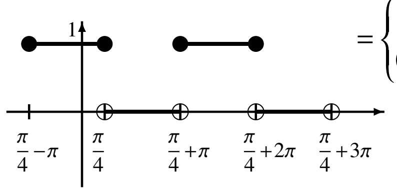
2 Gruppenübungen

A. 1:

$$g(t) = f(\sin t, \cos t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \cos t \geq \sin t \\ 0 & \text{für } \cos t < \sin t \end{cases} =$$



$$= \begin{cases} 1 & \text{für } t \in \left[2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right] \\ 0 & \text{für } t \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \end{cases}$$

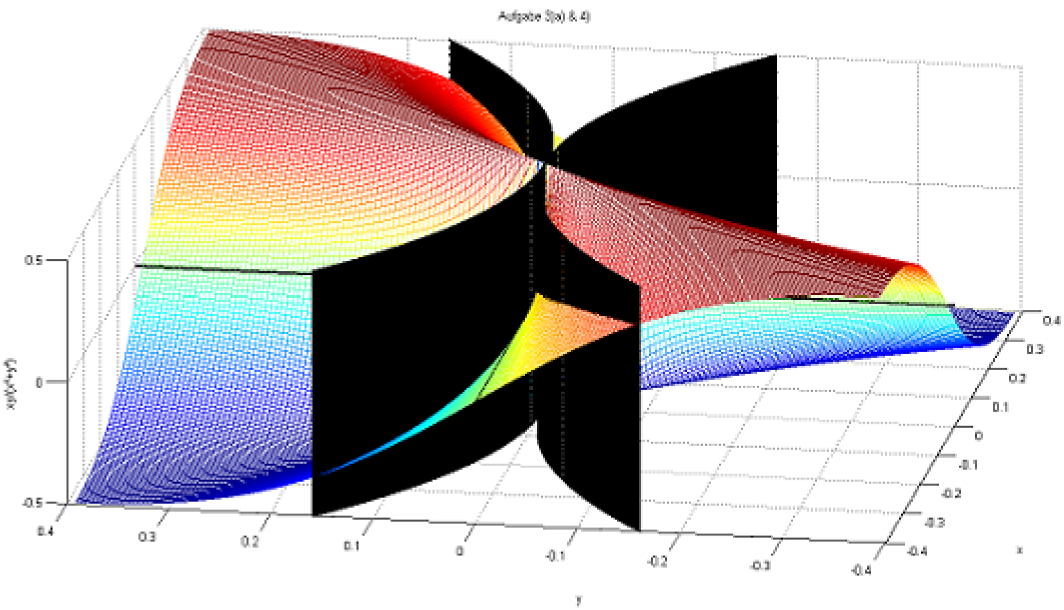
A. 2: Seien $x, y \in A$. Dann ist $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$. Wir wollen zeigen, dass $\forall t \in (0, 1): \ \|tx + (1-t)y\| \leq 1$.

$$\|tx + (1-t)y\| \ \leq \ t\|x\| + (1-t)\|y\| \ \leq \ t + 1 - t = 1.$$

A. 3: (a) Nein!

$$f(0,0) = \lim_{n\to\infty} f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$f(0,0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

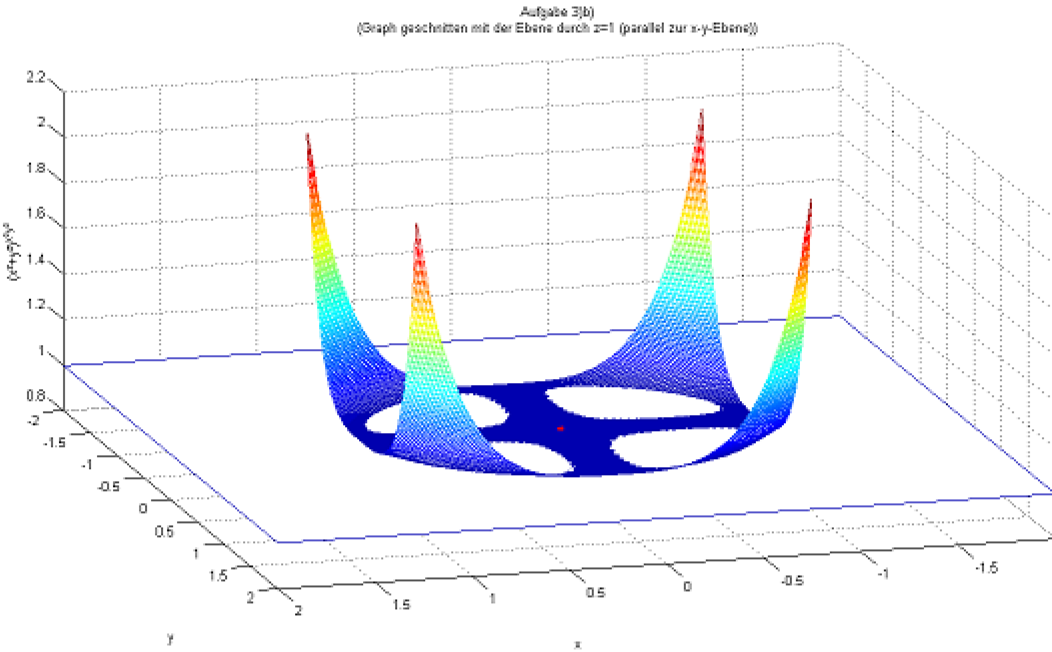


Widerspruch.

(b)

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^{x^2y^2\log(x^2+y^2)}.$$

Sei also $g(x,y) = x^2y^2\log(x^2+y^2)$.



