstehens nennt. Er fragt danach, wie die Verstehenden beim Deuten Symbole und Zeichen zu Gegenständen und Referenzkontexten in Beziehung bringen und so Bedeutung konstituieren; dabei ist für "mathematisches Verstehen" insbesondere erforderlich, daß die empirischen, konkreten Aspekte mehr und mehr durch eine relationale Sichtweise auf die Beziehung zwischen Gegenständen abgelöst werden und die Struktur in den Vordergrund tritt. MAIER unterscheidet in der modalen Dimension ausschließlich an Sprache gebundenes von explizit oder implizit intermodalem Verstehen. Er möchte aber, neben der modalen, noch eine zweite, von ihm mental genannte inhaltliche Dimension des Verstehens erfassen. Sie betrifft konzeptuelle, prozedurale, relationale, argumentative, elaborative und reflexive Aspekte des Verstehens mathematischer Sachverhalte.

Was die *Evaluation des Verstehens* angeht, zeigen die beiden Ansätze Gemeinsamkeiten wie auch unübersehbare Unterschiede. Einig sind sich MAIER und STEINBRING vor allem in zwei Gesichtspunkten: Zum ersten kann es nicht um eine dichotome Entscheidung der Frage gehen, ob bei Schülern Verstehen stattgefunden hat oder nicht. Untersucht wird vielmehr, wie bzw. in welcher Weise dies geschehen ist. Zum zweiten stehen die Analysen unter der Vorannahme, daß sich Verstehensprozesse nicht, quasi objektiv, als 'richtig' oder 'falsch' bewerten lassen. Verstehen von Individuen bedeutet immer das Bemühen, sich einen persönlichen Sinn für neue Sachverhalte anzueignen. Dabei geht es also darum, neue Zeichen und Symbole, Sprache, mit Hilfe von schon relativ vertrauten Referenzbereichen zu interpretieren. Ein Individuum versteht etwas, indem es den neuen Zeichen, der Sprache, einen persönlichen Sinn, einen Bezug verleiht. Ob dieser Bezug, diese Bedeutung nun, z. B. gemessen an mathematischen Standards, richtig oder falsch ist, tangiert zunächst nicht den Verstehensprozeß selbst. 'Richtiges' Verstehen ist nicht schon vorab durch mathematische Standards objektiv geklärt. Dies schließt dennoch nicht aus, daß Verstehen evaluiert wird.

Wie das geschehen soll, läßt allerdings wieder weitgehende Unterschiede der beiden Theorieansätze deutlich werden. STEINBRING versucht, mit Hilfe eines epistemologischen Theorieansatzes die beobachtbaren Anstrengungen des interaktiven Verstehens zu beschreiben sowie Möglichkeiten und Hindernisse der Generierung von Verstehen (als Herstellung von Beziehungen zwischen neuen Symbolen und bekannten Referenzbereichen) zu identifizieren. Demzufolge hat die Evaluation ihren Schwerpunkt in mathematisch-epistemologischen Kriterien, wobei der Analysierende seine Kriterien an das im sozialen Prozeß generierte Verstehen – im Sinne einer Deutung von Symbolen und Zeichen mit Bezug auf Gegenstände und Referenzkontexte – anlegt.

Auch MAIER evaluiert – allerdings das individuelle Verstehen einzelner Schüler – nach mathematischen Kriterien. Er will sich aber nicht auf dieses Kriterium beschränken, sondern nimmt die Lehrerintentionen – d. h. die Frage, welche Art des Verstehens der Lehrer von den Schülern im Unterricht erwartet – und das unterrichtliche Sinnangebot – also die Frage, wodurch und wie das Verstehen der Schüler im Unterricht angeregt wurde – als Kriterien für weitere Evaluationsschritte hinzu. Eine solche Differenzierung in der Evaluation erschiene im Fall von STEINBRING wenig sinnvoll, wo Verstehen und Sinnangebot als interaktiv zusammenhängend und nicht als personell voneinander getrennte Prozesse gesehen werden.

