2.13 Lokale Extrema, Monotonie und Konvexität

Wir kommen nun zu den ersten Anwendungen der Differentialrechnung. Zwischen den Eigenschaften einer Funktion, dem Verlauf des zugehörigen Graphen und den Ableitungen dieser Funktion bestehen gewisse Zusammenhänge, die im Folgenden analytisch untersucht und geometrisch interpretiert werden sollen.

Definition 2.13.1:

Sei f: $(a,b) \to$ IR eine Funktion. f hat in $x_0 \in (a,b)$ ein ***lokales Maximum (Minimum)***, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass gilt:

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ (bzw. } f(x_0) \leq f(x)\text{) für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < \varepsilon.$$

Trifft in der letzten Zeile das Gleichheitszeichen nur für $x = x_0$ zu, so nennen wir x_0 ein ***isoliertes lokales Maximum (Minimum)***.

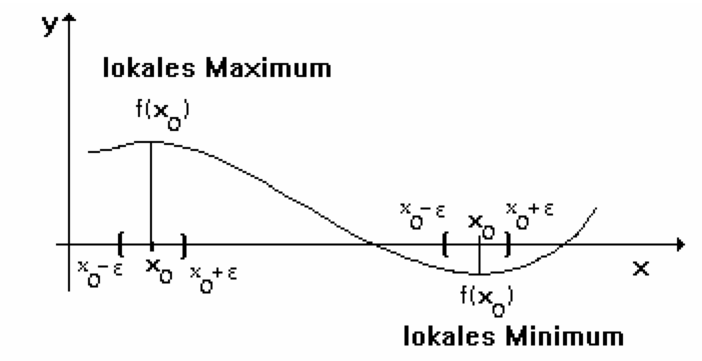

Abb. 2.13.1 lokales Maximum und Minimum

Neben dem lokalen Maximum bzw. Minimum gibt es das sogenannte ***absolute Minimum bzw. Maximum***.
Eine Funktion f: D $\to$ IR hat im Punkt $x_0 \in$ D ein absolutes Maximum bzw. Minimum, wenn

$$f(x_0) \geq x \text{ (bzw. } f(x_0) \leq x \text{)}$$

für alle $x \in$ D.

Extremum ist der gemeinsame Oberbegriff für Maximum und Minimum. Anstelle von lokalem Extremum spricht man auch von *relativem* Extremum.

Satz 2.13.1:

Die Funktion f: $(a,b) \to$ IR besitze in $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum und sei an der Stelle x_0 differenzierbar, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Anschaulich ist dieser Satz leicht einzusehen. Nehmen wir an, f besitze im Punkt x_0 ein lokales Maximum, dann muss beim "Anstieg zum Gipfel" die Steigung der Tangenten in jedem Punkt des Graphen positiv sein. Beim "Abstieg vom Gipfel" ist die Steigung der Tangenten natürlich negativ. Die Steigung der Tangenten wechselt also von positiv nach negativ und muss somit auch einmal gleich Null werden. Das ist aber auf dem Gipfel, d.h. beim Maximum der Fall. Der formale Beweis dieses Satzes ist genauso einfach.

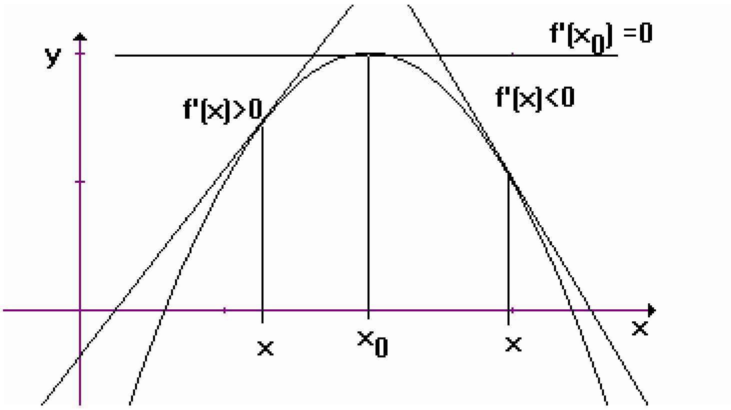

Abb. 2.13.2 Tangentensteigung bei einem lokalen Maximum

Beweis zu Satz 2.13.1:

f besitze in x_0 ein lokales Maximum. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$ und

$$f(x) \le f(x_0) \text{ für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Daraus folgt:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \quad \text{und} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 .$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$; also muss $f'(x_0) = 0$ sein. Für ein lokales Minimum ist der ***Satz 2.13.1*** analog zu beweisen.

