2.10.5 Exponential- und Logarithmusfunktion

Definition 2.10.10:
Sei $a \in \mathbb{R}^+$, dann ist die allgemeine Form einer ***Exponentialfunktion*** f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ gegeben durch die Funktionsgleichung

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

Beispiel 2.10.13:
Graphen der Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ mit $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, 2, 3$.

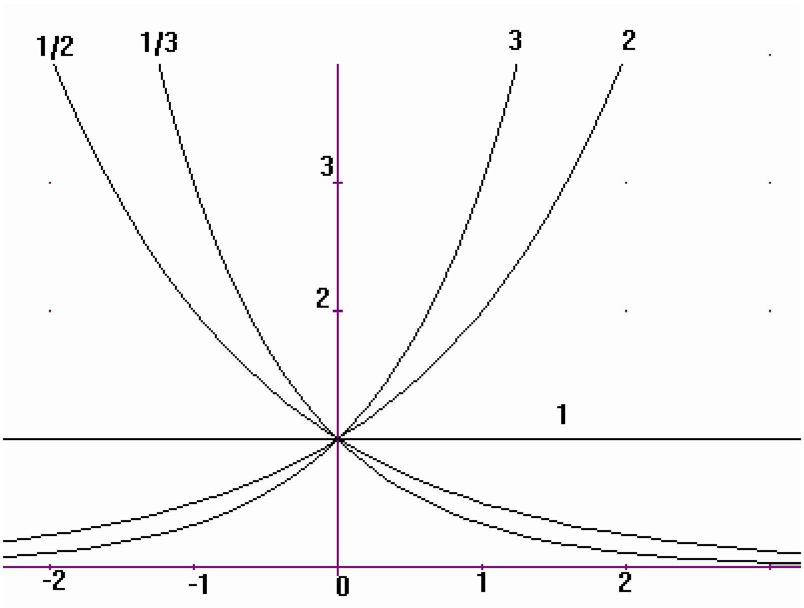


Abb. 2.10.11 Exponentialfunktionen mit der Basis a = 1/2, 1/3, 1, 2, 3.

Satz 2.10.4:
(i) Die Exponentialfunktion $y = a^x$ ist für $0 < a < 1$ streng monoton fallend, für $a = 1$ konstant und für $a > 1$ streng monoton steigend.

(ii) Alle Graphen der mit der Gleichung $y = a^x$, $a > 0$, schneiden die y-Achse im Punkt (0,1).

(iii) Die Graphen mit der Gleichung $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ gehen durch Spiegelung an der y-Achse auseinander hervor.

(iv) Für $a > 1$ nähert sich der Graph der Funktion $y = a^x$ asymptotisch der negativen y-Achse, für $0 < a < 1$ der positiven x-Achse.

Wie wir schon in *Kapitel 2.9* gesehen haben, ist die sogenannte ***e-Funktion*** für viele Vorgänge in der Physik und der Technik von Interesse.

Definition 2.10.11:

Die ***e-Funktion*** ist eine spezielle Exponentialfunktion *f*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit der Funktionsgleichung

$$\boxed{f(x) = e^x}$$

Dabei ist ***e*** $\cong$ 2,71... die ***Euler'sche Zahl***.

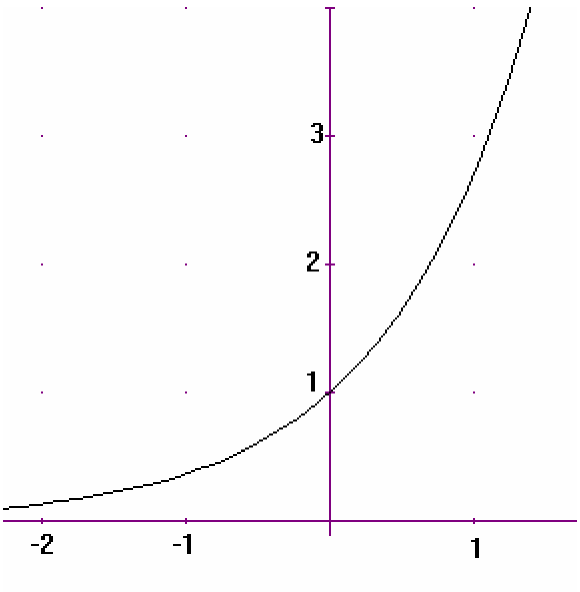


Abb. 2.10.11 *e*-Funktion $x \mapsto e^x$

Bemerkung 2.10.11:

(i) Die *e*-Funktion wird auch oft als ***Wachstumsfunktion*** bezeichnet, weil jeder Naturvorgang auf diese Funktion führt, in dem die Zu- bzw. Abnahme einer Anzahl *M* betrachteter Objekte in der Zeit *t* von ihrer jeweiligen Anzahl abhängt.