MAIER benutzt ein elaboriertes Evaluationsmodell, in dem vorab die Dimension und die wissensbezogenen Charakteristika des mathematischen Verstehens auf der Grundlage theoretischer Überlegungen mehr oder weniger explizit ausgearbeitet sind, um eine interpretative Bewertung von Verstehensprozessen individueller Schüler vornehmen zu können.

Ein anderer Unterschied besteht darin, daß MAIER die Evaluation des Verstehen ausdrücklich von dessen inhaltlicher Charakterisierung trennt und als gesonderten Schritt erst nach der Deskription gemäß dem Analysemodell folgen läßt. Bei STEINBRING hingegen stellen Beschreibung und Bewertung von mathematischem Verstehen eine Einheit dar. Man erkennt das an Sätzen in seiner Anlyseniederschrift wie "Handelt es sich um eine korrekte Interpretation? Sind es wirklich Viertel, die die Kinder schraffiert haben?" oder "Mit dieser extremen (oder einer ähnlich extremen) Zeichnung und Schraffur 'zwingt' der Lehrer seine Schüler, seinen Standpunkt in 'absoluter Weise einzunehmen,...".

Der Vergleich der beiden Ansätze zur Analyse von Verstehensprozessen im alltäglichen Mathematikunterricht läßt deutlich werden, daß sie – bei aller Verwandtschaft der angewendeten Untersuchungsmethode und bei allen auch bestehenden Gemeinsamkeiten in der Auffassung von Verstehen – doch auf recht unterschiedlichen *Grundannahmen* basieren und auch von unterschiedlichem *Erkenntnisinteresse* geleitet sind. STEINBRING betrachtet das gemeinsam erarbeitende Gespräch, wie es sich in der analysierten Episode präsentiert, als eine aktuelle weit verbreitete Unterrichtsform, in der den Schüler die gängigen mathematischen Lernmöglichkeiten bereitgestellt werden. "Mathematisches Verstehen" als ein Prozeß der "Herstellung von Deutungen für unbekannte, neue Symbole" ist zu einem großen Teil nur sozial und nicht allein durch individuelle Anstrengungen realisierbar. Daher liegt es nahe, Verstehen als interaktive Generierung von Bedeutungen aufzufassen. Ein Forschungsziel besteht darin, für den Verlauf dieses Prozesses der Bedeutungsgenerierung, wie er sich in dem von der sog. 'Erarbeitung' geprägten, alltäglichen Mathematikunterricht ereignet, mögliche "Ursachen" und "Wirkungen" zu identifizieren sowie epistemologische Zweckmäßigkeiten und Störungen in diesem interaktiven Prozeß aufzudecken. Lehrer als mögliche Adressaten einer solchen Forschung sollten bezüglich ihres eigenen Unterrichts sowie der Rolle, die sie in diesem Unterricht notwendiger Weise spielen, auf mögliche und für sie nicht erkennbare Probleme aufmerksam gemacht werden.

MAIER hält den gemeinsam erarbeitenden Mathematikunterricht grundsätzlich nicht für eine dem Aufbau mathematischen Wissens angemessene Lehr- und Lernform. Er scheint ihm nicht geeignet, dem Lehrer Einblick in die Verstehensprozesse bei einzelnen Schülern zu geben und gezielt Einfluß auf sie zu nehmen. Mit seiner Beschreibung und Evaluation individuellen Verstehens möchte er die Aufmerksamkeit von Lehrern als Adressaten seiner Forschung darauf lenken, wie sich die Generierung mathematischen Wissens beim einzelnen Schüler abspielen, und in welcher Beziehung diese nicht nur zu mathematischen Kriterien und Lehrerintentionen, sondern auch zum unterrichtlichen Sinnangebot stehen kann. Damit sollen auch Schwächen des gemeinsam erarbeitenden Unterrichtsgesprächs hinsichtlich des Lernerfolgs der Schüler offengelegt und die Suche nach Unterrichtsformen angeregt werden, die individuelles Lernen und die dialogische 'Kontrolle' und Initiierung individueller Verstehensprozesse durch den Lehrer bzw. die Lehrerin ermöglichen (Lehrer-Schüler-Gespräch in Verbindung mit Einzelarbeit, textlichen Eigenproduktionen von Schülern in der Einzel-, Partner- oder Kleingruppenarbeit, Gespräch von Partnern und innerhalb von Gruppen sowie Lehrergespräch mit Partnern und Kleingruppen).