Bemerkung 2.13.1:

(i) Die Bedingung $f'(x) = 0$ ist nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum; d.h. aus $f'(x) = 0$ folgt nicht, dass f an der Stelle x ein lokales Extremum hat. Für die Funktion f: IR $\to$ IR mit $f(x) = x^3$ gilt z.B. $f'(0) = 0$, sie besitzt aber in 0 kein lokales Extremum (s. Abb. 2.13.3).

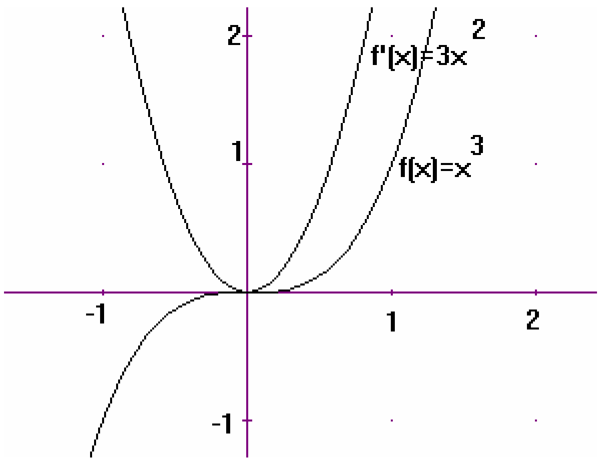

Abb. 2.13.3: Kubische Funktion mit Ableitung

(ii) Mit der Bedingung $f'(x) = 0$ erhält man nur die möglichen Extremwerte im ***Inneren*** des Definitonsbereiches. Wie wir wissen, nimmt jede stetige Funktion *f*: [*a,b*] → IR im abgeschlossenen Intervall [*a,b*] ihr absolutes Minimum oder Maximum an. Dieses Minimum oder Maximum liegt entweder im Inneren des Intervalls [*a,b*] oder am Rand. Um das absolute Maximum oder Minimum in einem abgeschlossenen Intervall zu ermitteln, müssen also die inneren Extremwerte mit den Randwerten verglichen werden. Beispielsweise nimmt die Funktion

$$f: [0,1] \to \mathrm{IR},\ x \mapsto f(x) = x$$

an der Stelle $x = 0$ ihr absolutes Minimum und an der Stelle $x = 1$ ihr absolutes Maximum an. Wegen $f'(x) = 1$, gibt es keine inneren Extremwerte.

<u>Satz 2.13.2:</u>
Sei *f*: [*a,b*] → IR stetig und in (*a,b*) differenzierbar. Wenn für alle $x \in (a,b)$ gilt:

$$f'(x) \geq 0 \ (bzw.\ f'(x) > 0, f'(x) \leq 0, f'(x) < 0),$$

so ist *f* in [*a,b*] monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend, monoton fallend, streng monoton fallend).

<u>Satz 2.13.3:</u>
Sei *f*: (*a,b*) → IR eine differenzierbare Funktion. An der Stelle $x_0 \in (a,b)$ sei *f* zweimal differenzierbar und es gelte

$$f'(x_0) = 0 \quad und \quad f''(x_0) > 0 \ (bzw.\ \ f''(x_o) < 0).$$

Dann besitzt *f* in x_0 ein isoliertes lokales Minimum (bzw. Maximum).

