## 2.15 Extremwertaufgaben

Eine weitere wichtige Anwendung der Differentialrechnung ist das Lösen von Extremwert-aufgaben. Es handelt sich hierbei um Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten (Geometrie, Ökonomie, Physik, Technik usw.) bei denen es darauf ankommt, einen Vorgang durch eine Funktion $f : \mathrm{I} \to \mathrm{IR}$ zu beschreiben, von der im Intervall $\mathrm{I}$ das Maximum bzw. Minimum ermittelt werden soll. Beispiele hierfür sind:

- maximales Volumen eines Behälters,
- maximale Belastbarkeit eines Balkens,
- minimaler Materialaufwand.

***Bemerkung 2.15.1:***

Bei den Extremwertaufgaben ist folgendes zu beachten: Ist *f* eine auf dem ***abgeschlossenen*** Intervall $\mathrm{I} = [a,b]$ **stetige** Funktion, so nimmt die Funktion *f* auf $\mathrm{I}$ ihr ***absolutes*** Maximum und Minimum an. Mit Hilfe der Differentialrechnung können wir die relativen Extremwerte in $(a,b)$ ermitteln (wenn *f* differenzierbar ist). Ein Vergleich mit den Randwerten $f(a)$ und $f(b)$ ergibt dann das absolute Maximum bzw. Minimum in $[a,b]$.

Im folgenden werden wir verschiedene Beispiele für Extremwertaufgaben betrachten. Beim Lösen solcher Aufgaben ist es wichtig, das Problem als differenzierbare Funktion ***einer*** Variablen *x* darzustellen; treten weitere Variablen auf, so müssen diese durch sogenannte Nebenbedingungen eliminiert werden.

***Beispiel 2.15.1:***

Zur Herstellung eines Kartons sollen an den Ecken einer quadratischen Pappe mit der Seitenlänge *a* vier Einschnitte gemacht und die entsprechenden Rechtecke hochgebogen werden (s. Abb. 2.15.1). Die schraffierten gleichgroßen Quadrate dienen zum Heften des Kartons. Wie groß muss der Einschnitt gemacht werden, damit der Rauminhalt V des Kartons möglichst groß wird?

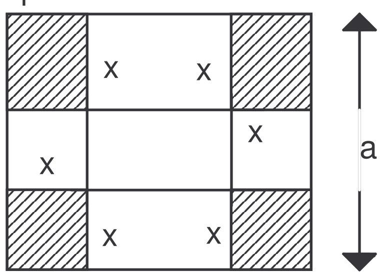

Abb. 2.15.1

*Lösung:*

Nach der Volumenformel für den Quader

$$V = \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$$

ergibt sich für den Rauminhalt

$$V = f(x) = x(a-2x)^2 = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x\,.$$

Für unser Problem ist der Definitionsbereich $\mathrm{I} = (0, a/2)$ sinnvoll, denn für $x = 0$ ist die Höhe gleich Null und für $x = a/2$ ist die Grundfläche gleich Null.

1. Ableitung: $f'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$.

Also: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{2a}{3}x+\frac{a^2}{12}=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{a}{6} \vee x_2=\frac{a}{2}$.

Für unser Problem ist nur die Lösung $x_1$ sinnvoll, da für $x_2$ die Pappe in mehrere Teile zerschnitten würde. Der Wert $x_2$ liegt außerdem nicht in unserem Definitionsbereich.

Es ist $f''(x)=24x-8a \Rightarrow f''\left(\frac{a}{6}\right)=-4a<0$.

An der Stelle x = *a*/6 liegt also ein Maximum. Demnach muss der Einschnitt 1/6 der Seitenlänge *a* betragen. Da das Intervall I offen ist, müssen wir die Randwerte nicht untersuchen.

***Beispiel 2.15.2:***

Ein Gewölbegang hat einen Querschnitt von der Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis (Abb. 2.15.2). Der Umfang ist mit Rücksicht auf das Baumaterial durch U = 10 m fest gegeben. Wie muss das Gewölbe gestaltet werden, damit es einen möglichst großen Inhalt erhält?