So gesehen basieren die beiden Ansätze auf unterschiedlichen Grundannahmen über die Möglichkeiten der Analyse von Verstehensprozessen und verfolgen unterschiedliche Ziele und Erkenntnisinteressen: Sie verfolgen verschiedene didaktische Paradigmata.

Literatur

AESCHBACHER, U.: Unterrichtsziel Verstehen: Über die psychischen Prozesse beim Denken, Lernen und Verstehen. Stuttgart: Klett 1986

ANDERSON, J. R.: The architecture of cognition. Cambridge: Harvard Univ. Press 1983

BALLSTAEDT, S.P.: Texte verstehen - Texte gestalten. München/Wien/Baltimore: Urban & Schwarzenberg 1981

BAUERSFELD, H.: Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: BAUERSFELD u.a. (Hrsg.): Lernen und Lehren von Mathematik. Köln: Aulis, 1983, S. 1 - 56

BECK, CH. & MAIER, H.: Mathematkdidaktik als Textwisssenschaft. Zum Status von Texten als Grundlagge empirischer Forschung. In: JMD. 15(1994a) H 1-2, S. 35 - 78

BECK, CH. & MAIER, H.: Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung. In: Maier, H. & Voigt, J. (Hrsg.): Verstehen und Verständigung. Köln: Aulis 1994b, S. 43 - 76

CHOMSKY, N.: Aspects of theory of syntax. Cambridge Mass: M.T:T. Press 1965

DAVIS, R.B. & MCKNIGHT C.C.: Modelling the process of mathematical thinking. In: Journal for Childrens' Mathematical Behavior 2 (1979), H. 2, S. 91 - 113

DAVIS, R.B.: Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education. London/Sydney: Croom Helm, 1984

DAVIS, R.B.: Understanding "Understanding". In: J. of Mathematical Behavior 11 (1992), S. 225 - 241

DILTHEY, W.: Die Entstehung der Hermeneutik, 1900. Gesammelte Schriften, Band 5, 1924

DÖRFLER, W. (Hrsg.): Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Wien: Hölder - Richter - Tempsky / Stuttgart: Teubner 1988

FREGE, G.: Über Sinn und Bedeutung. In PATZIG, G. (ed.), Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1969, S. 40 - 65.

GADAMER, H.-G.: Wahrheit und Methode. Grundzüge einer philosophischen Hermeneutik. Tübingen 1960

GARDENER, H.: Dem Denken auf der Spur. Stuttgart: Klett-Cotta 1989

GLASERFELD, E. v.: Wissen, Sprache und Wirklichkeit. Arbeiten zum radikalen Konstruktivismus. Braunschweig: Vieweg 1987

HERSCOVICS, N. & BERGERON, J.C.: Models of Understanding. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 15 (1983) H. 2, S. 75 - 83

HÖRMANN, H.: Meinen und Verstehen - Grundzüge einer psychologischen Semantik. Frankfurt/Main: Suhrkamp, 1976

INDURKHYA, B.: Metaphor as change of representation: An interactiontheory of cognition and metaphor. In: HINTIKKA, J. (Hg.)Aspects of metaphor. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994, S. 95 - 150.

JAHNKE, H. N. & OTTE, M.. On 'Science as a Language'. In H. N. JAHNKE & M. OTTE (Eds.), Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century, Dordrecht: Reidel, 1981.