<u>Beweis:</u>
Sei $f''(x_0) > 0$ (der Fall $f''(x_0) < 0$ ist analog zu beweisen). Da

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_o)}{x - x_0} > 0,$$

existiert ein ε > 0, so dass

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0, \text{ für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Da $f'(x_0) = 0$, folgt daraus:

$$f'(x) < 0 \ \text{für}\ x \in (x_0 - \varepsilon, x_0),$$

$$f'(x) > 0 \ \text{für}\ x \in (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

Nach ***Satz 2.13.2*** ist f deshalb im Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ streng monoton fallend und im Intervall $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ streng monoton wachsend. Damit besitzt f in x_0 ein isoliertes Minimum.

Bemerkung 2.13.2:

Der ***Satz 2.13.3*** gibt nur eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für ein isoliertes lokales Extremum. Die Funktion $f(x) = x^4$ besitzt z.B. in $x = 0$ ein isoliertes lokales Minimum. Es ist aber $f''(0) = 0$.

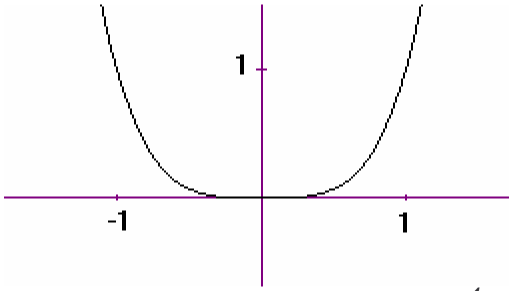

Abb. 2.13.4 Graph der Funktion $f(x) = x^4$

Für Funktionen, die genügend oft differenzierbar sind, erhalten wir jedoch die folgende Aussage.

Satz 2.13.4:

Die Funktion f:$[a,b] \to$ IR sei im offenen Intervall (a,b) mindestens n-mal differenzierbar ($n \geq 2$). f hat in x_0 ein Extremum, wenn gilt:

n ist gerade und $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, aber $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Ist $f^{(n)}(x_0) < 0$, so liegt ein isoliertes lokales Maximum vor, ist $f^{(n)}(x_0) > 0$ ein isoliertes lokales Minimum.

Definition 2.13.2:

Sei $I \subset$ IR ein (endliches oder unendliches) Intervall. Eine Funktion f: $I \to$ IR heißt ***konvex***, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und alle λ mit $0 < \lambda < 1$ gilt:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Die Funktion heißt ***konkav***, wenn $-f$ konvex ist.

Die angegebene Konvexitäts-Bedingung bedeutet für ($x_1 < x_2$), dass der Graph der Funktion im Intervall $[x_1, x_2]$ unterhalb der Sekante durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ liegt (s. Abb. 2.13.5).

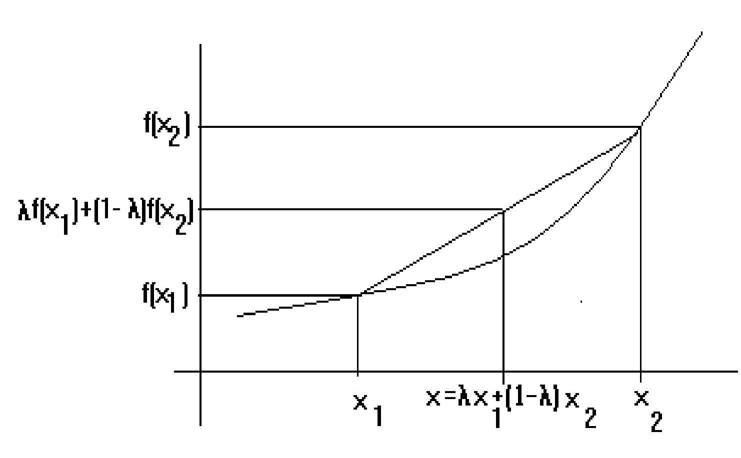

Abb. 2.13.5 Graphische Darstellung der Konvexitätsbedingung

Satz 2.13.5

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$

Beispiel 2.13.1:

(i) Die ***e***-Funktion ist konvex auf dem Intervall $(-\infty,+\infty)$, da $\left(e^x\right)'' = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Die Logarithmus-Funktion ist auf dem Intervall $(0,+\infty)$ konkav, da $\left(\ln x\right)'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.

