1 Gruppenübungen

A. 1: (a) Da $\dfrac{1}{n^2+x^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \geq 1$ gilt, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Sei $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$. Dann ist $f_n'(x) = \dfrac{-2x}{(n^2+x^2)^2}$.
Außerdem gilt:

$$|f_n'(x)| \leq \frac{2|x|}{(n^2+x^2)^2} \leq \frac{20}{n^4} \leq \frac{20}{n^2} \qquad \text{für } x \in (-10, 10).$$

Weil $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{20}{n^2}$ konvergiert, konvergiert nach dem Weierstraß-Kriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ gleichmäßig auf (-10,10) , d.h. die Funktion f ist auf (-10,10) differenzierbar.

(b)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} n^2. \qquad \text{Sei } f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} n^2$$

$\sqrt[n]{f_n(x)} = \mathrm{e}^{-x} \cdot \sqrt[n]{n^2} \to \mathrm{e}^{-x} < 1$ für $x > 0$. D.h. die Reihe konvergiert punktweise für alle $x > 0$.

Wir beweisen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *gleichmäßig* auf jedem Intervall $[a, \infty)$ – mit $a > 0$ – konvergiert. Daraus folgt, dass f auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist.

$f_n'(x) = n^2 \cdot (-n)\mathrm{e}^{-nx} = -n^3 \mathrm{e}^{-nx}$

$|f_n'(x)| = \dfrac{n^3}{\mathrm{e}^{nx}} \leq \dfrac{n^3}{\mathrm{e}^{na}}$ für $x \in [a, \infty)$.

Analog wie oben (Wurzelkriterium) zeigen wir, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{\mathrm{e}^{na}}$ konvergiert, also konvergiert nach dem Weierstraß-Kriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ gleichmäßig auf $[a, \infty)$.

A. 2: (a)

$$f(x) = x^5 \cdot \frac{1}{1-x} = x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+5}.$$

(b)

$$f(x) = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-(-(x-2))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-(x-2))^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-2)^n.$$

A. 3: (a)

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n} = 1, \text{ also ist der Konvergenzradius } R = 1$$

Da $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, erhalten wir: (für alle x mit $|x| < 1$)

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)'$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

(b)

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n^2} = 1 \Rightarrow R = 1$$ Aus (a) bekommen wir für x mit $|x| < 1$

$$\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = x \cdot \frac{(1-x)^2 + x \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} =$$

$$= x \cdot \frac{1 - x + 2x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$