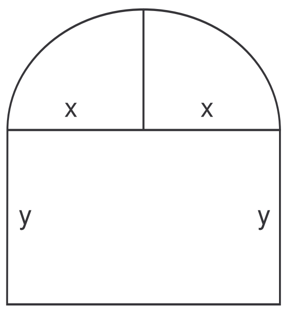

Abb. 2.15.2

***Lösung:***

Die Fläche $F(x,y)=2xy+\frac{\pi}{2}x^2$ (Fläche *Rechteck* + Fläche *Halbkreis*) soll maximal werden. Die Funktion *F* hängt aber von den beiden Variablen *x* und *y* ab. Wir eliminieren die Variable *y*, indem wir mit
Hilfe der Nebenbedingung

U = 2x +2y + πx = 10

*y* durch $y=\frac{10-(2+\pi)x}{2}$ in der Gleichung der Funktion *F* ersetzen. Wir erhalten damit eine neue Funktion *f*, die nur noch von der Variablen *x* abhängt; nämlich:

$$f(x)=10x-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2.$$

Der Graph dieser Funktion ist in Abb. 2.15.3 dargestellt. Mit der Nebenbedingung gilt:

$$y=0 \Leftrightarrow x=\frac{10}{2+\pi}$$

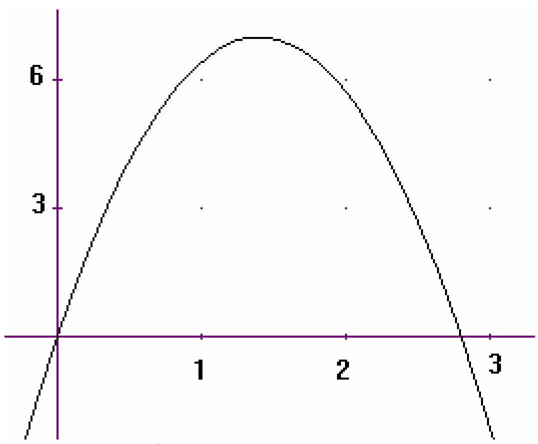

Abb. 2.15.3 Graph der Flächenfunktion

Der für unser Problem sinnvolle Definitionsbereich ist demnach $\mathrm{I}=\left(0,\frac{10}{2+\pi}\right)$.

1. Ableitung: $f'(x) = 10 - (4+\pi)x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 10 - (4+\pi)x = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{10}{4+\pi} = x \quad .$$

2. Ableitung: $f''(x) = -(4+\pi) < 0 \;\; \forall x \in \mathrm{IR}$.

Also ist an der Stelle $x = \dfrac{10}{4+\pi} \approx 1{,}40$ ein Maximum. Setzen wir diese Wert in die Nebenbedingung ein, so erhalten wir $y = 5\left(1 - \dfrac{2+\pi}{4+\pi}\right) \approx 1{,}40$.

Das Gewölbe mit dem größten Rauminhalt bei gleichbleibendem Umfang U = 10 m erhalten wir, wenn *x* = 1,40 m und *y* = 1,40 m gesetzt wird. Da das Intervall I offen ist, brauchen die Randwerte nicht untersucht werden.

***Beispiel 2.15.3:***

Zwei Orte A und B, die von einer Eisenbahnlinie die senkrechten Abstände *a* = 3 km und

*b* = 2 km haben, sollen einen gemeinsamen Bahnhof erhalten. Wohin ist der Bahnhof zu legen, damit die Gesamtlänge der neu zu errichtenden Straßen ein Minimum wird? Der Abstand der Fußpunkte A' und B' sei *c* = 5 km.

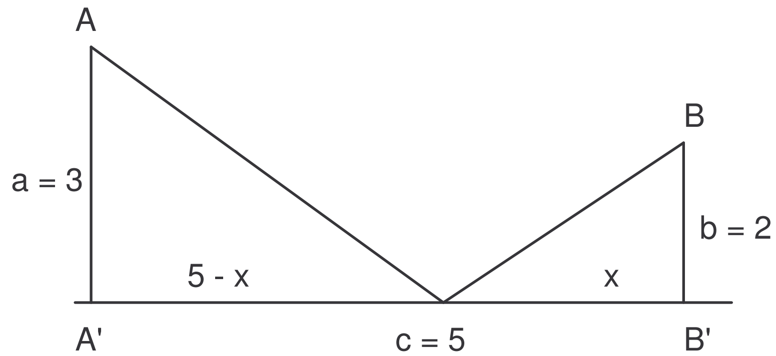


Abb. 2.15.4

***Lösung:***

Die Gesamtlänge der Straße ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras als

$$f(x) = \sqrt{3^2 + (5-x)^2} + \sqrt{2^2 + x^2}, \; x \in [0,5].$$

Die Funktion ist wohldefiniert, da die Ausdrücke unter den Wurzelzeichen immer größer als Null sind.