Bemerkung 2.13.3

(i) Ist eine Funktion im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ konvex (konkav), so beschreibt der Graph der Funktion im Intervall I eine Linkskurve (Rechtskurve).

(ii) An einem Maximum hat der Graph einer Funktion eine Rechtskrümmung, an einem Minimum eine Linkskrümmung.

Definition 2.13.3:

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f hat in $x_0 \in D$ einen **Wendepunkt**, wenn der Graph der Funktion sein Krümmungsverhalten ändert (z.B. Übergang von einer Rechts- in eine Linkskrümmung bzw. Wechsel konkav $\to$ konvex).

Satz 2.13.6:

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in D$ dreimal differenzierbar und es gelte

$$f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0,$$

dann hat f in x_0 einen Wendepunkt. Ferner gilt:

$$f'''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{Wechsel konvex} \to \text{konkav}$$

$$f'''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{ Wechsel konkav} \to \text{konvex.}$$

Bemerkung 2.13.4:

(i) Schreiben wir die Bedingung in *Satz 2.13.6* als

$$\left(f'\right)'(x_0) = 0 \, und \, \left(f'\right)''(x_0) \neq 0,$$

dann erhalten wir mit *Satz 2.13.3*, dass an einem Wendepunkt die erste Ableitung der Funktion f ein Extremum hat.

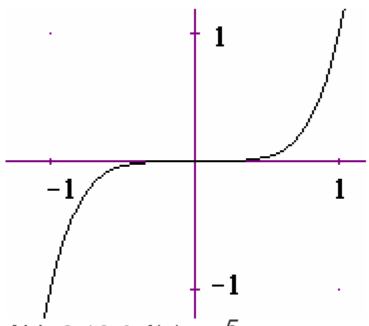

Abb.2.13.6 $f(x) = x^5$

(ii) Der ***Satz 2.13.6*** gibt nur eine hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt an. Die Funktion $f(x) = x^5$ hat im Punkt $x = 0$ einen Wendepunkt, es gilt aber $f'''(0) = 0$. Ähnlich wie beim lokalen Extremum, können wir auch hier für hinreichend oft differenzierbare Funktionen folgende Aussage machen

Satz 2.13.7:

Sei f: D $\to$ IR im Punkt $x_0 \in$ D mindestens n-mal differenzierbar ($n \geq 3$). f hat in x_0 einen Wendepunkt, wenn gilt:

$f''(x_0) = 0$ und die erste Ableitung mit $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ist von ungerader Ordnung.

Auch hier gilt:

$f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ Wechsel konvex $\to$ konkav

$f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ Wechsel konkav $\to$ konvex.

Definition 2.13.4:

Sei f: D $\to$ IR eine Funktion, die im Punkt $x_0 \in$ D differenzierbar ist. f hat in $(x_0, f(x_0))$ einen **Sattelpunkt**, wenn f in $x_0 \in$ D einen Wendepunkt hat und außerdem $f'(x_0) = 0$ ist.

Bemerkung 2.13.5:

An einem Sattelpunkt $(x_0, f(x_0))$ hat der f'-Graph nicht nur einen Extrempunkt, sondern berührt auch die x-Achse im Punkt $(x_0, 0)$. Demnach hat die Tangente an den f-Graph im Sattelpunkt die Steigung Null, ist also zur x-Achse parallel.

Merke! Ein Sattelpunkt hat eine waagerechte Wendetangente.

Beispiel 2.13.2:

(i) Wir betrachten die Funktion f: IR $\to$ IR,

$$x \mapsto (x+1)^5 + 1.$$

Es gilt:

$$f'(-1) = 0, \quad f''(-1) = 0, \quad f^{(5)}(-1) = 120.$$

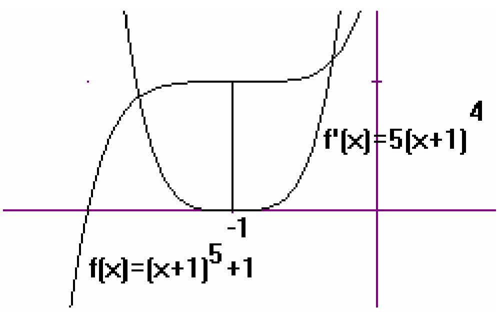

Abb. 2.13.7 Sattelpunkt

An der Stelle x = -1 hat die Funktion demnach einen Sattelpunkt.

