10 Gruppenübungen

A. 1: (a) **injektiv:** Sei $f(a,b) = f(c,d)$, d. h. $\begin{pmatrix} 2ab \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2cd \\ d^3 \end{pmatrix}$. Dann folgt sofort $b = d$ und damit auch $a = c$, weil ja $b = d \neq 0$ gilt.

surjektiv: Sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$ beliebig. Zu zeigen ist dann, dass es ein $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$ gibt mit $f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Wähle dazu einfach $(x_0,y_0) = (\frac{a}{2b^{\frac{1}{3}}}, b^{\frac{1}{3}})$.

(b) Die Umkehrabbildung zu f gewinnt man am besten dadurch, dass man zuerst die zweite Komponente betrachtet: Nachdem $f_2(x,y) = y^3$ ist, muss $g_2(x,y) = y^{\frac{1}{3}}$ sein

$\Big($ bzw. um genau zu sein $g_2(x,y) = \begin{cases} y^{\frac{1}{3}} & y \geq 0 \\ -|y|^{\frac{1}{3}} & y < 0 \end{cases}$ $\Big)$.

Jetzt kann man auch leicht g_1 angeben: $g_1(x,y) = \frac{x}{2y^{\frac{1}{3}}}$. Insgesamt gilt also: $g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2y^{\frac{1}{3}}} \\ y^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$.

(c) $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}$. Die Invertierbarkeit dieser Matrix lässt sich jetzt mit Hilfe der Determinante entscheiden: $\det \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix} = 6y^3 \neq 0$ für alle $y \neq 0$. $f'(x_0,y_0)$ ist also für jeden Punkt (x_0,y_0) des Definitionsbereiches invertierbar.

(d) **1. Art:** $f'(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Die inverse Matrix dazu ist

$$(f'(2,1))^{-1} = \frac{1}{\det f'(2,1)} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = g'(f(2,1)).$$

2. Art: $g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2y^{\frac{1}{3}}} & \frac{x}{2} \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot y^{-\frac{4}{3}} \\ 0 & \frac{1}{3} \cdot y^{-\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$. Setzt man nun den Punkt $f(2,1) = (4,1)$ ein, ergibt sich wieder:

$$g'(4,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

A. 2: (a) $y = s - x^3 \Rightarrow -(s - x^3)^3 + x = t$.
Sei $f(x) = -(s - x^3)^3 + x$.
$f'(x) = -3(s - x^3)^2 \cdot (-3x^2) + 1 > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$.
Daraus folgt, dass f eine streng-monoton-wachsende Funktion ist. Da f ein Polynom ungeraden Grades ist, ist $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
Also hat die Gleichung $f(x) = t$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}$. Mit dieser Lösung *und* aus $y = s - x^3$ bekommen wir auch eine *eindeutige* Lösung y.

(b) Sei $f(x,y) = (x^3 + y, -y^3 + x)$. Dann ist f auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Aus (a) folgt, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bijektion ist. Außerdem gilt

$$\det Df(x,y) = \det \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix} = -9x^2y^2 - 1 < 0.$$

Also ist f^{-1} eine stetig differenzierbare Funktion und
$f^{-1} = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \end{pmatrix}$, $Df^{-1}(s,t) = (Df(x,y))^{-1}$,
wobei $x = x(s,t)$ und $y = y(s,t)$ ist.
Für $(s,t) = (0,2)$ bekommen wir $(x,y) = (1,-1)$ und

$$\begin{pmatrix} x'(0,2) \\ y'(0,2) \end{pmatrix} = Df^{-1}(0,2) = (Df(1,-1))^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

A. 3: (a) Da f' auf $\mathbb{R}$ stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass entweder $f'(x) > 0\,\forall x$ oder $f'(x) < 0\,\forall x$ gelten muss.
Im ersten Fall heißt es, dass f streng-monoton wachsend ist und dadurch auch injektiv. Analog betrachtet man den zweiten Fall. Das Beispiel $f(x) = \arctan x$ zeigt, dass f nicht notwendigerweise surjektiv sein muss.
Man hätte auch aufgrund der Differenzierbarkeit auf den *Satz von Rolle* schließen können.

(b) Nein! Sei $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
Dann ist $\det Df(x, y) = \det \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^{2x} \neq 0$.
Aber f ist nicht injektiv, da $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$.