MAIER, H.: Analyse von Schülerverstehen im Unterrichtsgeschehen - Fragestellungen, Verfahren und Beispiele. In: MAIER, H. & VOIGT, J. (Hrsg.): Interpretative Unterrichtsforschung. Köln: Aulis 1991, S. 117 - 151

MAIER, H.: "Verstehen" im Mathematikunterricht - Explikationsversuch zu einem vielverwendeten Begriff. In: Bender, (Hg.): Mathematikdidaktik in Theorie und Praxis. Berlin: Cornelsen 1988, S. 131 - 142

MASLOW, A.H.: Motivation und Persönlichkeit. Olten: Walter 1977

MEHAN, H.: Learning lessons: Social organization in the classroom. Cambridge: Havard University Press, 1979

MEYER-DRAWE, K.: Lernen als Umlernen. Zur Negativität des Lernprozesses. In: LIPPITZ, W. & MEYER-DRAWE, K.: Lernen und seine Horizonte. Königstein/ Ts 1982, S. 530 - 541

NASSEN, U. (Hrsg.): Klassiker der Hermeneutik. Paderborn u.a. : Schöningh 1982

OGDEN, C. K., & RICHARDS, F. A.: The Meaning of Meaning. Routledge and Kegan, London 1923.

PIMM, D.: Symbols and meanings in school mathematics, London: Routledge, 1995.

PIRIE, S.E.B. & KIEREN, T.E.: A Recursive Theory of Mathematical Understanding. In: For the Learning of Mathematics 9 (1989), H. 3, S. 7 - 11

REININGER, R.: Metaphysik und Wirklichkeit. München/Basel 1970.

SCHAEFFLER, R.: Verstehen. In: KRINGS & BAUMGARTNER & WILD (Hrsg.): Handbuch philosophischer Grundbegriffe, Bd. 6. München: 1973

SCHANK, R. C. & ABELSON, R.: Scripts, Plans, Goals and Understanding. Hillsdale N.J.: Erlbaum 1977

SEILER, Th.B.: Begriffsentwicklung und die Veränderung des Verstehens. In: ENGELKAMP, J. (Hrsg.): Psychologische Aspekte des Verstehens. Berlin: Springer, 1984, S. 55 - 74

SIERPINSKA, A.: Understanding in Mathematics. London/ Washingston: The Falmer Press 1994

SINCLAIR, J. & COULTHARD, R.: Towards an analysis of discourse: The English used by teachers and pupils. London: Oxford university Press, 1975

SKEMP, R.R.: Goals of learning and qualities of understanding. In: Mathematics Teaching 77 (1979), S. 44 - 49

STEINBRING, H.: Routine and Meaning in the Mathematics Classroom. In: For the Learning of Mathematics, 9(1), 1989, 24 - 33.

STEINBRING, H.: The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. Educational Studies in Mathematics, 22, 1991a, S. 503 - 522.

STEINBRING, H.:. Eine andere Epistemologie der Schulmathematik - Kann der Lehrer von seinen Schülern lernen? mathematica didactica, 14(2/3), 1991a, S. 69 - 99.

STEINBRING, H.: Elements of Epistemological Knowledge for Matheamtics Teachers. Erschein in: Journal of Mathematics Teacher Education, 1998

STEINER, G.: Zum Prozeß des Verstehens im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge zur 24. Bundestagung für Didaktik der Mathematik 1990. Bad Sulzdetfurth: Franzbecker 1991b, S. 13 - 28

STREEFLAND, L.: Fractions in realistic mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

UHLE, R.: Verstehen und Verständigung im Unterricht - Hermeneutische Interpretationen. München: Juventa, 1978

VOIGT, J.: Entwicklung mathematischer Themen und Normen im Unterricht. In: MAIER, H. & VOIGT, J. (Hrsg.): Verstehen und Verständigung. Köln: Aulis 1994, S. 77 - 111

VOLLRATH, H.-J.: Paradoxien des Verstehens von Mathematik. In: Journal für Mathematikdidaktik 14 (1993), H. 1,S. 35 - 58

WACHSMUTH, I.: Mathematische Fertigkeiten und Mathematikverständnis. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 1985