Wir beweisen, dass $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$ ist.
Seien $x = r\cos t, y = r\sin t$. Dann ist $(x,y)\to(0,0)$ genau dann, wenn $r\to 0+$.

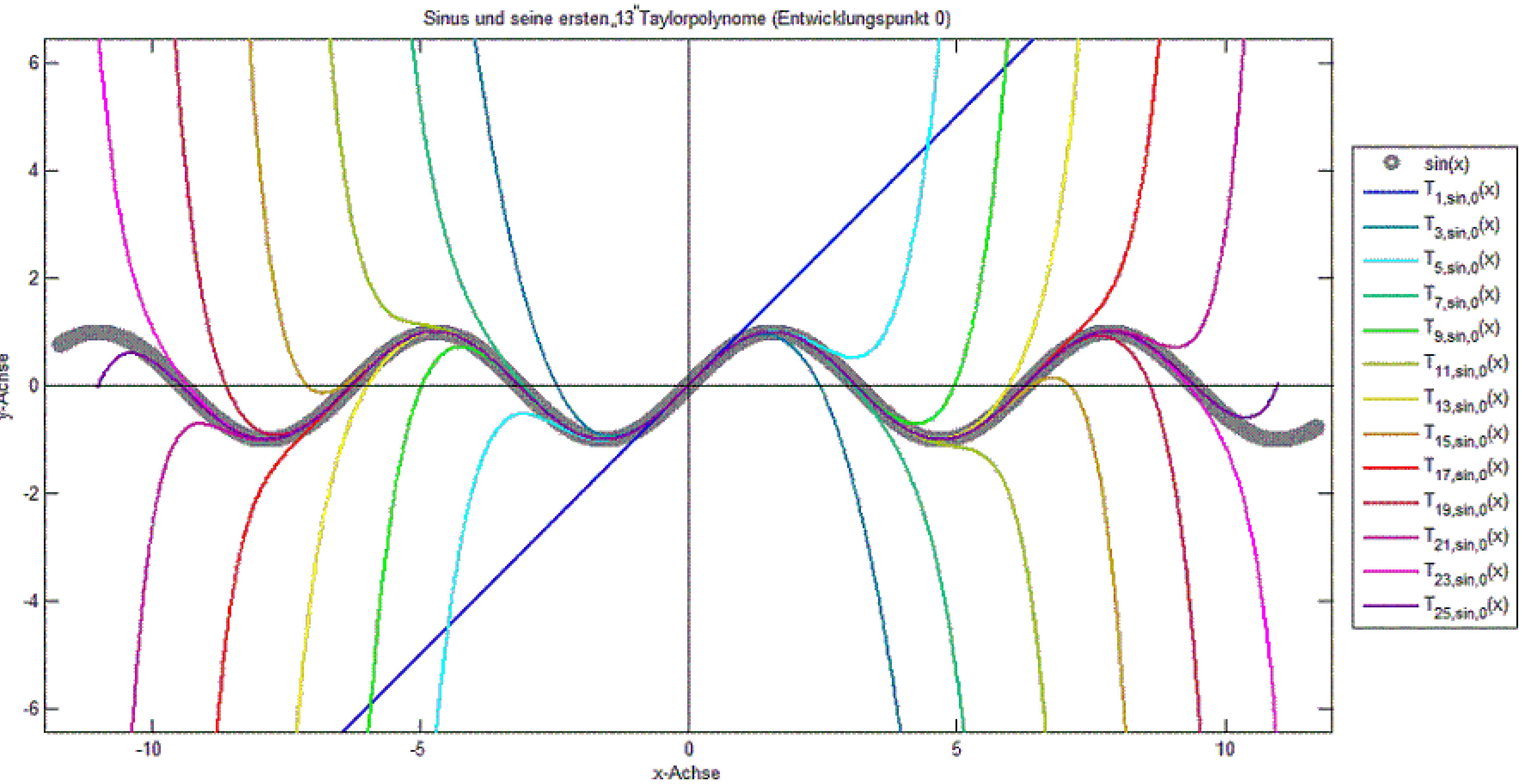
$$\begin{aligned}|g(x,y)| &= |r^4\sin^2 t\cos^2 t\log(r^2)| \le r^4|\log(r^2)| \\ &= 2r^3\cdot\underbrace{|r\log(r)|}_{\to 0\,(\text{AnaI})} \to 0 \text{ wenn } r\to 0+\end{aligned}$$

Damit ist $g(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\log(x^2+y^2) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ stetig.

Also ist $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{x^2y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig.

A. 4: Wir beweisen, dass $f: D\to\mathbb{R}$ mit $f(0,0)=0$ stetig ist!
Sei $(x,y)\to(0,0)$ mit $(x,y)\in D$. Also ist $|y|\le x^2$

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|\cdot x^2}{x^2+y^2} \le \frac{|x|\cdot x^2}{x^2} = |x| \to 0,\ \text{wenn } (x,y)\to(0,0).$$



Sinus und seine ersten „13" Taylorpolynome (Entwicklungspunkt 0)
x-Achse
y-Achse
-10
-5
0
5
10
6
4
2
0
-2
-4
-6
sin(x)
$T_{1,sin,0}(x)$
$T_{3,sin,0}(x)$
$T_{5,sin,0}(x)$
$T_{7,sin,0}(x)$
$T_{9,sin,0}(x)$
$T_{11,sin,0}(x)$
$T_{13,sin,0}(x)$
$T_{15,sin,0}(x)$
$T_{17,sin,0}(x)$
$T_{19,sin,0}(x)$
$T_{21,sin,0}(x)$
$T_{23,sin,0}(x)$
$T_{25,sin,0}(x)$