(ii) Die Ladung und Entladung eines Kondensators, der radioaktive Zerfall oder die stetige Verzinsung verlaufen nach einer *e*-Funktion, die dann mit anderen Funktionen verknüpft ist (vgl. auch Kapitel 2.9). Eine wichtige Rolle spielt die *e*-Funktion auch in der Statistik.

Beispiel 2.10.14:

(i) Funktionen der Form $y = ke^{-ax}$, $a > 0$, beschreiben Zerfallsprozesse oder auch die Ladung eines Kondensators. Für $k = 2$ bzw. $k = -2$ und $a = 1$ erhalten wir die folgenden Graphen:

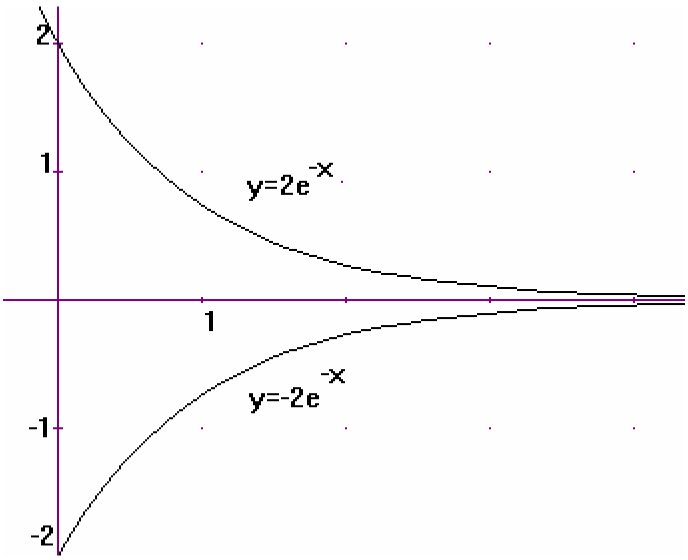
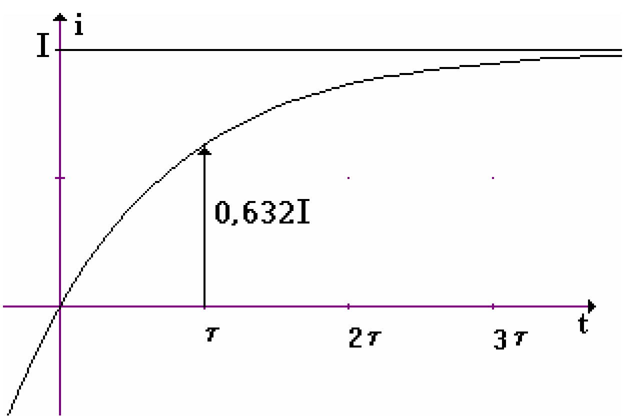


Abb. 2.10.12 $x \mapsto ke^{-x}$, k = 2, -2

(ii) In einem Stromkreis mit einem Ohmschen Widerstand R und Induktivität L in Reihenschaltung wird der Schalter zur Zeit $t = 0$ geschlossen. Die Stromstärke ***i*** erreicht nicht sofort den stationären Wert I = U/R, sondern folgt zeitlich dem Exponentialgesetz

$$i = I\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Der Ausdruck τ = L/R heißt Zeitkonstante. Für $t = \tau$ hat die Stromstärke 63,2% ihres Endwertes I erreicht, denn dann ist $i = (1 - e^{-1}) = 0{,}632I$.



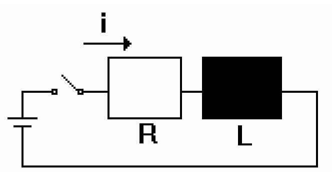


Abb. 2.10.13 $x \mapsto I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Da die Exponentialfunktion mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und dem Wertebereich $W = \mathbb{R}^+$ bijektiv ist, kann man die Umkehrfunktion bilden, die dann den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+$ und den Wertebereich $W = \mathbb{R}$ besitzt. Vertauschen wir in der Funktionsgleichung $y = a^x$ die Variablen x und y so erhalten wir die Gleichung $x = a^y$. Lösen wir diese Gleichung nach y auf, so erhalten wir:

$$\boxed{y = log_a x}$$

Definition 2.10.12:

Die Logarithmusfunktion f: $\mathbb{R}^+ \to$ IR mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = log_a x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $y = g(x) = a^x$.