(ii) Gegeben sei die Funktion *f*: IR → IR, $x \mapsto x^3 - 2x^2 - 15x$. Für die ersten drei Ableitungen erhalten wir:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 15,\; f''(x) = 6x - 4,\; f'''(x) = 6.$$

Untersuchen wir die Bedingungen für einen Wendepunkt:

1. $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3};$

   also $f''\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$.

2. $f'''\left(\dfrac{2}{3}\right) = 6 > 0$.

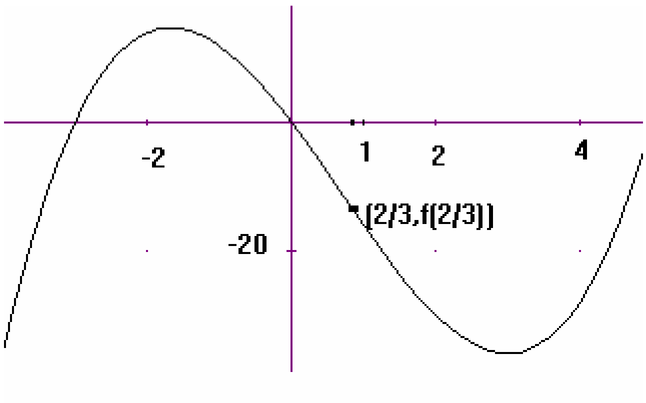

Abb. 2.13.7 Wendepunkt der Funktion
f(x)=x³ - 2x² - 15x

An der Stelle *x* = 2/3 hat die betrachtete Funktion *f* somit einen Wendepunkt. Da

$f'\left(\dfrac{2}{3}\right) \neq 0$ ist

es kein Sattelpunkt. In den beiden Abbildungen 2.13.6 und 2.13.7 sieht man auch graphisch den Unterschied zwischen einem "einfachen" Wendepunkt und einem Sattelpunkt.

Die Übersicht auf der folgenden Seite faßt die vorstehenden Ergebnisse zusammen. Dabei setzen wir voraus, dass die zu untersuchende Funktion genügend oft differenzierbar ist.

Graph von f	***Funktion f***	***Notwendige Bedingung***	***Hinreichende Bedingung***
Kurve steigt im Intervall [*a*,*b*]	Funktionswerte steigen in [*a*,*b*] (streng monoton wachsend)	$f'(x) \geq 0$	$f'(x) > 0$, $x \in (a,b)$
Kurve fällt im Intervall [*a*,*b*]	Funktionswerte fallen in [*a*,*b*] (streng monoton fallend)	$f'(x) \leq 0$	$f'(x) < 0$, $x \in (a,b)$
Rechtskrümmung im Intervall [*a*,*b*]	f ist konkav in [*a*,*b*]	$f''(x) \leq 0$	$f''(x) \leq 0$, x ∈ (a,b)
Linkskrümmung im Intervall [*a*,*b*]	f ist konvex in [*a*,*b*]	$f''(x) \geq 0$	$f''(x) \geq 0$, $x \in (a,b)$
Hochpunkt in $(x_0, f(x_0))$	lokales Maximum in x_0	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$; erste Ableitung mit $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist von *gerader* Ordnung
Tiefpunkt in $(x_0, f(x_0))$	lokales Minimum in x_0	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$; erste Ableitung mit $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist von *gerader* Ordnung
Links- → Rechtskrümmung	Wendepunkt in x_0 konvex → konkav	$f''(x_0) = 0$	$f''(x_0) = 0$; erste Ableitung mit $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist von *ungerader* Ordnung
Rechts- →Linkskrümmung	Wendepunkt in x_0 konkav → konvex	$f''(x_0) = 0$	$f''(x_0) = 0$; erste Ableitung mit $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist von *ungerader* Ordnung
Achsenschnittpunkt	Nullstelle	$f(x_0) = 0$	$f(x_0) = 0$