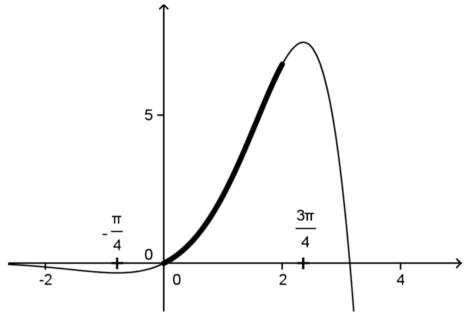
14 Gruppenübungen

A. 1: a) f ist stetig differenzierbar und es gilt $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$. Nullsetzen der Ableitung liefert $e^x(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin x \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$. In diesen Punkten ist f nicht lokal invertierbar (da lokal nicht injektiv). In allen Punkten $x_0 \neq k\pi - \frac{\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$ ist f nach dem Satz auf S. 110 lokal invertierbar. f ist nicht global invertierbar.

Wähle z. B. $x_0 = 1$. Dann kann man z. B. die Intervalle $V = (0, 2) =$ und $W = (0, e^2 \sin 2)$ wählen.



b) f ist stetig differenzierbar und es gilt $f'(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnung der Determinante liefert: $\det f'(r, \varphi, z) = r$.

Solange $r \neq 0$, kann man f lokal invertieren (das ist aber durch den Definitionsbereich gesichert). f ist aber nicht global invertierbar, da z. B. $f(r, \varphi, z) = f(r, \varphi + 2\pi, z)$ gilt, f also nicht injektiv ist.

Zum Punkt $(r_0, \varphi_0, z_0) = (1, 0, 0)$ kann man z. B. $V = \mathbb{R}^+ \times (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (rechter Halbraum) wählen, damit $f : V \to W$ bijektiv ist.

A. 2: (a)

$$\begin{aligned} Df(x, y) &= \begin{pmatrix} 4y - 4x & 4x \\ 4x + y & x - 2y \end{pmatrix} \\ \det Df(x, y) &= 4(-5x^2 + 2xy - 2y^2) = \\ &\quad -4((x - y)^2 - 4x^2 - y^2) < 0 \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow \end{aligned}$$

f ist in jedem Punukt $(x, y) \neq (0, 0)$ lokal invertierbar.
In $(0, 0)$ gilt: $f(x, 0) = f(-x, 0)\, \forall x \in \mathbb{R}$.
Es gibt KEINE Umgebung U von $(0, 0)$, damit $f : U \to \mathbb{R}^2$ injektiv ist $\Rightarrow$ f ist nicht in $(0, 0)$ lokal invertierbar.

(b) Aus dem Satz der lokalen Invertierbarkeit der Funktion folgt, dass f^{-1} auf V stetig differenzierbar ist und

$$Df^{-1}(s, t) = (Df(x, y))^{-1} \quad \text{mit } (x, y) = f^{-1}(s, t).$$

$$Df^{-1}(2, 2) = (Df(1, 1))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

A. 3: Sei $f(x, y) = (e^{2x+y} - \cos(xy), e^x - \cos(x + y))$

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} e^{2x+y} \cdot 2 + \sin(xy)y & e^{2x+y} + \sin(xy)x \\ e^x + \sin(x + y) & \sin(x + y) \end{pmatrix}$$

Für $(s, t) = (0, 0)$ hat das Gleichungssystem eine Lösung:
$(x, y) = (0, 0)$, also ist $f(0, 0) = (0, 0)$.

$$\det Df(0, 0) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Aus dem Satz über lokale Invertierbarkeit folgt:
Es gibt eine Umgebung $U \ni (0, 0)$, $V \ni (0, 0)$, sodass $f : U \to V$ bijektiv ist.Also hat das Gleichungssystem für $(s, t) \in V$ eine Lösung (x, y) welche in U sogar eindeutig ist.