WAGENSCHEIN, M.: Verstehen lehren. Weinheim: Belz 1968

WESSELS, M.G.: Kognitive Psychologie. München/Basel: Reinhardt 1990

WITTGENSTEIN, L.: Philosphische Untersuchungen. In: ANSCOMBE, G.E. & RHEES, R. (Hrsg.): "Schriften". Oxford: Suhrkamp 1953

Anhang:

Transkriptausschnitt aus "Einführung in die Brüche II" (5. Klasse HS)

Die Transkription erfolgt in Form numerierter Partiturzeilen, die man sich linear aneinandergefügt denken muß. Jeder Sprechende erhält eine mit L (für Lehrer) oder der

Abkürzung eines Schülernamens eingeleitete Zeile; gleichzeitig Gesprochenes steht untereinander. Sprechpausen von 1 bis 3 Sekunden sind mit der entsprechenden Zahl von Punkten markiert, längere als Kommentar in Doppelklammern. Einfach Eingeklammertes konnte nicht sicher oder, im Fall von Punkten, gar nicht verstanden werden. Unterstrichene Wörter wurden auffallend betont. Schrägstriche markieren Änderungen der Formulierungsabsicht.

161 L Gut! Ihr habt jetzt so viele Wörter gehabt irgendwie mit

162 L "brechen" (..) bitte Was sind jetzt eigentlich
S1 Das sind Bruchteile.

163 L Bruchteile? ((4 sec))
Ma Wenn es nicht das Ganze ist, sondern

164 L Nicht das
Ma nur ein kleiner Teil davon . oder auch ein großer Teil

165 L Ganze, sondern nur ein Teil davon.
Ma Ich glaub, ich habe hier

166 L
Ma auch so etwas. Ist auch hier auch so etwas. Ist hier auch

167 L
Ma so ein bißchen was von dem Großen. ((hält unterschiedlich

168 L Nicht das
Ma große Papierkreise in die Höhe und nuschelt))
SS Hm?

169 L Ganze, sondern nur ein Teil davon ((6 sec))
Ma Ist ein Bruchteil

170 L Mhm . Johanna
SS ((melden sich))
S1 Ach ja
Jh (Ja vielleicht ist es ein Blumen-

171 L Es ist ein Blumentopf <u>gewesen</u> .. Können wir von Bruchtei-
Jh topf.)

172 L len sprechen? Ja?
SS Mhm; ja.
St n Es ist ein Bruchteil von einem

173 L
St ./ das ist ein Bruchteil von einem Blumentopf

174 L Wie viele sind es? .. Vier . Das wären also
SS (....)
St Vier
S1 Vier

175 L vier Bruchteile
Ma Ja, aber von einem großen erst mal/ von einem .

176 L
Ma <u>Großen</u> ist dann das der Bruchteil ((macht mit den Händen eine

177 L
Ma kreisförmige Bewegung)) .. Also ich finde das einfach so .
Jö Das ist ein

178 L Glaubst du, das ist ein Viertel? ..
Jö Viertel, von einem. Ganzen.

179 L (Wenn du das durch)
Jö (....) Viertel
Ma ((schüttelt Kopf)) Nein! Nein! Oder?

180 L vier teilst könnte man sagen, das
Jö Vier Teile, ja .
Ma Aber eins

181 L sind in vier Bruchteile?
Ma Nein, weil, das ist schon mehr ..

182 L Ja gut. Jetzt wollen wir schauen,
Ma Bestimmt (...)
Jö Vier (Teile)

183 L das Problem heute zu lösen . Was sind eigentlich Bruchteilen.
Jetzt paß auf. Jetzt nimmst deinen Kreis .. Ja, nimmst
einen Kreis . Deine Aufgabe: <u>Schraffiere</u> . mit Bleistift
meinetwegen . <u>ein</u> <u>Viertel</u> des Kreises .. Schraffiere <u>ein</u>