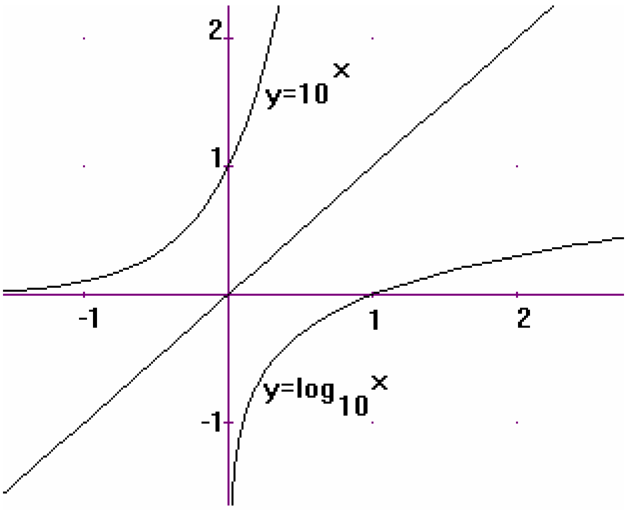


Abb. 2.10.14 Graph der Funktion $y = \log_{10}x$

Bemerkung 2.10.12:

(i) Der Graph der Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ entsteht durch Spiegelung des Graphen der Exponentialfunktion $y = a^x$ an der 45°-Achse.

(ii) Alle Logarithmuskurven gehen durch den Punkt (1,0).

(iii) Fallunterscheidung:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$log_a x > 0$, falls $x > 1$	$log_a x > 0$, falls $0 < x < 1$
$log_a x = 0$, falls $x = 1$	$log_a x = 0$, falls $x = 1$
$log_a x < 0$, falls $0 < x < 1$	$log_a x < 0$, falls $x > 1$

(iv) Die Graphen mit der Funktionsgleichung $y = \log_a x$ und $y = \log_{\frac{1}{a}} x$, $a > 0$, gehen durch Spiegelung an der x-Achse auseinander hervor.

(v) Ist $a > 1$, so ist $y = \log_a x$ streng monoton steigend. Ist $0 < a < 1$, so ist $y = \log_a x$ streng monoton fallend.

Beispiel 2.10.15:
Graphen der Funktion $y = \log_a x$, $a = 2$ bzw. $a = 1/2$

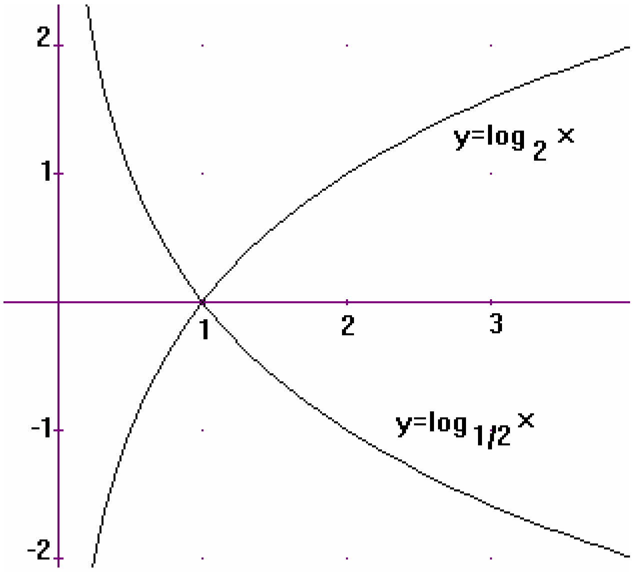


Abb. 2.10.15 $x \mapsto \log_a x$, $a = 2$ bzw. $a = 1/2$

Bemerkung 2.10.13:
Wird bei der Bildung der Exponentialfunktion nach der Potenz $y = a^x$ gefragt, so heißt bei der Logarithmusfunktion die Zuordnungsvorschrift: Suche zu einer gegebene Basis a und Potenz y den Exponenten x; z.B. $25 = 5^x \Rightarrow x = \log_5 25 \Rightarrow x = 2$.