1. Ableitung: $f'(x) = \dfrac{2x - 10}{2\sqrt{9 + (5-x)^2}} + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-5)\sqrt{x^2+4} + x\sqrt{9+(5-x)^2} = 0$$

Durch Umformungen erhalten wir:

$$x\sqrt{9+(5-x)^2} = (5-x)\sqrt{x^2+4}$$

$\Rightarrow \quad x^2(9+(5-x)^2) = (5-x)^2(x^2+4)$ (durch das Quadrieren können Lösungen hinzukommen)

$\Leftrightarrow \quad 9x^2 = 4(5-x)^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 8x - 20 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 2 \vee x = -10$

Der Wert $x$ = -10 ist für unser Problem nicht sinnvoll. Für $x$ = 2 ist die obige Umformung eine Äquivalenzumformung und somit ist $f'(2) = 0$.

2. Ableitung: $f''(x) = \dfrac{9+2(5-x)^2}{\left(9+(5-x)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{4}{\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}$.

$$f''(2) = \frac{27}{18^{\frac{3}{2}}} + \frac{4}{8^{\frac{3}{2}}} > 0$$

An der Stelle $x$ = 2 hat die Funktion f somit ein relatives Minimum.
Es ist: $f(2) = \sqrt{18} + \sqrt{8},\ f(0) = \sqrt{34} + \sqrt{4}$ und $f(5) = 3 + \sqrt{29}$.
Daraus entnimmt man, dass an der Stelle $x$ = 2 das ***absolute Minimum*** der Funktion *f* im Intervall [0,5] ist. Der Bahnhof muss demnach 3 km vom Fußpunkt A' und 2 km vom Fußpunkt B' gebaut werden.

***Beispiel 2.15.4:***
Das Innere einer zylindrischen Spule vom Radius *r* soll durch einen Eisenkern von kreuz-förmigen Querschnitt ausgefüllt werden. Welche Abmessungen muss der Kern haben, damit sein Querschnitt maximal wird?

***Lösung:***
Den Flächeninhalt des Querschnitts erhalten wir als Funktion A, die von den beiden Variablen x und y abhängt; und zwar gilt:

$$A(x,y) = 4xy + y^2.$$

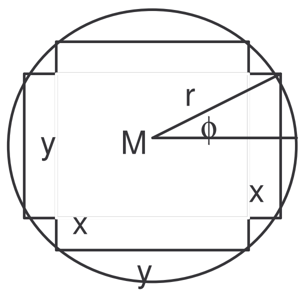

Abb. 2.15.5

Um zu erreichen, dass unser Problem durch eine Funktion *f* mit einer Variablen beschrieben wird, setzen wir

$$\frac{y}{2} = r\sin\phi \Leftrightarrow y = 2r\sin\phi.$$

und

(2.15.1) $$\frac{y+2x}{2} = r\cos\phi \Leftrightarrow x = r\cos\phi - r\sin\phi.$$

Setzen wir das in die Funktion *A* ein, so erhalten wir die Funktion

$$f(\phi) = 4r^2(2\cos\phi\sin\phi - \sin^2\phi)$$

bzw. nach Anwendung der Additionstheoreme

$$f(\phi) = 4r^2(\sin 2\phi - \sin^2\phi).$$

Betrachten wir noch den Definitionsbereich der Funktion *f*. Mit der Gleichung (2.15.1) gilt:

$$\phi = 0 \Rightarrow x = r \text{ und } \phi = \pi/4 \Rightarrow x = 0.$$

Als sinnvollen Definitionsbereich für unser Problem erhalten wir also D = [0,π/4].

1. Ableitung: $f'(\phi) = 4r^2(2\cos 2\phi - 2\sin\phi\cos\phi) = 4r^2(2\cos 2\phi - \sin 2\phi)$.

$$f'(\phi) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2\phi = \sin 2\phi \Leftrightarrow \tan 2\phi = 2 \Leftrightarrow \phi = \frac{\arctan 2}{2} \approx 0{,}553 < \frac{\pi}{4}.$$

2. Ableitung: $f''(\phi) = 4r^2(-4\sin 2\phi - 2\cos 2\phi) = -8r^2(2\sin 2\phi + \cos 2\phi)$.

Für $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ gilt: $\sin\phi \ge 0$ und $\cos\phi \ge 0$.

Somit ist $f''(\phi) < 0$ für alle $\phi \in (0, \frac{\pi}{4})$. An der Stelle $\phi_0 = \frac{\arctan 2}{2}$ hat die Funktion *f* ein relatives Maximum. Es ist $f(\phi_0) \approx 2{,}47r^2$ und wegen *f*(0) = 0 und $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2r^2$ liegt auch kein absolutes Maximum am Rand vor. Der kreuzförmige Eisenkern hat deshalb die Maße

$$x = r(\cos\phi_0 - \sin\phi_0) \approx 0{,}33r \quad \text{und} \quad y = 2r\sin\phi_0 \approx 1{,}05r.$$