184 L <u>Viertel</u> des Kreises, oder (....) .. Mach, was du willst
S1 (....)

185 L ... Schraffiere, oder male aus ein Viertel des Kreises

186 L
SS ((29 sec; markieren Bruchteile auf ausgeschnittenen Papier-

187 L Kannst ruhig auch in Partnerarbeit, daß ihr vielleicht
SS kreisen))

188 L ein bißchen mehr .. Ideen habt ((6 sec)) Ruhig deutlich aus-

189 L malen, daß man es auch sieht, oder schraffieren, richtig deut-

190 L lich. So, jetzt wollen wir allmählich
SS ((1:12 min; arbeiten))

191 L fertig werden .. Braucht keine Schönheitszeichnung werden.

192 L So, bitte dann
Ma [Wird auch keine Schönheitszeichnung] .

193 L fertig werden . Entscheide dich für irgendwas.
SS ((20 sec;

194 L Stift weglegen . Das muß reichen . weg
SS beenden ihre Arbeit))

195 L damit ((4 sec)) So, machen wir es so. Ah, ihr da drüben, ..

196 L haltet es bitte hoch, eueren Kreis, daß es die anderen sehen.

197 L So hoch halten .. Halt s hoch ...
SS ((Türreihe hält bearbeitete

198 L Schaut es euch an ..Kann man es erkennen? (....) an-
SS Kreise hoch))

199 L schauen, bitte! .. So, macht es ihr da drüben, hochheben. Deutlich, daß man es sieht, hoch. ((5 sec)) So, und jetzt in der Mitte. Haltet sie so nach hinten, oder ihr müßt es

200 L ein bißchen drehen, daß es jeder sieht .. Halt es nur
SS ((murmeln))

201 L hoch, Steffi ..So . Was ist dir aufgefallen? ...Waren es

202 L Viertel? . Waren es keine Viertel?
Ma (Ich glaube, das waren gar

203 L Jörg, ah/ Achim
Ac Ja, es könnten vielleicht Viertel gewesen
Ma keine)

204 L
Ac sein,aber die sind vielleicht nicht so genau gewesen . wenn man

205 L
Ac irgendwie so gezeichnet hat . Ich habs so gefaltet und dann

206 L Du/ Du hast gesagt "genau". Was verstehst du unter "genau"? .

207 L Viertel, Viertel. Einige haben gesagt, das sind auch Viertel

208 L da. Ja, die haben gesagt, das sind Viertel.
Ac Ja eigentlich nicht,

209 L So? ... Na
Ac weil die sind verschieden groß. ((zeigt nach Vorne))

210 L bitte, was sagt's ihr darauf? ..Seine Meinung war, es war nicht

211 L so genau. Ich habe da auch eine gemacht.

212 L Hm? ..
Mt Die müssen ja gleich groß sein.
Ma Das ist aber eine (....)

213 L Das ist aber auch irgendein Viertel, vielleicht, was weiß ich?

214 L Hm! Bist du noch nicht
Ma Nein
Ac Nein((schüttelt den Kopf))

215 L einverstanden? Martin!
Ac Nein
Mt Nein, das muß ja ./ wenn man jetzt .

216 L
Mt sagen wir einmal von einem Kreis ein Viertel nimmt, dann müssen

217 L
Mt die anderen . genau so groß sein wie der ... weil sonst (...)

218 L Ja, wenn du dich an den Versuch mit dem Wasser erinnerst, den die Nina gemacht hat. Da haben wir auch versucht, gleich viel in jedes Glas reinzugeben. Die Idee, glaube ich, ist gut gewe-

219 L sen, nicht?..Kannst du das noch einmal wiederholen?
Mt Wenn man jezt

220 L
Mt ein Viertel äh,von dem Kreis einzeichnet . dann müssen die ande-

221 L. Alle Viertel
Mt ren drei Viertel genau so groß sein wie das eine.

222 L müssen gleich groß sein..Ja. Die Mathematiker geben
Mt gleich groß sein

223 L sich nicht zufrieden, einfach irgendwie so Blumentopfscherben.

Prof. Dr. Hermann Maier
Naturwiss. Fak. I - Mathematik der Universität
D-93040 Regensburg

Prof. Dr. Heinz Steinbring
FB Mathematik der Universität
D-44221 Dortmund