Für die Exponential- und Logarithmusfunktion gelten folgende Funktionalgleichungen.

Satz 2.10.5:
Sei $a,b,c \in \mathbb{R}$ und $a,c > 0$, dann gilt:

(i) $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $x = a^{\log_a x}$, $x > 0$

(iii) $\log_a(x_1 x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$, $x_1, x_2 > 0$

(iv) $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a x$, $x > 0$.

(v) $log_a x = \frac{1}{log_c a} log_c x$, $x > 0$

Die Umkehrfunktion der ***e***-Funktion führt zu der wichtigen Funktion $f(x) = \ln x$.

Definition 2.10.13:
Die Funktion f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $f(x) = log_e x =: ln\, x$ heißt ***natürlicher Logarithmus*** (*Logarithmus naturalis*).

Beispiel 2.10.16:

(i) Es gilt: $log_2 \frac{256}{32} = log_2 8 = 3$ und $log_2 \frac{256}{32} = log_2 256 - log_2 32 = 8 - 5 = 3$.

(ii) Mit *Satz 2.10.5 (v)* ist $log_a x = \frac{ln\, x}{ln\, a}$.

(iii) Wie wir aus *Beispiel 2.9.6* wissen, gilt für den radioaktiven Zerfall die Formel

$$N = N_0 e^{-kt}.$$

Dabei ist k die ***Zerfallskonstante***.

Die ***Halbwertszeit*** ist die Zeitspanne t, in der die Menge und damit die Strahlungsintensität eines radioaktiven Stoffes auf die Hälfte absinkt. Die Halbwertszeit ist für jede radioaktive Atomart charakteristisch. Aus der Halbwertszeit $t_{1/2}$ lässt sich nun die Zerfallskonstante k berechnen.

Wir setzen dazu in der obigen Gleichung $N = \frac{N_0}{2}$ und erhalten:

$$\frac{N_o}{2} = N_0 e^{-kt} \Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{e^k}\right)^{t_{1/2}} \Rightarrow e^k = 2^{\frac{1}{t_{1/2}}} \Rightarrow k = ln(2^{\frac{1}{t_{1/2}}})$$

Mit *Satz* 2.10.5 erhalten wir schließlich: $k = \frac{1}{t_{1/2}} . ln\, 2$.

Für Radon ist $t_{1/2} \approx 55s$, also $k \approx \frac{0{,}693}{55sec} = 0{,}0126/s$.

Bemerkung 2.10.14:
Zur Verkürzung der Schreibweise wurden folgende Vereinbarungen getroffen:

$log_2 x := lbx = ldx$	- *Logarithmus dualis* oder *binärer Logarithmus*
$log_{10} x := lg\, x$	- *dekadischer Logarithmus* oder *Briggscher Logarithmus*

$log_e\, x := ln\, x$ - *natürlicher Logarithmus*

Das Rechnen mit Potenzen und Logarithmen führt zu ***Exponentialgleichungen***.

Beispiel 2.10.17 (Exponentialgleichungen):

(i) Wir betrachten die Gleichung $2^x = 8$. Wir können diese Gleichung lösen, indem wir durch Äquivalenzumformung beiden Seiten der Gleichung dieselbe Basis geben:

$$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$$

(ii) Bei der Gleichung $6^{x+1} = 3^{2x-1}$ können wir beide Seiten der Gleichung logarithmieren. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} & 6^{x+1} = 3^{2x-1} \\ \Leftrightarrow\quad & ln\,6^{x+1} = ln\,3^{2x-1} \\ \Leftrightarrow\quad & (x+1).ln\,6 = (2x-1).ln\,3 \\ \Leftrightarrow\quad & ln\,6 + ln\,3 = 2x.ln\,3 - x.ln\,6 \\ \Leftrightarrow\quad & x = \frac{ln\,6 + ln\,3}{2.ln\,3 - ln\,6} = \frac{ln\,18}{ln(3^2) + ln(6^{-1})} = \frac{ln\,18}{ln(1{,}5)} \end{aligned}$$

(iii) Bei der Gleichung $10^{lg\,x} = 3$ nutzen wir aus, dass wir jede positive reelle Zahl *r* als Zehnerpotenz schreiben können; nämlich: $r = 10^{lg\,r}$.

Somit gilt:

$$10^{lg\,x} = 3 \Leftrightarrow 10^{lg\,x} = 10^{lg\,3} \Leftrightarrow lg\,x = lg\,3 \Leftrightarrow x = 3$$