12 Gruppenübungen

A. 1: Taylorpolynom

In dieser Aufgabe sollen Sie ganz konkret ein Taylorpolynom zu einer einfachen Funktion bestimmen. Dabei kommen sowohl die Jacobi- als auch die Hesse-Matrix zum Einsatz. Taylorpolynome können (wie schon im Eindimensionalen) dazu benutzt werden, Näherungswerte für Funktionswerte nahe am Entwicklungspunkt zu berechnen.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^{2y}$ und sei $a = (1, 1)$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades zu f im Punkt a, also

$$T_2 f(x, y) = f(1, 1) + f'((1, 1), (x - 1, y - 1)) + \frac{1}{2} f''((1, 1), (x - 1, y - 1), (x - 1, y - 1)).$$

b) Geben Sie damit eine Näherung für $f(1.2, 0.9)$ an (ohne Taschenrechner)!

Musterlösung:

a) Wir berechnen zunächst Jacobi- und Hesse-Matrix:

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2yx^{2y-1} & x^{2y} \cdot \log x \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2y(2y-1)x^{2y-2} & 2x^{2y-1} + 2yx^{2y-1} \cdot \log x \cdot 2 \\ 2yx^{2y-1} \cdot \log x \cdot 2 + x^{2y} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2 & x^{2y} \cdot (\log x)^2 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

Ausgewertet an der Stelle $(1, 1)$ ergibt sich:

$$f'(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f''(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Skriptum auf Seite 99 steht, wie man $f''((1, 1), (x - 1, y - 1), (x - 1, y - 1))$ leicht berechnen kann. Insgesamt ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
T_2 f(x, y) &= f(1, 1) + f'(1, 1) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix} \cdot f''(1, 1) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \\
&= 1 + \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \\
&= 1 + 2x - 2 + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x - 2 + 2y - 2 \\ 2x - 2 \end{pmatrix} = \\
&= 1 + 2x - 2 + \frac{1}{2} \cdot (2x^2 + 4xy - 8x - 4y + 6) = \\
&= x^2 + 2xy - 2x - 2y + 2
\end{aligned}$$

b) Als Näherungswert für $f(1.2, 0.9)$ ergibt sich

$$T_2 f(1.2, 0.9) = 1.2^2 + 2 \cdot 1.2 \cdot 0.9 - 2 \cdot 1.2 - 2 \cdot 0.9 + 2 = 1.4$$

(mit dem Taschenrechner berechneter Wert: $f(1.2, 0.9) = 1.2^{2 \cdot 0.9} \approx 1.3884$)

A. 2:

$$\begin{aligned}
f(x + h_1, y + h_2) &= 2(x + h_1) + y + h_2 - (x + h_1)(y + h_2) + (x + h_1)^3 = \\
&= \underline{2x} + \underline{\underline{2h_1}} + \underline{y} + \underline{\underline{h_2}} - \underline{xy} - \underline{\underline{xh_2}} - \underline{\underline{yh_1}} - h_1 h_2 + \underline{x^3} + \underline{\underline{3x^2 h_1}} + 3xh_1^2 + h_1^3 = \\
&= f(x, y) + (2 - y + 3x^2)h_1 + (1 - x)h_2 - h_1 h_2 + 3xh_1^2 + h_1^3 \\
&= f(x, y) + \begin{pmatrix} 2 - y + 3x^2 & 1 - x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} h^2 + h_1^3
\end{aligned}$$

Außerdem ist : $\left| \dfrac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2} \right| \leq |h_1| \to 0 \quad (h \to 0).$

Damit ist $Df(x, y) = (2 - y + 3x^2, 1 - x)$ und $D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

A. 3: Laut Taylorformel: $f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \frac{1}{2}d^2 f(x)h^2 + r(h)$,

wobei $\frac{r(h)}{||h||^2} \to 0$. Für $h = tv$ bekommen wir

$$\begin{aligned} f(x+tv) &= f(x) + Df(x)(tv) + \frac{1}{2}D^2 f(x)(tv)^2 + r(tv) = \\ &= f(x) + \underbrace{tD_v f(x)}_{=0} + \frac{1}{2}t^2 D^2 f(x)v^2 + r(tv) = \\ &= f(x) + \frac{1}{2}t^2 D^2 f(x)v^2 + r(tv) =: f(x) + R. \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\frac{R}{t^2} = \frac{1}{2}D^2 f(x)v^2 + \frac{r(tv)}{||tv||^2} \cdot ||v||^2 \to \frac{1}{2}D^2 f(x)v^2 > 0 \quad (t \to 0)$$

Daraus folgt: es gibt ein $\eta > 0$, sodass für alle $t \in (-\eta, \eta)$ gilt: $\frac{R}{t^2} > 0$, d.h. $R > 0$.
Daraus folgt $f(x+tv) = f(x) + R > f(x)$ für alle $t \in (-\eta, \eta)$.