11 Gruppenübungen

$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

A. 1: $g_t(s,t) = f_x(x,y)\cdot 1 + f_y(x,y)\cdot(e^{s+t}+1)$, wobei $x = s+t, y = e^{s+t}+t$.

$$\begin{aligned} g_{ts}(s,t) &= f_{xx}(x,y)\cdot 1 + f_{xy}(x,y)\cdot 1 + \\ &+\Big(f_{yx}(x,y)\cdot 1 + f_{yy}(x,y)\cdot 1\Big)\cdot(e^{s+t}+1) + \\ &+f_y(x,y)\cdot e^{s+t} \end{aligned}$$

Daraus folgt: $g_{ts}(0,0) = 1+1+2\cdot 2+1 = 7$.

A. 2: (a)

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)\cdot 3x^2 - x^3\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^2y^2+x^4}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ f_x(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t-0}{t} = 1 \\ f_y(x,y) &= \frac{-x^3\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ f_y(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f_x(0,t)-f_x(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-1}{t}\text{- existiert nicht!} \\ f_{yx}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f_y(t,0)-f_y(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0. \end{aligned}$$

A. 3: (a)

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)\cdot(3x^2y-y^3)-(x^3y-xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{für } (x,y)\neq(0,0). \\ f_x(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0. \end{aligned}$$

Stetigkeit von $f_x(x,y)$: Für $(x,y)\neq(0,0)$ ist f_x stetig.
Für $(x,y)=(0,0)$:

$$\begin{aligned} \Big|f_x(x,y) - f_x(0,0)\Big| &\le \frac{|x^4y|}{(x^2+y^2)^2} + 4\frac{|x^2y^3|}{(x^2+y^2)^2} + \frac{|y^5|}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2\cdot|y| + 4\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2\cdot|y| + \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2\cdot|y| \le \\ &\le |y|(1+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+1) = 3|y| \to 0 \quad (x,y)\to(0,0). \end{aligned}$$

Damit ist f_x stetig. Analog erhalten wir $f_y(x,y) = \cdots = \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y)\neq(0,0)$, $f_y(0,0)=0$ und können wie oben zeigen, dass f_y auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(b)

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f_x(0,t)-f_x(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-t-0}{t} = -1 \\ f_{yx}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f_y(t,0)-f_y(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t-0}{t} = 1 \end{aligned}$$