15 Gruppenübungen

A. 1: a) Ein nach unten geöffnetes (elliptisches) Paraboloid, das die z-Achse bei $z = 25$ schneidet.

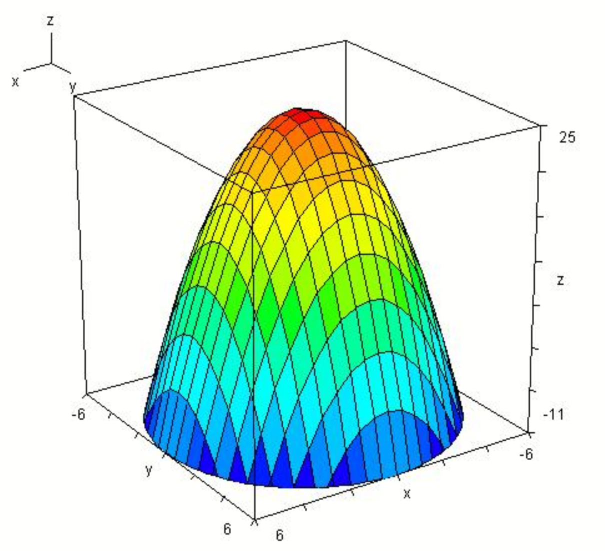

Abbildung 1

b) Wir suchen also Punkte, die die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ erfüllen. Diese liegen anschaulich auf einem Kreis mit Radius 5 und Mittelpunkt $(0, 0)$ (erinnern Sie sich an die Schulmathematik - Kegelschnitte!).

c) Die im Satz angegebene Determinante vereinfacht sich in unserem Beispiel ungemein: Die Funktion f besteht aus nur einer Komponentenfunktion und es gilt außerdem $n = 1$. Wir erhalten also

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right) = \det\left(-2a\right).$$

Diese Determinante ist nur dann gleich Null, wenn $a = 0$. D. h. lediglich die beiden Punkte $(0, 5)$ und $(0, -5)$ (auf dem Kreis aus Teilaufgabe b) erfüllen die Voraussetzung des Satzes **nicht**.

Geometrisch betrachtet wird klar, dass sich wirklich keine solche Funktion φ finden lässt (der Satz selbst macht für solche Punkte keine Aussage), die jedem y aus einer Umgebung von $(0, 5)$ (bzw. $(0, -5)$) ein passendes x zuordnet.

Betrachten wir dazu z. B. den Punkt $(0, 5)$. In keiner Umgebung $U = (5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$ von $y = 5$ kann man den Kreis lokal als Funktion von y darstellen. Für $y > 5$ gäbe es ja keinen entsprechenden Funktionswert $\varphi(y) = x$ (siehe Abbildung 2, Vorsicht: hier ist jetzt y die abhängige und x die unabhängige Variable und nicht wie gewohnt umgekehrt).

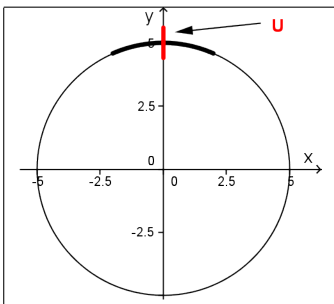

Abbildung 2

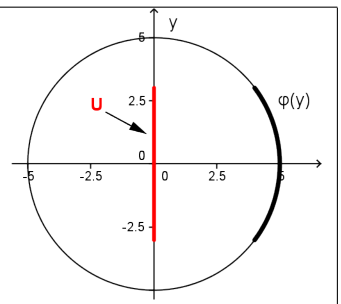

Abbildung 3

d) Wählen wir z. B. $(a, b) = (5, 0)$. Dann können wir die Umgebung von $b = 0$ als $U = (-3, 3)$ (oder sogar noch größer) wählen und $\varphi(y)$ erhalten wir, indem wir die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ nach x auflösen: $\varphi(y) = \sqrt{25 - y^2}$ (Abbildung 3). Klarerweise gilt dann $\varphi(0) = 5$ und $f(\varphi(y), y) = 0$, wie man leicht nachrechnet!

A. 2: (a) Für $t = 0$ bekommen wir $x = y = 0$.
Sei $f(x, y, t) = (8x + t\sin(x + y), y + t\cos(xy))$

$$D_{(x,y)}f(x, y, t) = \begin{pmatrix} 1 + t\cos(x + y) & t\cos(x + y) \\ -\sin(xy)ty & 1 - \sin(xy)tx \end{pmatrix}$$

$\det D_{(x,y)}f(0, 0, 0) = 1 \neq 0$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es eine Umgebung $U \ni 0$ in $\mathbb{R}$, sodass das Gleichungssystem eine Lösung besitzt, die auch stetig differenzierbar ist.

(b)

$$x(0) = 0, y(0) = 0,$$

$$\begin{cases} x(t) + t\sin(x(t) + y(t)) = 0 \\ y(t) + t\cos(x(t) \cdot y(t)) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(t) + \sin(x(t) + y(t)) + t\cos(x(t) + y(t)) \cdot (x'(t) + y'(t)) = 0 \\ y'(t) + \cos(x(t)y(t)) - t\sin(x(t)y(t)) \cdot (x(t)y(t))' = 0 \end{cases}$$

$t = 0$ liefert:

$$\begin{cases} x'(0) + 0 = 0 \\ y'(0) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

A. 3: Für $s = t = \frac{\pi}{2}$ können wir $x = y = 0$ wählen.

$$D_{(x,y)}f(x, y, s, t) = \begin{pmatrix} 2 & -\sin(y - s - t) \\ \cos(x - s + t) & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det D_{(x,y)}f(0, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Der Satz über implizite Funktionen sagt: es gibt eine Umgebung $U \ni \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, sodass das Gleichungssystem eine (eindeutige) stetig differenzierbare Lösung (x, y) für alle $(s, t) \in U$ besitzt.

A. 4: (a) Seien (x, y) fest und $f(z) = (x^2 + 1)z + y^2 \log(z)$
$f'(z) = x^2 + 1 + \frac{y^2}{z} > 0$ und
$\lim_{z\to 0+} f(z) = -\infty$ und $\lim_{z\to +\infty} f(z) = +\infty$
Daraus folgt, dass $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bijektiv ist und insbesondere gibt es genau eine Zahl $z > 0$, sodass $f(z) = 4$.

(b) Sei

$$g(x, y, z) = (x^2 + 1)z + y^2 \log(z) - 4$$

$$D_z g(x, y, z) = x^2 + 1 + \frac{y^2}{z} \neq 0$$

Es folgt aus dem Satz überrr implizite Funktionen, dass die Lösung $z = z(x, y)$ der Gleichung $g(x, y, z) = 0$ eine stetig differenzierbare Funktion ist. Außerdem ist $z(1, 0) = 2$.

$$(x^2 + 1)z(x, y) + y^2 \log(z(x, y)) = 4$$

$$(x^2 + 1)z_x(x, y) + 2x \cdot z(x, y) + y^2 \cdot \frac{1}{z(x, y)} \cdot z_x(x, y) = 0$$

$$(x^2 + 1)z_y(x, y) + y^2 \cdot \frac{1}{z(x, y)} \cdot z_y(x, y) + 2y\log(z(x, y)) = 0$$

$x = 1$ und $y = 0$ liefert:

$$\begin{cases} 2 \cdot z_x(1, 0)2 \cdot 2 = 0 \\ 2 \cdot z_y(1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_x(1, 0) = -2 \\ z_y(1, 0) = 0 \end{cases}$$

$D_z(1, 0) = (-2, 0)$.