13 Gruppenübungen

A. 1: (a)

$$Df(x,y) = (ye^{xy} - 1,\ xe^{xy}) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,1)$$
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy} & xy^{xy} + e^{xy} \\ xye^{xy} + e^{xy} & x^2e^{xy} \end{pmatrix}$$
$$D^2 f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\det(D^2 f(0,1)) < 0 \Rightarrow D^2 f(0,1) = \text{ indefinit}$$
$$\Rightarrow f(0,1) = \text{Sattelpunkt}$$

(b)

$$Df(x,y) = (3x2^+y,\ 3y^2 + x) = (0,0) \Leftrightarrow x = y \in \left\{0, -\frac{1}{3}\right\}$$
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}, D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D^2 f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\det(D^2 f(0,0) - \lambda \mathbb{I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1\backslash 2} = \pm 1 \Rightarrow (0,0) = \text{ Sattelpunkt}$$
$$\det(D^2 f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)) > 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 > 0$$
$$tr(D^2 f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)) < 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 < 0$$

Daraus folgt ($\lambda_{1\backslash 2}$ Eigenwerte)$\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0 \Rightarrow D^2 f()$ ist negativ definit. Also hat f hier ein lokales Maximum.
Alternativ kann man sich die quadratische Form anschauen:

$$< (x,y), \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} >= -2x^2 - 2y^2 + 2xy = -(x^2 + y^2 - 2xy) - x^2 + y^2 = -(x-y)^2 - x^2 - y^2 \leq 0$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn $x = y = 0$.

(c)

$$Df(x,y,z) = (y + 2x,\ x + 4y^3,\ 2z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 12y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D^2 f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\det(D^2 f(0,0,0)) = -2, \lambda_3 = 2 > 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 < 0 \Rightarrow f(0,0,0) = \text{ Sattelpunkt}$$
$$D^2 f(-\frac{1}{8}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}, 0) = D^2 f(\frac{1}{8}\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{2}, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Im letzten Fall sind alle Eigenwerte positiv, daher handelt es sich um 2 lokale Minima.

A. 2:

$$Df(x,y) = (2x - y,\ -x + \frac{2ay}{1+y^2})$$
$$Df(0,0) = (0,0) \forall a \in \mathbb{R}$$
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2a \cdot \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}, D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2a \end{pmatrix} := A$$

1. $\det A = 4a - 1 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{4} \Rightarrow (0,0) = \text{Sattelpunkt}$
2. Für $a > \frac{1}{4}$ ist $\det A > 0$ und $trA > 0 \Rightarrow$ (0,0) ist lokales Minimum
3. $a = \frac{1}{4} : f(x,0) = x^2 > 0; f(x,2x) = x^2 - 2x^2 + \frac{1}{4}\log(1 + 4x^2) \leq -x^2 + \frac{1}{4} \cdot 4x^2 = 0$

f hat also für dieses a kein Extremum.

A. 3:

$$Df(x,y) = (-2xy,\ 2y - x^2) = (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0$$
$$f(x, ax^2) = a^2x^4 - ax^2x^2 = (a^2 - a)x^4 \leq 0 \Leftrightarrow a \in (0,1)$$
$$f(x, ax^2) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 1$$

Also kann f kein Extremum an dieser Stelle annehmen.